

나노 유체(Nanofluids)의 열전도도

장 석 필*

Thermal Conductivities of Nanofluids

Seok Pil Jang

Key Words : Nanofluids(나노 유체), Thermal Conductivity(열전도도), Brownian Motion(브라운 운동), Nanoscale(나노 크기), Kapitza Resistance, Kinetic Theory

Abstract

Investigators have been perplexed with the thermal phenomena behind the recently discovered nanofluids, fluids with unprecedented stability of suspended nanoparticles although huge difference in the density of nanoparticles and fluid. For example, nanofluids have anomalously high thermal conductivities at very low fraction, strongly temperature-dependent and size-dependent conductivities, and three-fold higher critical heat flux than that of base fluids. Traditional conductivity theories such as the Maxwell or other macroscale approaches cannot explain why nanofluids have these intriguing features. So in this paper, we devise a theoretical model that accounts for the fundamental role of dynamic nanoparticles in nanofluids. The proposed model not only captures the concentration and temperature-dependent conductivity, but also predicts strongly size-dependent conductivity. Furthermore, we physically explain the new phenomena for nanofluids. In addition, based on a proposed model, the effects of various parameters such as the ratio of thermal conductivity of nanofluids to that of a base fluid, volume fraction, nanoparticle size, and temperature on the thermal conductivities of nanofluids are investigated.

기호설명

\bar{C} : 평균 속력(Mean Speed)
 $\bar{C}_{R.M}$: 나노 입자의 Random 속도
 \hat{C}_V : 단위 부피당 Heat capacity
 d : 등가 지름
 D : Brownian diffusion 계수
 D_o : Einstein diffusion 계수
 D_C : 특정 길이
 f : 부피비
 h : 열전달 계수
 k : 열전도도
 k_b : Boltzman 상수
 l : 평균 자유 경로 (Mean free path)

M : 분자량
 M_{nano} : 나노 입자의 분자량
 M_{BF} : Base 유체의 분자량
 Nu : Nusselt 수
 R_k : Kapitza 저항
 u : 분자의 속도
 v : 자유전자 또는 Lattice wave 속도

Greek symbols

α : 평균 Transmission probability
 δ : 경계층 두께
 δ_T : 열 경계층 두께
 ρ : 밀도
 ρ_U : 에너지 밀도

Subscripts / superscripts

BF : Base 유체
 eff : 나노 유체
 f : 유체

* 한국항공대 항공우주 기계공학부
 E-mail: spjang@hau.ac.kr
 TEL:(02)300-0112 FAX:(02)3158-2191

nano: 나노 입자

1. 서 론

최근 전자 부품이 고성능화 고집적화됨에 따라 단위 면적당 발열량이 급격히 증가하고 있으며 더불어 냉각 기술의 중요성이 새롭게 인식되고 있다. 대표적인 예를 들면 Intel Microprocessors의 발열량이 최근 100W급까지 육박하고 있으며 레이저 장비나 통신기기 산업 등에서는 1000W이상의 발열을 냉각할 수 있는 고성능 냉각기술이 요구되고 있다⁽¹⁾. 따라서 차세대 냉각 장치 개발을 위해서 많은 연구자들이 연구하고 있으며 대부분의 연구들이 두 가지 방법론에 치중하면서 냉각 장치의 열전달 계수를 증가시키고자 하였다. 두 가지 방법론은 식(1)을 이용하여 다음과 같이 설명할 수 있다.

$$h = \frac{Nu k_f}{D_c} \quad (1)$$

첫번째는 Nusselt 수를 증가시키는 방법으로 특히 냉각 장치의 형상을 최적화 함으로써 열전달 계수를 증가시키는 방법⁽²⁾이며 두 번째 방법은 냉각 장치의 특성 길이(D_c)를 작게 함으로써 열전달 계수를 증가시키는 방법이다⁽³⁾. 이 두 가지 방법론을 모두 적용한 대표적인 예가 고성능 고발열 전자 부품 냉각에 사용될 수 있는 마이크로 채널 히트싱크⁽³⁾이다.

