

균열 유한 요소법

조영삼[†] · 전석기^{*} · 임세영^{*}

Finite 'crack' element method

Young-Sam Cho, Sukky Jun, and Seyoung Im

Key Words : Crack propagation(균열 진전), Finite crack element(균열 유한 요소), Moving least-square approximation(이동 최소 제곱 근사)

Abstract

We propose a 2D 'crack' element for the simulation of propagating crack with minimal remeshing. A regular finite element containing the crack tip is replaced with this novel crack element, while the elements which the crack has passed are split into two transition elements. Singular elements can easily be implemented into this crack element to represent the crack-tip singularity without enrichment. Both crack element and transition element proposed in our formulation are mapped from corresponding master elements which are commonly built using the moving least-square (MLS) approximation only in the natural coordinate. In numerical examples, the accuracy of stress intensity factor K_I is demonstrated and the crack propagation in a plate is simulated.

1. 서 론

유한요소법은 여러가지 장점들에도 불구하고, 연속적인 요소망의 재구성이 필요한 이유로 균열 진전과 같은 문제에 어려움을 겪고 있다. 이러한 요소망 재구성의 어려움을 극복하기 위해 인리치드 무요소법(enriched meshfree method)이 개발되어 균열진전 문제에 적용되었다. 이러한 방법은 함수근사에 있어 요소망을 사용하지 않으므로, 불연속면의 이동, 특히 균열진전과 같은 문제에 장점을 가지게 된다. 그러나 무요소법은 균열선단에서 나타나는 해의 특이성을 정확히 표현하기 위해서 그 해를 표현하는 기저의 추가가 필요하며, 균열이 진전함에 따라 함수를 다시 만들어야 하므로, 이것은 엄청난 양의 계산시간을 요구하는 방법이다. 최근에 제안된 확장 유한요소법(XFEM, extended finite element method)^{(1),(2)}은 유한요소법에 기반을 두면서도 불구하고, 요소망의 재구성이 필요없는 방법이다. 불연속을 표현하기

위해 확장 유한요소법은 균열선단의 기저 부유화(the enrichment of basis)와 균열면을 포함하는 요소들의 형상함수의 수정이 필요하다. 그러므로, 이 또한 균열이 진전함에 따라 형상 함수들의 새로운 계산들이 필요하게 된다. 본 연구에서는 새로운 균열 유한요소를 제안하여, 균열을 포함하는 요소는 균열 유한요소로 표현하고, 균열이 지나간 요소는 불연속성을 표현하기 위한 형상함수의 수정 대신에, 두개 또는 그 이상의 변이요소(transition element)로 교체한다. 이것은 균열면이 자연스럽게 하중자유(traction-free) 경계조건을 만족하여, 유한요소법의 전형적인 수식화를 그대로 적용할 수 있다. 게다가 본 연구에서 제안한 방법은 균열 유한요소 자체가 특이요소(singular element)의 특성을 가지고 있어서 변위장의 특이성을 표현하기 위해 기저의 부유화를 거치지 않아도 된다. 이것은 모든 형상함수들이 마스터 요소에서 실제 요소로 사상(mapping)되어 사용될 수 있다는 것을 의미하며, 이것은 계산시간의 절약을 의미한다. 본 연구에서는 균열요소와 변이요소의 마스터 요소들을 최소 이동제곱 근사를 이용하여 만들었다. 이것은 최소 이동제곱 근사를 자연좌표계에서 적용하였다는 말로, 실제 좌표계에서 적용하는 일반적인 무요소법이나 확장 유한요소법과는 엄격히 구분 되어진다. 다시 말

[†] KAIST 기계공학과 박사과정
E-mail : yscho@imhp.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3068 FAX : (042)869-3095

^{*} KAIST 기계공학과

해, 본 연구에서 사용되는 최소 이동제곱 근사는 마스터 요소를 만들때만 사용되고, 실제 요소에 적용될때는 전형적인 유한요소처럼 사상을 사용한다. 또한 본 연구의 방법은 경계요소가 사용되지 않고, 균열선단에서 적응적 요소망 구성이 없다는 점에서 최근에 발표된 경계면 요소법(IEM, interface element method)⁽³⁾을 이용한 균열진전 해석과도 구별된다. 그러므로, 본 연구는 지금까지 보고된 균열진전 해석기법들보다 매우 효율적이라 말할 수 있다. 본 연구는 다음과 같이 구성된다. 제 2 장은 변이요소와 균열요소의 구성방법과 균열진전 알고리즘에 대하여 설명하고, 제 3 장에서는 균열요소를 사용하여 얻은 mode I 균열의 응력 집중 계수 계산 결과와 임의의 하중 조건에서 선형재료의 균열 진전 해석결과를 보인다. 제 4 장에서는 본 연구의 결론을 말한다.

