

# 종동력을 받는 외팔 Timoshenko보의 동적안정성에 미치는 부분탄성기초의 영향

류봉조<sup>†</sup>·류시웅\*·한현희\*\*·김효준\*\*\*

## Effect of a Partial Elastic Foundation on Dynamic Stability of a Cantilevered Timoshenko Beam under a Follower Force

Bong-Jo Ryu, Si-Ung Ryu, Hyun-Hee Han and Hyo-Jun Kim

**Key Words:** Partial Elastic Foundation(부분탄성기초), Follower Force(종동력), Dynamic Stability(동적안정성), Timoshenko Beam(티모셴코 보)

### Abstract

The paper deals with the dynamic stability of a cantilevered Timoshenko beam on partial elastic foundations subjected to a follower force. The beam is assumed to be a Timoshenko beam with a concentrated mass taking into account its rotary inertia and shear deformation. Governing equations are derived by extended Hamilton's principle, and FEM is applied to solve the discretized equation. Critical follower force depending on the attachment ratios of partial elastic foundations, concentrated mass and rotary inertia of the beam is fully investigated.

### 1. 서 론

탄성기초위에 놓여있고 비보존력을 받는 보의 동적안정성에 관한 연구는 기계공학, 항공우주공학 등 공학의 제 분야에서 많은 연구자들의 관심의 대상이 되어왔다. 예를 들어, 지반구조위에 놓인 유동유체에 의한 파이프의 안정성 문제라든지 추력을 받는 로켓이나 미사일 등은 비보존력의 일종인 종동력을 받는 구조물로 간주될 수 있다.

이러한 연구의 시초는 Smith와 Herrmann<sup>(1)</sup>에 의해 이루어졌다. 이들은 Beck기둥에 탄성기초가 전체 기둥에 걸쳐있는 경우의 임계 종동력을 탄성기초 파라미터 값의 변화에 따라 구하였는데

이들이 구한 임계 종동력 값은 일정하였고, 탄성기초가 없는 경우의 임계 종동력 값과 동일한 특이한 결론에 도달하였다. Sundararajan<sup>(2)</sup>은 Smith와 Herrmann의 연구를 확장하여 기둥의 질량분포와 유사한 탄성기초 상수(elastic foundation modulus)를 갖는 기둥이 비보존력과 보존력을 받는 두 경우에 대해 안정성을 조사하였으며, 이 연구에서 역시 임계하중은 탄성기초와 무관하다는 결론을 도출하였다.

그 후, Anderson<sup>(3)</sup>은 전체 탄성기초위에 놓여있고 끝단 집중질량을 갖는 감쇠를 고려한 외팔보가 종동력을 받는 경우에 있어 동적안정성을 보의 회전관성, 집중질량의 크기변화, 집중질량 회전관성 및 탄성기초 파라미터의 변화에 따라 연구하였다. 이 연구에서 그는 집중질량의 회전관성과 보의 회전관성의 고려는 탄성기초위에 놓인 보의 임계 종동력 값의 변화에 중요한 영향을 미친다는 것을 알았다.

Hauger와 Vetter<sup>(4)</sup>는 전체 탄성기초가 되어있는

† 한밭대학교 기계공학부

E-mail : bjryu701@hanbat.ac.kr

TEL : (042)821-1159 FAX : (042)821-1587

\* 한밭대학교 생산융합기술연구소

\*\* 한밭대학교 대학원

\*\*\* 삼척대학교 기계공학부

외팔 Euler-Bernoulli보가 종동력을 받는 경우의 동적안정성 문제를 다루었는데, 이들은 탄성기초의 형태를 균일, 선형적, 포물선 형태로 확장하여 연구하였다. 종동력을 받고 전체 탄성기초위에 놓인 위의 연구들과 병행하여 종동력을 받는 병진 스프링 지지된 보의 진동과 안정성에 대한 연구도 이루어져 왔는데 Sundararajan<sup>(5)</sup>은 자유단에 병진스프링 지지되고 종동력을 받는 외팔보의 진동과 안정성 문제를 스프링 상수 값의 변화에 따라 조사하였다.

Jacoby와 Elishakoff<sup>(6)</sup>는 끝단질량을 갖고 종동력을 받는 외팔보(소위 Pflüger 기둥이라 일컬음)가 전체 탄성기초위에 놓여있을 때의 동적안정성 문제에 대하여 Anderson<sup>(3)</sup>의 연구를 재점검 하였다.