본 연구에서는 최근 차세대 냉각 유체로 대두되고 있는 나노 유체의 열적 특성을 소개하고 나노 유체의 열전도도를 예측할 수 있는 이론적 모델을 제시하고자 한다. 그리고 본 연구에서 제시한 이론적 모델을 바탕으로 현재까지 실험적으로 발견된 나노 유체의 열적 특성을 설명하고자 한다.

2. 나노 유체 (Nanofluids)

나노 유체란 일반적인 유체에 소량의 부피를 가지는 나노 입자를 넣어서 만든 유체이다⁽⁴⁾. 그림 1은 TEM(Transmission Electron Micrographs)으로 찍은 Base 유체로 물을 사용하고 0.56%의 6nm 크기를 가진 나노 입자를 넣은 구리 나노 유체(Copper Nanofluids)를 보여주고 있다. 현재까지 나노 유체의 열적 특성에 대한 국제 논문 발표 수는 19 편이며 최근 그 중 2003 년도에 12 편이 나올 정도로 급격히 나노 유체에 대한 연구가 활발히 진행되고 있음을 알 수 있다. 지금까지 실험적으로 발견된 나노 유체의 열적 특성은 4 가지 이다.

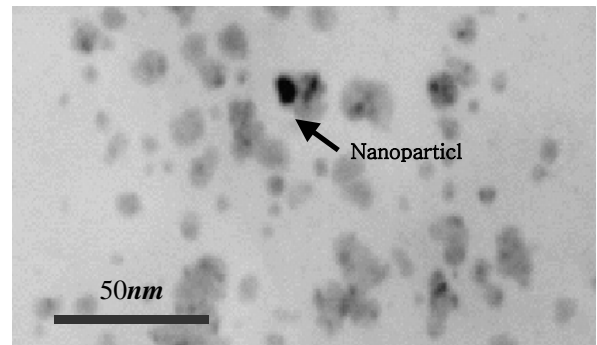


Fig. 1 Nanofluids: Copper based ethylene glycol

첫번째는 Base 유체의 부피에 대한 소량의 부피(1% 미만)를 가지는 나노 입자를 첨가한 나노 유체의 열전도도가 10%정도 상승한다는 것이다⁽⁵⁾. 두 번째는 나노 유체의 열전도도가 온도 변화에 따라 급격히 상승한다는 것이다⁽⁶⁾. 이 결과는 나노 유체를 냉각 유체로 사용할 경우 온도가 증가하면 스스로 열전도도를 증가시켜서 열전달을 많이 일으키도록 한다는 것이다. 세 번째는 나노 입자가 작아질수록 열전도도가 상승한다는 것이다. 이 실험적 결과는 기존의 나노 크기인 박막의 열전도도 특성과는 반대 결과이다. 즉 나노 크기의 박막의 열전도도는 박막의 크기(나노 입자의 크기)가 작아질수록 박막의 열전도도가 급격히 줄어든다⁽⁷⁾. 마지막으로 나노 유체의 열 특성은 임계 열유속(Critical Heat Flux)이 3 배 정도 향상된다는 사실이다⁽⁸⁾. 이런 나노 유체의 열적 특성은 기존의 복합 물질의 열전도도를 예측할 수 있는 Maxwell 모델⁽⁹⁾이나 Maxwell 모델을 변형한 모델⁽¹⁰⁾을 이용해서는 메커니즘을 전혀 설명할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 기존의 모델과는 전혀 다른 접근 방법, 즉 기존의 Maxwell 모델⁽⁹⁾이나 그 변형 모델⁽¹⁰⁾은 나노 입자가 유체 속에서 정지되어 있다는 가정 하에서 열전도도를 예측하였는데 본 연구는 나노 입자들이 유체 속에서 Brownian 운동을 하면서 움직인다는 가정 하에서 나노 유체의 열전도도 모델을 이론적으로 유도하고자 한다.