2. 균열요소와 변이요소

본 연구에서 사용하는 변이요소와 균열요소는 자연좌표계에서 최소이동제곱근사를 이용하여 만들어진다. 이렇게 만들어진 변이요소와 균열요소는 전형적인 유한요소와 마찬가지로, 적분점에서의 형상함수 값과 그 미분값만을 이용하여 실제 좌표계로 사상하여 사용된다. 본 연구에서 사용되는 변이요소는 2 차 9 절점요소를 바탕으로 한 변이 절점들이 추가되는 경우, 요소간의 적합성과 연속성을 만족하도록 만들어진다. 그림. 1 과 같이 요소의 한 변에 절점이 2 개 추가 되는 경우, 다음과 같이 적을 수 있고, 그림. 2 와 같이 표현되는 가중함수를 사용하여 이동 최소제곱 근사를 하면, 그림. 3 와 같은 형상함수들이 만들어진다. 이 형상함수들은 요소 경계에서 요소간의 적합성과 연속성을 만족시키는 모양을 갖게 된다.

$$\begin{aligned}
 w_1 &= W(\xi_1, \xi_2, \xi)W(\eta_1, \eta_{10}, \eta) \\
 w_2 &= W(\xi_2, \xi_1, \xi)W(\eta_2, \eta_3, \eta) \\
 w_3 &= W(\xi_3, \xi_4, \xi)W(\eta_3, \eta_2, \eta) \\
 w_4 &= W(\xi_4, \xi_3, \xi)W(\eta_4, \eta_{10}, \eta) \\
 w_5 &= W(\xi_5, \xi_2, \xi)W(\eta_5, \eta_7, \eta) \\
 w_6 &= W(\xi_6, \xi_{10}, \xi)W(\eta_6, \eta_2, \eta) \\
 w_7 &= W(\xi_7, \xi_3, \xi)W(\eta_7, \eta_5, \eta) \\
 w_8 &= W(\xi_8, \xi_1, \xi)W(\eta_8, \eta_1, \eta) \\
 w_9 &= W(\xi_9, \xi_2, \xi)W(\eta_9, \eta_4, \eta) \\
 w_{10} &= W(\xi_{10}, \xi_2, \xi)W(\eta_{10}, \eta_4, \eta) \\
 w_{11} &= W(\xi_{11}, \xi_2, \xi)W(\eta_{11}, \eta_1, \eta)
 \end{aligned}$$

이 때, $W(\xi_s, \xi_e, \xi)$ 는 $1 - 6D^2 + 8D^3 - 3D^4$ 이고, $D = \|\xi - \xi_e\| / \|\xi_s - \xi_e\|$ 이다. 위의 가중함수를 사용하여 형상함수를 구할 때, 이동 최소제곱 근사에 사용하는 기저는 $\mathbf{p} = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy]$ 이다.

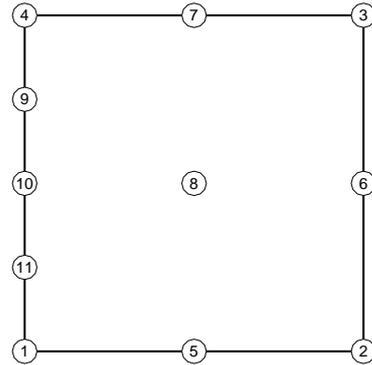


Fig. 1 A transition element with (9+2) nodes.

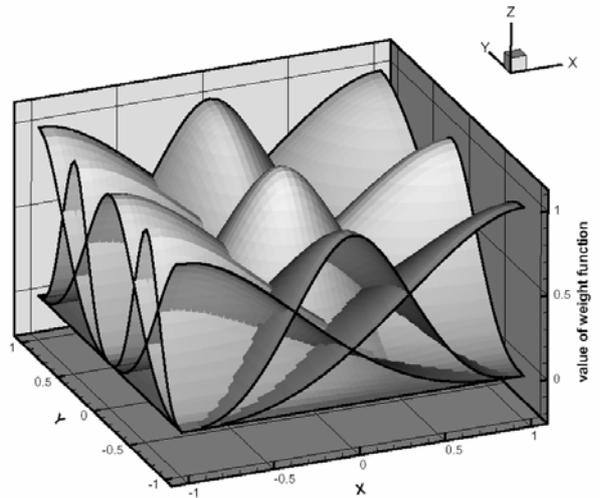


Fig. 2 Weight functions used for the transition element with (9+2) nodes.

