구속된 다물체 시스템의 선형화에 관한 연구

배대성†·최진환*·김선철**

A Linearization Method for Constrained Mechanical Systems

Dae sung Bae, Jin hwan Choi, Sun chul Kim

Key Words: Vibration Analysis(진동해석), Natural Frequency(고유진동수), NullSpace(영공간)

Abstract

This research proposes an implementation method of linearized equations of motion for multibody systems with closed loops. The null space of the constraint Jacobian is first pre multiplied to the equations of motion to eliminate the Lagrange multiplier and the equations of motion are reduced down to a minimum set of ordinary differential equations. The resulting differential equations are functions of all relative coordinates, velocities, and accelerations. Since the coordinates, velocities, and accelerations are tightly coupled by the position, velocity, and acceleration level constraints, direct substitution of the relationships among these variables yields very complicated equations to be implemented. As a consequence, the reduced equations of motion are perturbed with respect to the variations of all coordinates, velocities, and accelerations, which are coupled by the constraints. The position, velocity and acceleration level constraints are also perturbed to obtain the relationships between the variations of all relative coordinates, velocities, and accelerations and variations of the independent ones. The perturbed constraint equations are then simultaneously solved for variations of all coordinates, velocities, and accelerations only in terms of the variations of the independent coordinates, velocities, and accelerations. Finally, the relationships between the variations of all coordinates, velocities, accelerations and these of the independent ones are substituted into the variational equations of motion to obtain the linearized equations of motion only in terms of the independent coordinate, velocity, and acceleration variations.

1. 서 론

선형화는 어떤 상태의 비선형 시스템의 동적 거동을 이해하는데 있어서 중요한 방법중의 하나이다. 예를 들면 선형화 된 운동방정식의 고유치들은 제어 로직을 개발하는데 있어서 매우 유용한 자료가 된다.

구속조건이 있는 폐회로 시스템은 운동방정식에 대수방정식이 포함되어 있어 상미분방정식으로만 이루어진 개회로 시스템보다 선형화하기가 매우 어렵다. 본 연구는 구속된 기계 시스템들에 대한 선형화 방법을 제안하였고 다른 방법의 결과와 비교 검증하였다. Sohoni(1) 는 비선형방정식으로부터 선형화 된 동역학 모델을 만들 수 있는 연구방법을 제안했다. 라그랑지승수 부분은 선형화 된 운동방정식에서 그대로 남아있었으며 속도와 가속도 구속 조건들은 선형화 된 운동방정식에서 고려되지 않았다. Neuman은 라그랑지-오일러 공식을 이용해서 동적거동 해석을 위한 로봇 모델을 생성하였고 정해진 경로를 따라가는 로봇모델을 선형화했다.(2)

Balafoutis은 정해진 경로를 따라가는 선형화

†책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학과
E-mail: dsbae@hanyang.ac.kr
TEL : (031)400-5250 FAX : (031)406-5550
* 경희대학교 기계공학과
** 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

된 로봇모델의 순차적인 계산을 위한 방법을 제안했다.(3) 그런데 그 방법은 구속되지 않은 시스템인 로봇시스템에 적용되었다. Gontier(4)는 구속되지 않은 시스템의 선형화 방법을 일반화하였다. 유사한 공식들이 변분을 이용해서 유도되어졌다.(5,6) Bae는 상대좌표를 이용한 순차적 공식을 소개하였다.(7) 운동방정식은 속도변환법을 사용하여 간단한 행렬형태로 유도되며 실제 계산은 각각의 조인트들에 대해 개발된 순차공식을 사용하여 수행되었다. 이 순차공식을 이용하여 차량 실시간 해석(8)을 수행하였고 유연체를 가진 구속된 기계시스템의 동적거동해석(9)과 궤도차량의 동적거동해석(10)에 사용되어 졌으며 형상설계를 위한 민감도 해석에도 응용되었다.(11) 또한 편속도 행렬을 이용하여 구속된 다물체계의 정적평형 해석 및 선형 진동 해석(12)을 수행하였으며, 기구학적 조인트에서 마찰력을 고려하여 역동역학 해석(13)을 수행하였다. Yoo와 Bae는 케인 방법을 이용하여 구속된 다물체계의 동역학 해석도 가능하게 하였다.(14)