3. 나노 유체의 열전도도 모델

열전도란 에너지가 많은 입자와 에너지가 적은 입자 사이의 상호 충돌에 의해서 열이 전달되는 것이다. 예를 들면 절연체에서는 Lattice Wave에 의해서 열이 전달되고 도체에서는 자유전자에 의해서 열이 전달되어진다⁽¹¹⁾. 특히 기체나 유체에서는 Random Molecules의 충돌에 의해서 열이 전달되다⁽¹²⁾. 본 연구에서도 나노 유체의 내부에서 나노 입

자들과 물 분자들의 충돌에 의해서 열이 이동한다고 가장하고 Kinetic, Kapitza Resistance⁽¹³⁾ 그리고 Brownian 운동을 사용하여 열전도도 모델을 유도하였다.

일반적으로 기체 및 유체 분자들이 서로 충돌한 후 평균 자유 경로 만큼 자유롭게 움직이며 그 결과 한 방향, 예를 들면 Z 방향으로 에너지가 다음과 같이 전달 된다.

$$J_U = -l_z \hat{C}_V \bar{C} \frac{dT}{dz} = -\frac{1}{3} l \hat{C}_V \bar{C} \frac{dT}{dz} \quad (2)$$

식(2)에 의하면 열전도도는 이론적으로 다음과 같이 표현할 수 있다⁽¹²⁾.

$$k = \frac{1}{3} l \hat{C}_V \bar{C} \quad (3)$$

그리고 여기서 분자의 평균 속도는 다음과 같다.

$$\bar{C} = \left(\frac{8k_b T}{\pi M} \right)^{1/2} \quad (4)$$

여기서 $k_b = 1.3087 \times 10^{-23} J/K$ 는 Boltzman 상수이면 M 은 분자량이다.

이와 유사하게 본 연구에서는 두 가지 사실을 바탕으로 나노 유체의 열전도도를 4 가지 열전달 모드로 나누어 이론적으로 유도한다. 첫번째는 나노 입자들이 유체 분자들과의 충돌에 의해 Brownian 운동을 한다는 것이다. 이 사실은 Base 유체에 부유하고 있는 입자들은 초당 수 백만번의 방향을 바꾸면서 움직인다고 Einstein⁽¹⁴⁾에 의해서 지적되었다. 두 번째는 나노 입자 표면에 유체 분자들이 3 개의 층을 형성한다는 것이다. 이 사실은 Yu 등⁽¹⁵⁾에 의해서 밝혀진 사실이다.

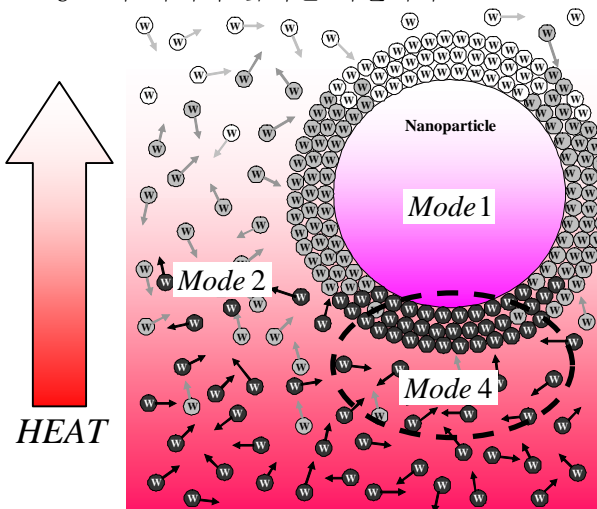


Fig. 2 Modes of energy transport in nanofluids

그림 2 은 나노 유체 내에서의 4 가지의 열전달 메커니즘을 보여주고 있다.