Elishakoff와 Wang<sup>(7)</sup>은 이제까지의 연구들과는 달리 종동력을 받는 부분 탄성기초된 외팔 Euler-Bernoulli보의 동적 안정성 연구를 하였는데, 그들은 특히 부분탄성기초 길이 변화에 따른 임계 종동력 값의 변화를 살펴보았다. 이들은 탄성기초 파라미터 값  $K$ 가  $K=0.0$ 일 때의 임계 종동력 값에 대한  $K=20$ 부터 100까지의 임계 종동력 값의 비의 변화에 따라 곡선을 얻었다. 이들이 얻은 결과에 의하면 부분탄성기초 길이가 고정단으로부터 점점 길어져 보 길이의 약 0.7부근까지는  $K$ 의 증가에 따라 임계 종동력 값이 증가되나 그 이후는 감소된다는 것이었다.

Chen과 Ku<sup>(8)</sup>는 끝단 집중질량을 갖고 전체 탄성기초 된 외팔 Timoshenko보가 종동력을 받는 경우, 집중질량 회전관성과 크기변화, 탄성기초 파라미터 값의 변화에 따른 임계 종동력 값을 유한요소법에 의하여 구하였다. 최근 Maurizi와 Bambill<sup>(9)</sup>은 종동력을 받는 기둥의 동적안정성에 관한 연구의 역사와 흐름을 추적한 Langthejem과 Sugiyama<sup>(10)</sup>의 조사에 종동력을 받고 전체탄성기초 또는 부분탄성기초 위에 놓인 보의 동적안정성 연구들이 추가되어야 된다는 내용을 발표하였다.

본 연구의 목적은 종동력을 받고 부분 탄성기초위에 놓인 Timoshenko보에 대한 동적안정성을 회전관성 및 전단변형 파라미터의 변화, 집중질량 크기 및 회전관성의 변화 그리고 탄성기초 파라미터 값의 변화에 따라 연구하는데 있다.

## 2. 이 론

### 2.1 수학적 모델 및 운동방정식

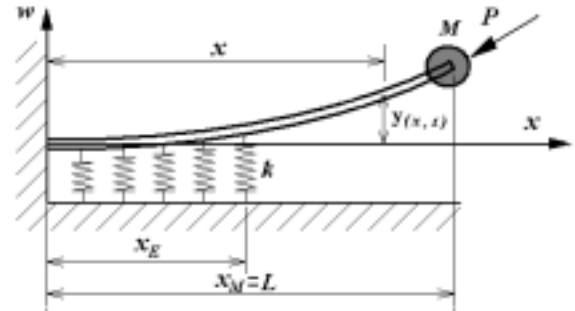


Fig. 1 Mathematical model of a cantilevered beam on partial elastic foundations subjected to follower force.

Fig. 1은 종동력  $P$ 를 받고 집중질량  $M$ 을 갖는 외팔보가 단위길이 당 스프링 상수  $k$ 를 갖는 부분 탄성기초위에 놓여있을 때의 수학적 모델을 나타낸다.

Fig. 1 모델에 대한 운동 지배방정식을 유도하기 위해 에너지 표현 식을 쓰면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A y_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \phi_t^2 dx + \frac{1}{2} M y_t^2(x_M, t) + \frac{1}{2} J \phi_t^2(x_M, t) \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E I \phi_x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L k' A G (y_x - \phi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{x_E} k y^2 dx \quad (2)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L P y_x^2 dx \quad (3)$$

$$\delta W_{nc} = -P \phi(L, t) \delta y(L, t) \quad (4)$$

식(1)-(4)에서  $T$ 는 운동에너지,  $V$ 는 보와 탄성기초에 의한 탄성 포텐셜에너지,  $W_c$ 는 종동력에

의한 보존일,  $\delta W_{nc}$ 는 중동력에 의한 비보존 가상일을 나타낸다. 한편,  $\rho$ 는 보의 밀도,  $y$ 는 횡방향 변위,  $\phi$ 는 굽힘기울기,  $k'$ 는 보의 전단계수,  $EI$ 는 보의 굽힘강성계수,  $L$ 은 보의 길이,  $J$ 는 집중질량 회전관성,  $A$ 는 단면적, 하첨자  $x$ 와  $t$ 는 각각 축방향 좌표와 시간에 대한 미분을 의미한다.