다물체시스템의 운동방정식은 상대좌표, 속도, 가속도에 대해 비선형성을 가진다. 운동방정식을 선형화 하기 위해 변분을 취하는데 그 운동방정식을 구성하는 각각의 변수들은 서로 비선형적인 연성을 가지기 때문에 그 변분 형태는 많은 대수 방정식을 포함하게 된다. 어떤 구속도 가지지 않은 개회로 시스템의 운동방정식은 상대좌표, 속도, 가속도에 대한 상미분방정식으로 구성되며 그것을 선형화 하기 위해 몇 가지 방법들이 소개되어졌다.(2,3,4) 하지만 구속조건을 가지고 있는 폐회로 시스템의 경우 그런 방법들은 라그랑지승수와 구속조건들 때문에 직접적으로 사용될 수가 없다.

구속조건이 있는 시스템을 선형화 하기위한 가장 직관적인 방법중의 하나는 운동방정식을 상대좌표, 속도, 가속도만의 형태로 나타내는 것이다. 그리고 상대 좌표들은 다시 독립좌표와 종속좌표들로 나눠지며 운동방정식과 구속조건들은 종속좌표와 그 속도, 가속도 그리고 독립좌표와 그 속도, 가속도들의 형태로 표현되어야 한다. 위치, 속도, 가속도 구속조건들로부터 독립좌표들과 종속좌표들간의 관계식을 이끌어 낼 수 있다.

자코비안의 영공간은 라그랑지승수를 제거하기 위해서 운동방정식의 앞에 곱하게 된다. 그러면

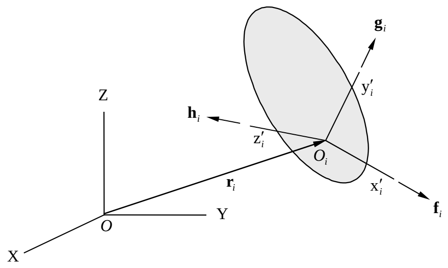

Fig. 1 Kinematic relationships of a rigid body

그 운동방정식은 최소한의 상미분방정식이 된다. 여기서 그 결과로 얻은 미분방정식은 모든 상대좌표, 속도, 가속도의 함수가 된다. 따라서 운동방정식이 독립좌표와 그 속도, 가속도만의 함수로 표현하기 위해서 위치, 속도, 가속도 구속조건을 변분하게 된다. 이 변분을 통해서 독립좌표와 종속좌표사이의 매우 복잡한 변환행렬을 얻게 되는데 이것이 운동방정식의 변분 형태에 들어가 결과적으로 독립좌표만으로 이루어진 운동방정식을 유도하게된다. 제안된 방법은 상용프로그램인 리커다인(15)에 구현되었으며 4-Bar메커니즘의 진동분석을 통해 제안된 방법을 검증하였다.

2. 상대좌표계에서의 기구학

Fig. 1 은 강체에 고정되어 있는 좌표계의 기구학적 관계를 보여준다. $x_i' - y_i' - z_i'$ 좌표계는 강체좌표계이고 $X - Y - Z$ 좌표계는 기준관성좌표계이다. O 는 기준관성좌표계의 원점이고 O_i 는 강체 좌표계의 원점이며 r_i 는 관성 좌표계에서 본 강체 중심까지의 거리벡터이다. f_i, g_i, h_i 는 $x_i' - y_i' - z_i'$ 의 각 축에 대한 단위벡터라고 정의하면 강체에 대한 자세행렬은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$A_i = [f_i \quad g_i \quad h_i] \qquad (1)$$