First Mode (Thermal diffusion in nanoparticles)

첫번째 열전달 메커니즘은 나노 입자 내부에서 Thermal diffusion 에 의한 열전달이며 이것의 물리적 의미는 나노 입자의 열전도도에 의해서 열이 전달되는 것을 의미한다.

$$J_U = -\frac{1}{3} l_{nano} \hat{C}_{V,nano} \nu f \frac{dT}{dz} = -k_{nano} f \frac{dT}{dz} \quad (5)$$

여기서 f , k_{nano} , 그리고 ν 는 각각 부피비 (Volume Fraction), 나노 입자의 열전도도, 그리고 자유전자나 Lattice Wave의 평균 속도를 각각 나타낸다. 특히 나노 입자의 열전도도는 그 물질의 Bulk 열전도도를 사용할 수 없다⁽⁷⁾. 따라서 본 연구에서는 나노 입자의 열전도도를 예측하기 위해서 Kapitza Resistance⁽¹³⁾를 고려하여 계산하였다.

$$R_k = \left(\frac{1}{4} \hat{C}_V \nu \alpha_{nano \rightarrow BF} \right)^{-1}, R_k \sim O(10^{-7}) \quad (6)$$

여기서 R_k 와 $\alpha_{nano \rightarrow BF}$ 는 각각 Kapitza Resistance 와 평균 Transmission Probability를 나타낸다. 비록 Kapitza Resistance⁽¹³⁾의 크기가 매우 작지만 나노 입자의 특성길이가 매우 작기 때문에 Kapitza Resistance⁽¹³⁾에 의해서 감소되는 열전도도를 고려하여 나노 입자의 등가 열전도도를 계산해야 한다. 따라서 Kapitza Resistance⁽¹³⁾를 고려하여 나노 입자의 등가 열전도도를 다음과 같이 구하였다.

$$J_U = -\beta k_{particle} f \frac{dT}{dz}, \beta = 0.01 \quad (7)$$

여기서 β 는 Kapitza Resistance⁽¹³⁾를 고려하기 위한 상수이다.

Second Mode (Thermal diffusion of a base fluid)

두 번째 모드는 Base 유체 분자들의 상호 충돌에 의한 열전달이며 이것은 물리적으로 유체의 열전도도에 의해서 열이 전달되는 것을 의미한다.

$$J_U = -\frac{1}{3} l_{BF} \hat{C}_{V,BF} \bar{C}_{BF} \frac{dT}{dz} (1-f) = -k_{BF} (1-f) \frac{dT}{dz} \quad (8)$$

Third Mode (Collision between nanoparticles)

세번째 모드는 나노 입자의 Brownian 운동에 의한 나노 입자들의 상호 충돌에 의해서 열이 전달되는 방법이다. Order-of-Magnitude 분석을 하면 세번째 모드는 다른 모드와 비교해 보면 무척 작음을 알 수 있다. 따라서 본 모드는 무시할 수 있다.

Last Mode (Nanoconvection due to Brownian motion)

마지막 모드는 Einstein⁽¹⁴⁾이 제시했듯이 입자가 유체에 부유하고 있으면 열에 의해서 발생된

Fluctuation으로 입자가 초당 수 백만번 방향을 바뀌게 하도록 만드는 Brownian 운동에 의한 열전달이다. 비록 Brownian 운동을 시간으로 평균하면 나노 입자의 Random운동은 Zero가 되지만 나노 입자와 유체 분자 사이의 상호 열적 충돌 작용은 존재한다. 따라서 마지막 모드를 본 연구에서는 Nanoconvection이라고 정의하였다.

$$J_U = h(T_{nano} - T_{BF})f = h\delta_T f \frac{T_{nano} - T_{BF}}{\delta_T} \quad (9)$$

$$\sim h\delta_T f \frac{dT}{dz} = k_{nanoconvection} \frac{dT}{dz}$$

여기서 h 와 δ_T 는 각각 나노 입자를 지나가는 열전달 계수와 열 경계층 두께이다.