이제 식 (1)-(4)를 다음과 같은 확장된 해밀턴 원리

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W_c) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (5)$$

에 대입하면 다음과 같다

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L (\rho A y_{tt} \delta y + \rho I \phi_{tt} \delta \phi + EI \phi_x \delta \phi_x - P y_x \delta y_x \right. \\ & \quad + k' AG (y_x - \phi) \delta (y_x - \phi)) dx \\ & \quad + \int_0^{x_E} k y \delta y dx \Big] dt + \int_{t_1}^{t_2} \{ P \phi(L, t) \delta y(L, t) \\ & \quad + M y_{tt}(x_M, t) \delta y(x_M, t) \\ & \quad + J \phi_{tt}(x_M, t) \delta \phi(x_M, t) \} dt \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.2 유한요소법의 적용

식 (6)으로부터 이산화된 운동 지배방정식을 얻기 위해 유한 요소법을 적용하였으며 보를 균일 길이  $l$ 인  $N$ 개의 요소로 분할하고 다음과 같은 무차원 좌표들과 국부좌표들을 이용한다.

$$\begin{aligned} x' &= x - (i-1)l, & x'_M &= x_M - (b-1)l, & \xi_M &= \frac{x'_M}{l}, \\ x'_E &= x_E - (d-1)l, \\ \xi &= \frac{x'}{l}, & \xi_s &= \frac{x'_E}{l}, & \eta &= \frac{y}{l} \end{aligned} \quad (7)$$

식 (7)을 이용하여 식 (6)의 변분을 정리하고 이산화된 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^1 \rho A l^3 \eta_{tt}^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \frac{EI}{l} \phi_{\xi}^{(i)} \delta \phi_{\xi}^{(i)} - P \eta_{\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi}^{(i)} \right. \\ & \quad + \rho I l \phi_{tt}^{(i)} \delta \phi^{(i)} + k' A G l (\eta_{\xi}^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_{\xi}^{(i)} - \phi^{(i)}) \Big] d\xi \\ & \quad + \sum_{i=1}^d \left[ \int_0^{\xi_s} k l^3 \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} \right] d\xi + M l^2 \eta_{tt}^{(b)}(\xi_M, t) \delta \eta^{(b)}(\xi_M, t) \\ & \quad + J \phi_{tt}^{(b)}(\xi_M, t) \delta \phi^{(b)}(\xi_M, t) \\ & \quad + P \phi(1, t)^{(N)} \delta \eta(1, t)^{(N)} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

이제 식 (8)의 해  $\eta(\xi, t)$ ,  $\phi(\xi, t)$ 를

$$\eta(\xi, t) = \eta(\xi) e^{st}, \quad \phi(\xi, t) = \phi(\xi) e^{st} \quad (9)$$

로 가정하고 다음과 같은 무차원 파라미터들

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M}{\rho A L}, \quad \beta = \frac{J}{\rho A L^3}, \quad \mu = \frac{x_M}{L}, \quad K = \frac{k L^4}{EI}, \\ \sigma &= \frac{x_E}{L}, \quad Q = \frac{P L^2}{EI}, \quad \lambda^2 = \frac{\rho A L^4 s^2}{EI}, \quad R = \frac{I}{A L^2} \\ S &= \frac{k' A G L^2}{EI} \end{aligned} \quad (10)$$

을 도입하면 식 (8)은 최종적으로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left[ \int_0^1 \frac{\lambda^2}{N^4} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} + \eta_{\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi}^{(i)} - \frac{Q}{N^2} \eta_{\xi}^{(i)} \delta \eta_{\xi}^{(i)} d\xi \right. \\ & \quad + \frac{\lambda^2 R}{N^2} \phi^{(i)} \delta \phi^{(i)} + \frac{S}{N^2} (\eta_{\xi}^{(i)} - \phi^{(i)}) \delta (\eta_{\xi}^{(i)} - \phi^{(i)}) \Big] \\ & \quad + \sum_{i=1}^d \left[ \int_0^{\xi_s} \frac{K}{N^4} \eta^{(i)} \delta \eta^{(i)} d\xi \right] + \frac{\alpha \lambda^2}{N^3} \eta^{(b)}(\xi_M) \delta \eta^{(b)}(\xi_M) \\ & \quad + \frac{\beta \lambda^2}{N} \phi^{(b)}(\xi_M) \delta \phi^{(b)}(\xi_M) \\ & \quad + \frac{Q}{N^2} \phi^{(N)}(1) \delta \eta^{(N)}(1) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (10)의 무차원 파라미터들에 있어,  $\alpha$ 는 집중질량과 보 질량의 질량비를 나타내고,  $\beta$ 는 집중질량 회전관성 파라미터,  $\mu$ 는 무차원 집중질량 위치,  $K$ 는 탄성기초 파라미터,  $\sigma$ 는 무차원화된 부분 탄성기초 끝단 위치,  $Q$ 는 무차원 종동력,  $\lambda$ 는 무차원 고유진동수,  $R$ 과  $S$ 는 각각 보의 회전관성과 전단변형 파라미터를 의미한다.