기준 관성 좌표계에서 O_i 점에서의 속도와 가

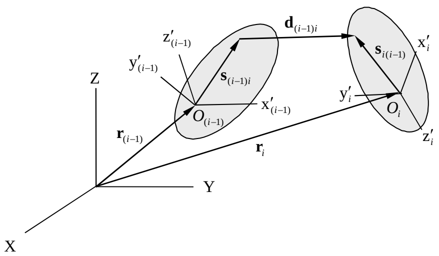

Fig. 2 Kinematic relationship between two adjacent rigid bodies

상변위를 표현하면 다음과 같다.(4,5)

$$Y_i = \begin{bmatrix} \dot{r}_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\delta Z = \begin{bmatrix} \delta r_i \\ \delta \pi_i \end{bmatrix} \tag{3}$$

강체 좌표계에서 정의된 속도와 가상변위는 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$Y_i{}' = \begin{bmatrix} \dot{r}'_i \\ \omega'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i^T \dot{r}_i \\ A_i^T \omega_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\delta Z' = \begin{bmatrix} \delta r'_i \\ \delta \pi'_i \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_i{}^T \delta r_i \\ A_i{}^T \delta \pi_i \end{bmatrix} \tag{5}$$

Fig. 2 는 두개의 연속한 강체들의 기구학적 관계를 보여준다. 강체 $i-1$ 는 강체 i 의 내향물체(inboard body)로 가정하면 O_i 의 위치는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_i = r_{(i-1)} + s_{(i-1)i} + d_{(i-1)i} - s_{i(i-1)} \tag{6}$$

또한 강체 i 의 좌표계에서 본 가상 각 변위는 다음과 같다.

$$\delta \pi'_i = A^T_{(i-1)i} \delta \pi'_{(i-1)} + A^T_{(i-1)i} H'_{(i-1)i} \delta q_{(i-1)i} \tag{7}$$

여기서 $H'_{(i-1)i}$ 회전축에 의해 정의되었고 $A_{(i-1)i}$ 는 다음과 같다.

$$A_{(i-1)i} = A^T_{(i-1)} A_i \tag{8}$$

식 (6)을 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta r'_i = {} & A^T_{(i-1)i} \delta r'_{(i-1)} \\ & - A^T_{(i-1)i} \tilde{r}'_{(i-1)i} + \tilde{d}'_{(i-1)i} \delta \pi'_{(i-1)} \\ & + A^T_{(i-1)i} A_{(i-1)i} \tilde{s}'_{i(i-1)} A^T_{(i-1)i} \delta \pi'_{(i-1)} \\ & + A^T_{(i-1)i} (d'_{(i-1)i})_{q_{(i-1)i}} \delta q_{(i-1)i} \\ & + A^T_{(i-1)i} A_{(i-1)i} \tilde{s}'_{i(i-1)} A^T_{(i-1)i} H'_{(i-1)i} \delta q_{(i-1)i} \end{aligned} \tag{9}$$

여기서 ~는 벡터곱연산을 실행하여 벡터요소로 구성되어진 반대칭행렬을 의미하며 $q_{(i-1)i}$ 는 상대좌표벡터를 의미한다. 식 (7)과 식 (9)를 조합하여 두 연속한 강체의 가상변위방정식을 세우면 다음과 같다

$$\delta Z'_i = B_{(i-1)i1} \delta Z'_{(i-1)} + B_{(i-1)i2} \delta q_{(i-1)i} \tag{10}$$

여기서

$$B_{(i-1)i1} = \begin{bmatrix} A^T_{(i-1)i} & 0 \\ 0 & A^T_{(i-1)i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -(\tilde{s}'_{(i-1)i} + \tilde{d}'_{(i-1)i} - A_{i(i-1)} \tilde{s}'_{(i-1)i} A^T_{(i-1)i}) \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$B_{(i-1)i2} = \begin{bmatrix} A^T_{(i-1)i} & 0 \\ 0 & A^T_{(i-1)i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (d'_{(i-1)i})_{q(i-1)i} + A_{(i-1)i} \tilde{s}'_{i(i-1)} A^T_{(i-1)i} H'_{(i-1)i}) \\ H'_{(i-1)i} \end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서 중요한 것은 행렬 $B_{(i-1)i1}$ 와 $B_{(i-1)i2}$ 는 단지 강체 i-1과 강체 i사이에 연결된 조인트의 상대좌표에 의한 함수로 이루어져 있다는 것이다. 결론적으로 보면 행렬 $B_{(I-1)I1}$ 와 $B_{(I-1)I2}$ 는 $q_{(i-1)i}$ 만의 함수라는 것을 의미한다. 식 (10)을 반복적으로 적용함으로써 전체시스템이 절대좌표에 대한 가상변위를 상대좌표로 표현할 수 있다.