위의 네 가지 열전달 모드를 중첩하면 다음과 같은 나노 유체의 열전도도 모델을 얻을 수 있다.

$$k_{eff} = \beta k_{particle} f + k_{BF}(1-f) + fh\delta_T \quad (10)$$

여기서 k_{eff} 는 나노 유체의 열전도도이다. 그리고 네 번째 모드의 값을 정량적으로 계산하기 위해서 본 연구에서는 유체가 구를 지나갈 때의 Nusselt 수를 이용하여 열전달 계수를 구하였다⁽¹⁶⁾.

$$Nu = 2.0 + 0.5 Re Pr + O(Re Pr)^2 \quad (11)$$

본 연구에서는 Reynolds 수와 Prandtl 수의 Order가 각각 1, 10 이므로 식 (11)에서 세 번째 부분이 지배적이다. 식 (11)를 근거로 유체가 나노 입자를 지날 때 열전달 계수는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$h \sim \frac{k_{BF}}{d_{nano}} Re^2 Pr^2 \quad (12)$$

또한 나노 크기에서 열 경계층의 크기를 계산하기 위해서 본 연구자는 Yu 등⁽¹⁵⁾에 의해 밝혀진 나노 입자 표면에 유체 분자들이 3 개의 층을 형성한다는 사실과 Prandtl 수의 물리적 의미를 바탕으로 열 경계층을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\delta_T \sim \frac{\delta}{Pr} \quad (13)$$

여기서 δ 는 경계층의 두께이다. 일반적으로 경계층은 Reynolds 수의 역수에 비례한다⁽¹⁷⁾. 그러나 나노 크기에서는 경계층이 나노 입자 표면에 형성된 Base 유체의 층 수에 비례한다고 가정할 수 있다. 그 이유는 나노 입자 표면에 층을 형성한 유체 분자들이 자유롭게 움직이는 유체 분자의 속도보다 훨씬 속도가 작기 때문이다. 따라서 경계층은 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\delta \sim 3d_{BF} \quad (14)$$

식 (12-14)를 이용하여 나노 유체의 열전도도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$k_{eff} = \beta k_{particle} f + k_{BF}(1-f) + C_1 3 \frac{d_{BF}}{d_{nano}} k_{BF} Re_{d_{nano}}^2 Pr \quad (15)$$

여기서 $C_1 = 12$ 는 실험 상수이며 Reynolds 수는 다음과 같이 정의한다.

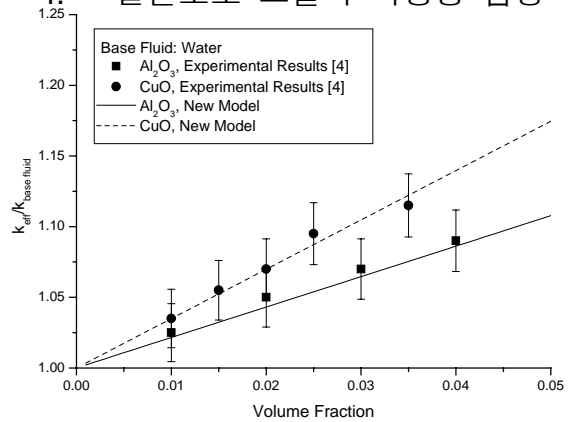
$$Re_{d_{nano}} = \frac{\bar{C}_{R.M.} d_{nano}}{\nu} \quad (16)$$

여기서 $C_1 = 12$ 과 ν 는 각각 나노 입자의 Random 속도와 동점성 계수이다. 그리고 $\bar{C}_{R.M.}$ 는 다음과 같이 정의 한다.