### 3. 수치해석결과 및 검토

종동력을 받고, 부분 탄성기초위에 놓인 외팔 Timoshenko보의 동적안정성에 관한 수치 해를 얻기 위해, 유한요소해석을 수행하였으며, 수치해의 타당성 검토를 위해 전체가 탄성기초위에 놓인 Euler-Bernoulli 보에 대한 이전 연구 참고문헌(6)의 임계 종동력 값과 비교하였다.

비교 결과 근사한 일치( $Q/\pi^2=2.0315$ (참고문헌(6)),  $Q/\pi^2=2.0317$ (본 연구) : 0.0098%오차)를 보임으로서 수치해의 타당성을 검토하였다.

#### 3.1 부분 탄성기초의 영향

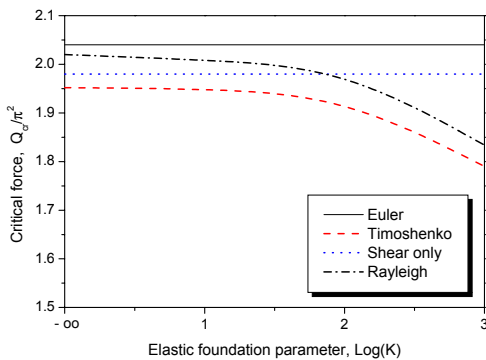


Fig. 2 Critical force depending on various types of beam

Fig. 2는 Euler-Bernoulli보, 전단변형만을 고려한 보, Rayleigh보, Timoshenko보가 전체 탄성기초를 갖는 경우에 있어, 탄성 기초파라미터의 변화에 대한 종동력 값을 보여주고 있다. 이 그림에서 알 수 있듯이 Euler-Bernoulli보는 탄성기초 파라미터의 변화(증가 또는 감소)에 대해 임계

종동력 값의 변화가 없음을 알 수 있고, 전단변형만을 고려한 보 또한 고정된 전단변형 파라미터 값에 대해 탄성 기초 파라미터 값의 변화가 임계 종동력 값에 미치는 영향은 없는 것으로 나타났다. 그러나 회전관성만을 고려한 Rayleigh보와 Timoshenko보의 경우에는 탄성기초 파라미터 값의 증가와 함께 임계 종동력 값이 감소함을 알 수 있다.

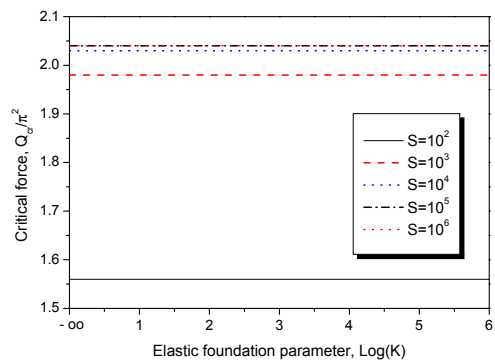


Fig. 3 Critical force depending on shear deformation parameters, S

Fig. 3은 보 전체가 탄성기초 되어 있는 경우, 보의 회전관성 파라미터를 고정( $R=0.0$ )시킨 상태에서 보의 전단변형 파라미터와 탄성기초 파라미터 값의 변화에 대해 임계 종동력 값을 나타낸 그림이다. 이 그림에서 알 수 있는 것은 전단변형 파라미터  $S$ 값이  $S \geq 10^4$ 에 대해서는 탄성기초 파라미터 값의 변화가 임계 종동력 값에 미치는 영향은 없음을 알 수 있다.