$$\delta Z' = B\delta q \tag{13}$$

여기서 B는 절대좌표와 상대좌표간의 좌표변환행렬이다. 절대좌표의 속도 Y와 상대좌표의 속도 $\dot{q}$ 관계도 같은 방법으로 유도될 수 있다.

$$Y' = B\dot{q} \tag{14}$$

3. 운동방정식

구속메커니즘의 뉴턴-오일러 운동방정식의 변분형은 다음과 같다.

$$\delta Z'^{T}(M\dot{Y}' + \Phi_z^T\lambda - Q) = 0 \tag{15}$$

여기서 M과 Q는 각각 절대좌표계에서의 질량행렬과 외력을 나타낸다. δZ은 기구학적으로 절단조인트(16)를 제외한 모든 조인트에 허용된다. 방정식에서 Φ와 λ는 각각 구속방정식과 라그랑지승수를 나타낸다.

식 (13)과 $\dot{Y} = B\ddot{q} + \dot{B}\dot{q}$를 식 (15)에 적용시키면 다음과 같다.(5)

$$F = M^*\ddot{q} + \Phi_q^T\lambda - Q^* = 0 \quad F \in R^n \tag{16}$$

여기서 M^*은 질량행렬이고 Q^*는 외력으로 정의된다.

$$M^* = B^TMB \tag{17}$$

$$Q^* = B^T(Q - M\dot{B}\dot{q}) \tag{18}$$

$$\delta q = N\delta q_I \tag{19}$$

여기서

$$N = \begin{bmatrix} -\Phi_{qD}^{-1}\Phi_{qI} \\ I \end{bmatrix} \tag{20}$$

결과적으로 식(16)의 앞에 영공간(null space) N^T를 곱하면 다음과 같다.

$$F^* = N^TM^*\ddot{q} - N^TQ^* = 0 \tag{21}$$

식(21)와 위치, 속도, 가속도 구속조건에 대한 변분을 취하면 다음과 같다

$$\begin{bmatrix} \Phi_q & 0 & 0 \\ \dot{\Phi}_q & \Phi_q & 0 \\ \ddot{\Phi}_q & 2\dot{\Phi}_q & \Phi_q \\ & I & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta q \\ \delta\dot{q} \\ \delta\ddot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & I & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta q_I \\ \delta\dot{q}_I \\ \delta\ddot{q}_I \end{Bmatrix} \tag{22}$$

식 (22)는 $(\delta q_I, \delta\dot{q}_I, \delta\ddot{q}_I)^T$에 대해서 풀리게 -되고 운동방정식은 선형방정식으로 바뀌게 된다. 선형화 된 운동방정식은 단지 독립좌표, 속도, 가속도의 변분에 대해 만족하게 된다.

$$\begin{bmatrix} F_q^* & F_{\dot{q}}^* & F_{\ddot{q}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_q & 0 & 0 \\ \dot{\Phi}_q & \Phi_q & 0 \\ \ddot{\Phi}_q & 2\dot{\Phi}_q & \Phi_q \\ & I & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & I & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta q_I \\ \delta\dot{q}_I \\ \delta\ddot{q}_I \end{Bmatrix} = 0 \tag{23}$$

식 (23)와 다음 선형화 된 운동방정식을 비교하면 $\hat{M}$, $\hat{C}$, $\hat{K}$ 행렬을 계산할 수 있다.

$$\delta F^*|_{q^*} = \hat{M}\delta\ddot{q}_I + \hat{C}\delta\dot{q}_I + \hat{K}\delta q_I = 0 \tag{24}$$

4. 수치예제

Fig. 3 은 스프링이 있는 4-Bar메커니즘을 보여준다. 이 시스템은 4개의 회전조인트와 한 개의 스프링으로 구성되어 있고 각 물성치는 Table 1에 정의하였다. 3개의 회전조인트에 일반좌표 θ_1, θ_2, θ_3 를 정의하였고 남아있는 한 개의 조인트는 절단조인트로 정의된다. 구속방정식은 절단조인트로부터 얻어진다.