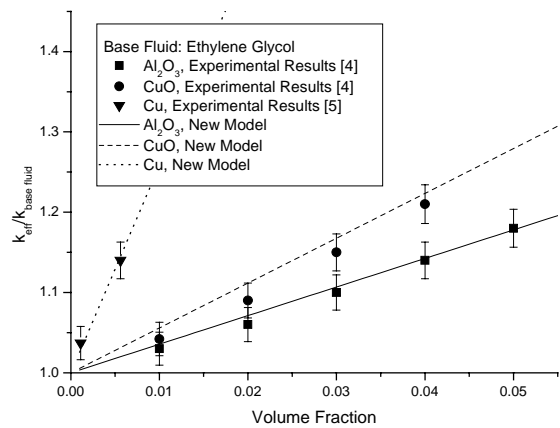
$$\bar{C}_{R.M.} = \frac{D}{l_{BF}} = \frac{2D_o}{l_{BF}}, \quad D_o = \frac{k_b T}{3\pi\mu d_{nano}} \quad (17)$$

여기서 D 는 Hydrodynamic Coupling 을 고려한 Brownian Diffusion 계수이다.

4. 열전도도 모델의 타당성 검증



(a) Water-based Nanofluids



(b) Ethylene glycol-based Nanofluids

Fig. 3 Comparison between experimental results and those from a new model

본 연구에서 제시한 나노 유체의 열전도도 모델에 대한 타당성을 검증하기 위해서 지금까지 발표된 실험결과와 본 열전도도 모델을 이용한 결과와 비교해 보았다. 그림 3 는 본 연구에서 제시한 모델이 실험결과와 잘 일치하고 있음을 보여주고 있다.

5. 열전도도에 영향을 미치는 인자

1) 나노 입자의 열전도도에 대한 Base 유체의 열전도도의 비

본 연구에서 제시한 모델을 사용하여 나노 입자의 열전도도에 대한 유체의 열전도도의 비가 나노 유체의 열전도도에 미치는 영향을 이론적으로 계산하였다. 그림 4 는 그 결과를 보여주고 있다. 그림 4 에 의하면 나노 유체의 열전도도는 나노 입자의 열전도도에 대한 유체의 열전도도의 비에 따라 매우 천천히 상승함을 알 수 있다. 즉 나노 입자의 열전도도에 대한 유체의 열전도도의 비가 나노 유체의 열전도도 상승에 중요한 인자가 아님을 알 수 있다.

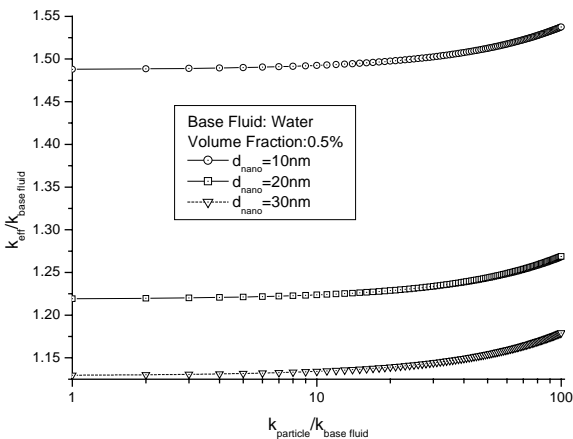


Fig. 4 Effect of the ratio of the thermal conductivity of nanoparticles to that of a base fluid on the thermal conductivity of nanofluids

2) 나노 입자 부피에 대한 유체의 부피비

그림 3 는 부피비에 대한 나노 유체의 열전도도 효과를 보여주고 있다. 그림 3 에서 보듯이 부피비가 증가하면 나노 유체의 열전도도가 증가하게 됨을 알 수 있다. 하지만 부피비가 너무 커지면 나노 유체의 유동 특성 즉 압력강하가 커질 뿐만 아니라 나노 입자들이 유체 내부에 부유한다는 가정 자체에도 문제가 생길 수 있다. 따라서 본 연구에서는 나노 유체의 열전도도 상승은 적은 부피비에서만 가능하다고 생각되어진다. 물론 대부분의 실험 결과도 부피비가 5% 미만에서 실시되었다.

3) 나노 입자의 크기

본 연구에서 제시한 모델을 이용하여 나노 입자의 크기에 대한 나노 유체의 열전도도 관계를 연구해 보았다.