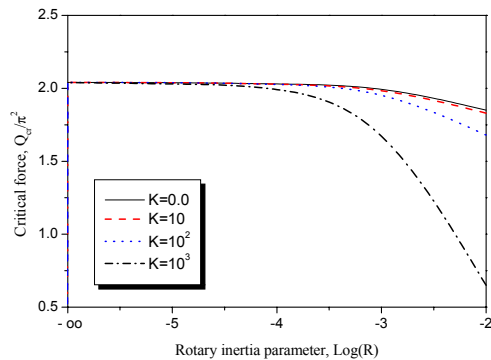


Fig. 4 Critical force depending on rotary inertia parameters, R

Fig. 4는 전체 탄성기초가 되어 있는 경우 보의 전단변형 파라미터 값을 고정( $S=10^6$ )시킨 상태에서 보의 회전관성 파라미터와 탄성기초 파라미터의 변화에 따른 임계 종동력 값을 보여준다. 그림에서 알 수 있듯이 회전관성 파라미터  $R$  값이  $R \leq 10^{-4}$ 에서 탄성기초 파라미터 값의 변화가 임계 종동력 값에 미치는 영향은 거의 없는 것으로 나타났다.

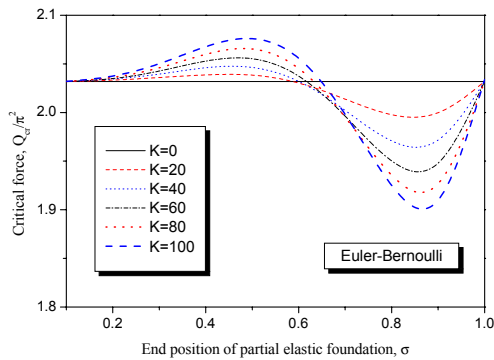


Fig. 5 Critical force depending on the partial elastic foundation parameter (Euler-Bernoulli beam)

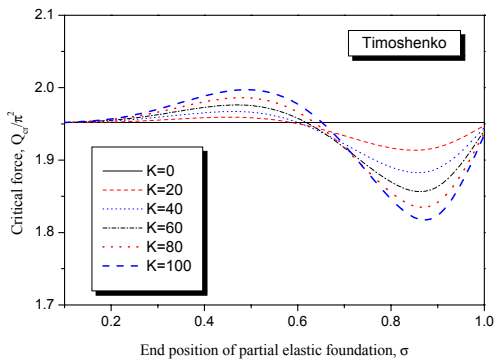


Fig. 6 Critical force depending on the partial elastic foundation parameter (Timoshenko beam)

Fig. 5와 Fig. 6은 보가 부분 탄성기초 되어 있는 경우, Euler-Bernoulli보와 Timoshenko보의 임계 종동력 값을 탄성기초 파라미터 값의 변화와 부분 탄성기초의 길이 변화에 따라 나타내 보인 그림들이다.

먼저 두 그림들 모두에 있어, 무차원화된 부분 탄성기초 끝단의 위치  $\sigma$ 가 보의 고정 단으로부터

자유단 쪽으로 증가될 때, 임계 종동력 값은 고정된 탄성기초 파라미터 값에 대해 증가했다가 감소되고 다시 증가되는 경향을 보였으며, 임계 종동력 값은 Timoshenko 보의 경우가 더 작게 나타남을 알 수 있었다. 또한, 고정된 탄성기초 파라미터 값에 대해 최대 임계 종동력 값을 나타내는 무차원 부분 탄성기초 끝단의 위치  $\sigma$ 는  $\sigma=0.5$  즉, 부분탄성기초가 보의 고정 단으로부터 보의 중간부분까지 되어있는 경우이다.

### 3.2 집중질량의 영향

Fig. 7과 8은 Timoshenko보가 전체 탄성기초 되어 있을 때, 집중질량의 크기만을 고려한 경우와 회전관성까지도 함께 고려된 경우, 탄성기초 파라미터 변화에 의한 임계 종동력 값을 보여준다.

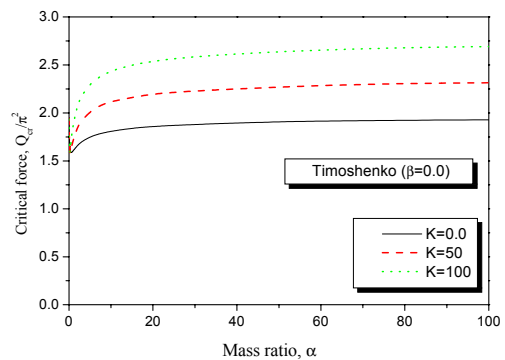


Fig. 7 Critical force depending on the mass ratio without rotary inertia of the tip mass