이때 이 시스템은 1자유도를 가지게 되며 이때 독립좌표는 θ_1이 된다. θ_1이 0일때 θ_2와 θ_3는 구속조건으로부터 각각 0, 0의 결과를 얻을 수 있

으며, 이러한 nominal configuration에서 선형화 되었다.

이 메커니즘의 동역학해석은 시간영역의 응답을 얻기위해 수행되었다. 시간응답에 대한 FFT는 지배적인 주파수영역의 응답을 추출하기 위해 수행되었다.

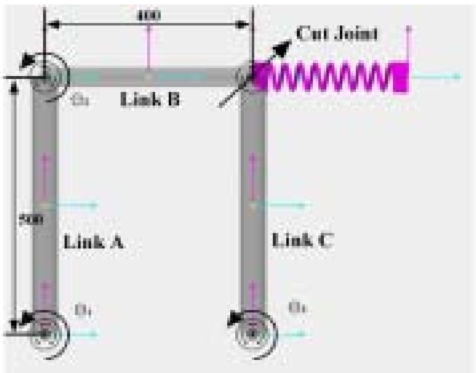

Fig. 3 4-bar mechanism with spring

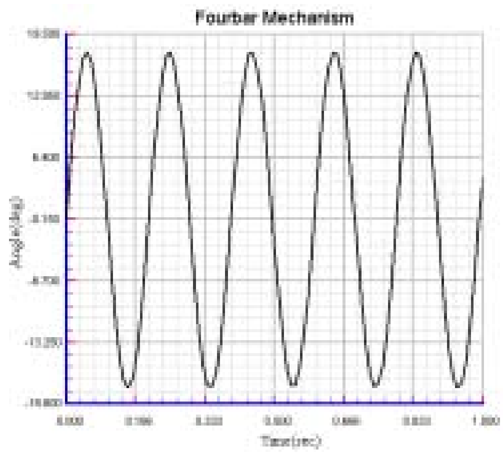

Fig. 4 Rotational angle of link C in time domain

Fig. 4와 **5**는 링크C의 회전력에 대해 시간과 그 주파수의 응답을 보여준다.

제안된 선형화 방법이 이 시스템에 적용되었다. 주파수(5.04Hz)는 제안된 방법으로부터 얻어지고 시간영역의 응답의 FFT분석으로 얻어진 주파수(5.045Hz)와 매우 밀접함을 보여준다.

5. 결론

본 논문은 구속된 다물체시스템의 비선형 운동방정식에 대해 상대좌표를 적용하고 새로운 선형화방법이 제안하였다. 구속조건들의 자코비안의 영공간은 운동방정식에서 라그랑지승수를 제거하기 위해 그 운동방정식에 곱해졌다. 그 결과 운동방정식의 수는 최소화 되었고 모든 상대좌표와 그것들의 속도, 가속도의 함수로 표현되어졌다. 위치, 속도, 가속도 구속조건들의 변분형태로부터 종속좌표와 독립좌표사이의 변환식을 유도하였다. 이 변환식은 운동방정식의 변분시에 적용하여 q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ 의 함수인 그 운동방정식을 q_I, $\dot{q}_I$, $\ddot{q}_I$ 만의 운동방정식으로 변환시킨다. 마지막으로 얻은 운동방정식을 이용해서 선형화 해석을 수행하였고 간단한 폐회로시스템을 이용해서 본 논문의 선형화 방법을 검증하였다.