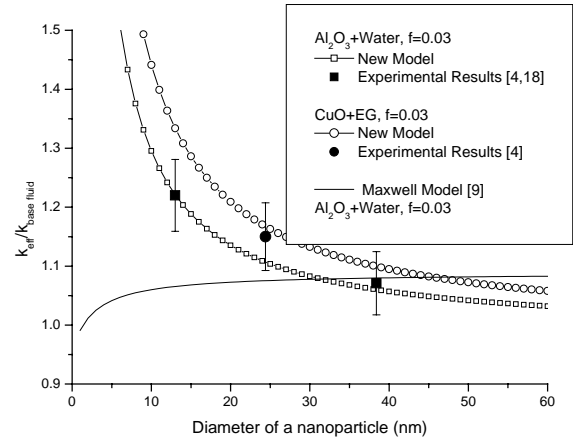


Fig. 5 Effect of a diameter of a nanoparticle on the thermal conductivity of nanofluids

그림 5 는 나노 유체의 열전도도에 대한 나노 입자 크기의 영향을 보여주고 있다. 현재까지 제시된 실험결과와 모델의 결과를 비교해 보면 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 그림 5 에 의하면 나노 입자의 크기가 작아질수록 나노 유체의 열전도도가 점점 커짐을 알 수 있다. 이런 현상은 기존의 Maxwell 모델⁽⁹⁾과 그 변형된 모델⁽¹⁰⁾에서는 전혀 설명할 없다. 하지만 본 연구에서 제시한 모델은 물리적으로 위의 현상을 설명할 수 있다. 그 이유는 다음과 같다. 입자가 작아질수록 Brownian 운동이 점점 커지게 되고 그 결과 나노 유체의 열전달 모드 중 네 번째 모드가 급격히 커지게 되어서 열전도도가 상승하게 된다.

4) 온도

그림 6 은 나노 유체의 열전도도에 대한 온도 효과를 보여주고 있다. 최근 Das⁽⁶⁾ 등은 실험적으로 나노 유체의 열전도도가 온도에 따라 급격히 증가한다는 사실을 발표하였다. 하지만 이런 새로운 현상은 기존의 Maxwell 모델⁽⁹⁾과 그 변형 모델⁽¹⁰⁾에 의해 전혀 설명 되어질 수 없었다. 하지만 본 연구에서 제시한 모델은 Das⁽⁶⁾의 실험결과를 물리적으로 설명할 수 있다. 그 이유는 다음과 같다. 온도가 증가하면 유체의 동점성도는 감소하고 나노 입자의 Brownian 운동은 증가한다. 따라서 이 두 가지 효과에 의해서 네 번째 모드 (Nanoconvection)가 급격히 증가하게 된다. 그 결과 열전도도가 온도에 따라 상승하게 된다.

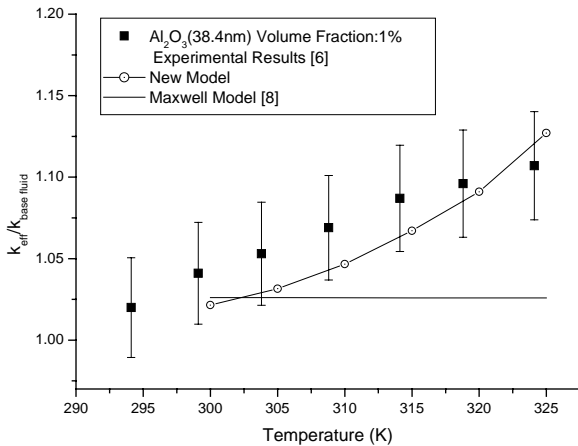


Fig. 7 Effect of temperature on the thermal conductivity of nanofluids

6. 결론

본 연구에서는 최근 차세대 냉각 유체로 대두되고 있는 나노 유체의 열적 특성을 소개하고 나노 유체의 열전도도를 예측할 수 있는 이론적 모델을 Einstein⁽¹⁴⁾의 Brownian 운동에 대한 이론을 확장시켜서 제시하였다. 그 결과 기존의 Maxwell 모델⁽⁹⁾과 그 변형된 모델⁽¹⁰⁾로 설명할 수 없었던 새로운 현상을 물리적으로 설명할 수 있었다. 특히 나노 및 분자 크기에서 나노 입자의 Brownian 운동이 나노 유체의 열전달 특성에 중요한 메커니즘임을 보여주었다. 또한 본 연구에서 제시한 이론적 모델을 이용하여 나노 유체의 열전도도에 영향을 미치는 여러 가지 인자에 대해 설명하였다.