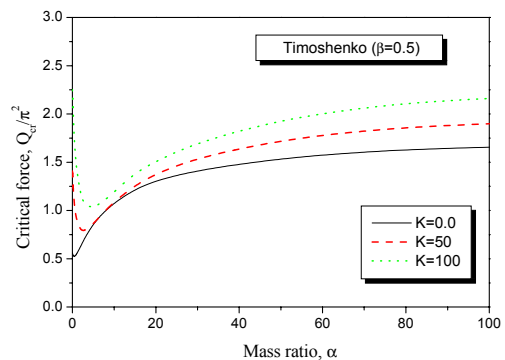


Fig. 8 Critical force depending on the mass ratio taking into account rotary inertia of the tip mass

먼저 Fig. 7의 집중질량의 크기만을 고려한 경우, 질량비  $\alpha$ 에 대해 탄성기초 파라미터의 증가와 함께 임계 종동력 값이 증가되지만 비교적 작은 질량비에 대해서는 반대의 경향을 나타내 보인다.

한편 Fig. 8의 회전관성을 고려한 경우는 질량비에 대해 탄성기초 파라미터 값의 증가와 함께 임계 종동력 값은 증가된다.

또한, 집중질량의 회전관성 고려는 동일 탄성기초 파라미터 값에 대해서도 임계 종동력 값의 큰 변화를 주게 된다.

#### 4. 결 론

종동력을 받고 부분 탄성기초위에 놓인 Timoshenko보의 동적 안전성에 관한 수치 해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 보의 전단변형은 탄성기초 파라미터의 변화에 대해 임계종동력 값의 변화에 영향을 주지 않지만, 보의 회전관성은 큰 영향을 미친다.

둘째, 부분 탄성기초의 끝단의 위치가 보의 고정 단으로부터 자유단 쪽으로 증가되어갈 때, 임계 종동력 값은 고정된 탄성기초 파라미터 값에 대해 증가했다가 감소되고 다시 증가되는 경향을 나타내었으며, 최대 임계 종동력 값을 나타내는 부분 탄성기초의 끝단 위치는 보의 중간부분이다.

셋째, 집중질량이 존재할 때, 집중질량의 크기만을 고려한 경우는 질량비  $\alpha$ 에 대해 탄성기초 파라미터의 증가와 함께 임계 종동력 값이 증가되지만 비교적 작은 질량비에 대해서는 반대의 경향을 나타내 보인다. 집중질량 회전관성까지도 고려한 경우는 질량비에 대해 탄성기초 파라미터 값의 증가와 함께 임계 종동력 값은 증가된다.

또한, 집중질량의 회전관성의 고려는 동일 탄성기초 파라미터 값에 대해서도 임계 종동력 값의 큰 변화를 주게 된다.

#### 참고문헌

(1) Smith, T. E. and Herrmann, G., 1972, "Stability of a Beam on an Elastic Foundation Subjected to

a Follower Force", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp.628~629.

(2) Sundarajan, C., 1974, "Stability of Columns on Elastic Foundations Subjected to Conservative and Non-conservative Forces", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 37, pp.79~85.

(3) Anderson, G. L., 1975, "The Influence of Rotary Inertia, Tip Mass, and Damping on the Stability of a Cantilever Beam on an Elastic Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 43, pp.543~552.

(4) Hauger, W. and Vetter, K. 1976, "Influence of an Elastic Foundation on the Stability of a Tangentially Loaded Column", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 47, pp.296~299.

(5) Sundararajan, C., 1976, "Influence of an Elastic End Support on the Vibration and Stability of Beck's Column", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 18, pp.239~241.

(6) Jacoby, A. and Elishakoff, I., 1986, "Discrete-continuous Elastic Foundation may leave the Flutter Load of the Pflüger Column Unaffected", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, pp.523~525.

(7) Elishakoff, I. and Wang, X., 1987, "Generalization of Smith-Herrmann Problem with the Aid of Computerized Symbolic Algebra", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 117, pp.537~542.

(8) Chen, L. W. and Ku, D. M., 1992, "Stability of Elastic Systems under Follower Forces", *AIAA Journal*, Vol. 30, pp.767~771.

(9) Maurizi, M. J. and Bambill, E. A., 2002, "An Additional Note on "Dynamic Stability of Columns Subjected to Follower Loads : A Survey"", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, pp.181~183.

(10) Langthjem, M. A. and Sugiyama, Y., 2000, "Dynamic Stability of Columns Subjected to Follower Loads : A Survey", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 238, pp.809~851.