Table 1 Material properties of link and spring

		Mass (kg)	Inertia Moment (kg*mm^2)
Body	Link A	7.707	161760.83
	Link B	3.946	53005.79
	Link C	7.707	161760.83
Spring		Stiffness (N/mm)	Damping (N*sec/mm)
		10.0	0.0

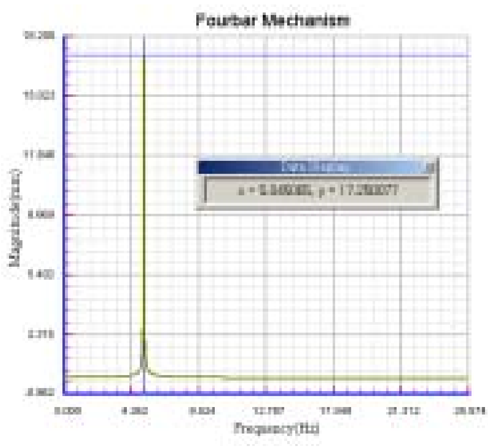

Fig. 5 Frequency response of rotational angle of link C

참고문헌

(1)Sohoni, V.N., Whitesel, J., 1986, "Automatic Linearization of Constrained Dynamical Models," ASME. Journal of Mechanism, Transmission, and Automation in Design, Vol. 108, pp. 300~304.

(2)Neuman, C.P., Murray, J.J., 1984, "Linearization and Sensitivity Functions of Dynamic Robot Models," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-14, No. 6, pp. 805~818.

(3)Balafoutis, C.A., Misra, P., Patel, R.V., 1986, "Recursive Evaluation of Linearized Dynamic Robot Models," IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-2, No. 3, pp. 146~155.

(4) Gontier, C., Li, Y., 1995, "Lagrangian Formulation and Linearization of Multibody System Equations," Computers & Structures, Vol. 57. No. 2, pp. 317~331.

(5) Bae, D. S., Haug, E.J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part I, Open Loop Systems," Mech. Struct. and Machines, Vol. 15, No. 3, pp. 359~382.

(6) Bae, D.S., Haug EJ, 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II, Closed Loop Systems," Mech. Struct. and Machines, Vol. 15, No. 4, pp. 481~506.

(7) Bae, D.S., Han, J.M., Yoo, H.H., 1999, "A Generalized Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics," Mech. Struct. & Mach., Vol. 27(3), pp. 293~315.

(8) Bae, D.S., Lee, J.K., Cho, H.J., Yae, H., 2000, "An Explicit Integration Method for Realtime Simulation of Multibody Vehicle Models," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 187, pp. 337~350.

(9) Bae, D.S., Han, J.M., Choi, J.H., Yang, S.M., 2001, "A Generalized Recursive Formulation for Constrained Flexible Multibody Dynamics," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 50, pp. 1841~1859.

(10) Ryu, H.S., Bae, D.S., Choi, J.H., Shabana AA, 2000, "A Compliant Track Link Model for High-speed, High-mobility Tracked Vehicles," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48, pp. 1481~1502.

(11) Kim, H.W., Bae, D.S., Choi, K.K., 2001, "Configuration Design Sensitivity Analysis of Dynamics for Constrained Mechanical Systems," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, pp. 5271~5282.

(12) Kim, J.I., Park, J.H., Yoo, H.H., Bae, D.S., 1999, "Static Equilibrium and Linear Vibration Analysis of Constrained Multibody Systems," Journal of KSME A, 23, 5, pp. 871~880.

(13) Park, J.H., Yoo, H.H., Hwang, Y.H., Bae, D.S., 2000, "Inverse Dynamics Analysis of Constrained Multibody Systems Considering Friction Forces on Kinematic Joints," Journal of KSME A, 24, 8, pp. 2050~2058.

(14) Yoo, H.H., Park, J.H., Hwang, Y.H., Bae, D.S., 1997, "Dynamics Analysis of Constrained Multibody Systems using Kane's Method," Journal of KSME A, 21, 12, pp. 2156~2164.

(15) RecurDyn User's Manual, FBK, Seoul, Korea..

(16) Wittenburg J, 1997, "Dynamics of Systems of Rigid Bodies, "B.G.Teubner Stuttgart