후 기

본 연구는 한국과학기술재단에서 지원하는 해외 박사 후 과정 지원사업으로 수행되었으며, 이에 감사 드립니다.

참고문헌

(1) Jang, S.P., Kim, S.J., and Paik, K.W., 2003, "Experimental investigation of thermal characteristics for a microchannel heat sink subject to an impinging jet, using a micro-thermal sensor array", *Sensors and Actuators A*, vol. 105, pp. 211-224.

(2) Bar-Cohen, A., Jelinek, M., 1986, "Optimum arrays of longitudinal, rectangular fins in convective heat transfer," *Heat Transfer Eng.*, vol.6, pp.595-601.

(3) Tuckerman, D.B., Pease, R.F.W., 1981, "High-performance heat sinking for VLSI," *IEEE Electron Devices*, vol. 2, pp. 126-129.

(4) Lee, S., Choi, S.U.S., Li, S., and Eastman, J.A., 1999, "Measuring thermal conductivity of fluids containing oxide nanoparticles," *ASME J. Heat Transfer*, vol.121, pp.280-289.

(5) Eastman, J.A., Choi, S.U.S., Yu, W. and Thompson, L.J., 2001, "Anomalous increased effective thermal conductivity of ethylene glycol-based nanofluids containing copper nanoparticles," *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 78, pp. 718-720.

(6) Das, S.K., Putra, N., Thiesen, P., and Roetzel, W., 2003, "Temperature dependence of thermal conductivity enhancement for nanofluids," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 125, pp. 567-574.

(7) Chen, G., 1996, "Nonlocal and nonequilibrium heat conduction in the vicinity of nanoparticles," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 118, pp. 539-545.

(8) You, S.M., Kim, J.H., Kim, K.H., 2003, "Effect of nanoparticles on critical heat flux of water in pool boiling heat transfer," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 83, pp. 3374-3376.

(9) Maxwell, J.C., "Electricity and magnetism claredon," Press Oxford UK (1873).

(10) Hamilton, R.L., Crosser, O.K., 1962, "Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems," *I & EC Fundamental*, Vol. 1, pp. 187-191.

(11) Incropera, F.P., Dewitt, D.P., "Fundamental of heat and mass transfer," 4th Ed., John Wiley & Sons (1996).

(12) Kittel, C., Kroemer, H., "Thermal physics," 2nd Ed., W.H. Freeman and Company (1980).

(13) Kapitza, P.L., 1941, "The study of heat transfer in helium II," *J. Phys. (USSR)*, vol. 4, pp. 181.

(14) Einstein, A., "Investigation on the theory of Brownian movement," Dover, New York (1956).

(15) Yu, C.-J., Richter, A.G., Datta, A., Durbin, M.K., and Dutta, P., 1999, "Observation of molecular layering in thin liquid films using X-ray reflectivity," *Phys. Rev. Lett.* Vol. 82, pp. 2326-2329.

(16) White, F.M., "Viscous Fluid Flow," 2nd Ed., McGraw-Hill (1991).

(17) Schlichting, H., "Boundary layer theory," 7th Ed., McGraw-Hill Part B (1979).

(18) Masuda, H., Ebata, A., Teramae, K., Hishinuma, N., 1993, "Alternation of thermal conductivity and viscosity of liquid by dispersing ultra-fine particles (Dispersion γ -Al₂O₃, SiO₂, and TiO₂ Ultra-fine particles), Netsu Bussei (Japan), Vol. 4, pp. 227-233.