마찬가지로, 그림. 1 보다 절점이 2 개 더 추가되는 경우는 그림. 4 와 같고, 이 경우, 다음과 같이 적을 수 있고, 그림. 5 와 같이 표현되는 가중함수를 사용하면, 그림. 6 과 같은 형상함수들은 만들 수 있다.

$$\begin{aligned}
 w_1 &= W(\xi_1, \xi_2, \xi)W(\eta_1, \eta_{12}, \eta) \\
 w_2 &= W(\xi_2, \xi_1, \xi)W(\eta_2, \eta_3, \eta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_3 &= W(\xi_3, \xi_4, \xi)W(\eta_3, \eta_2, \eta) \\
 w_4 &= W(\xi_4, \xi_3, \xi)W(\eta_4, \eta_{10}, \eta) \\
 w_5 &= W(\xi_5, \xi_2, \xi)W(\eta_5, \eta_7, \eta) \\
 w_6 &= W(\xi_6, \xi_{10}, \xi)W(\eta_6, \eta_2, \eta) \\
 w_7 &= W(\xi_7, \xi_3, \xi)W(\eta_7, \eta_5, \eta) \\
 w_8 &= W(\xi_8, \xi_1, \xi)W(\eta_8, \eta_1, \eta) \\
 w_9 &= W(\xi_9, \xi_2, \xi)W(\eta_9, \eta_4, \eta) \\
 w_{10} &= W(\xi_{10}, \xi_2, \xi)W(\eta_{10}, \eta_4, \eta) \\
 w_{11} &= W(\xi_{11}, \xi_2, \xi)W(\eta_{11}, \eta_{10}, \eta) \\
 w_{12} &= W(\xi_{12}, \xi_2, \xi)W(\eta_{12}, \eta_{10}, \eta) \\
 w_{13} &= W(\xi_{13}, \xi_2, \xi)W(\eta_{13}, \eta_1, \eta)
 \end{aligned}$$

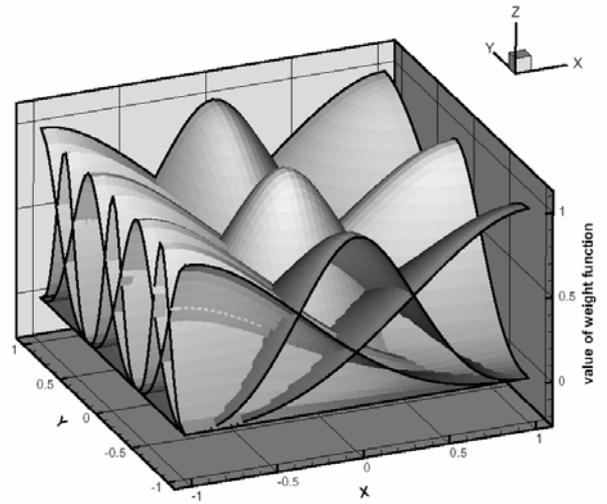


Fig. 5 Weight functions used for the transition element with (9+4) nodes.

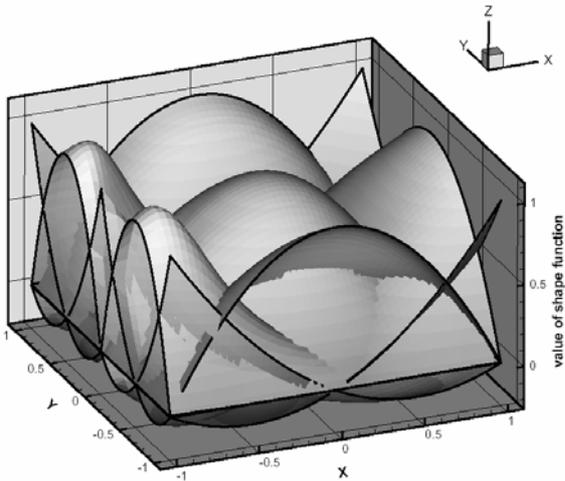


Fig. 3 Shape functions for the transition element with (9+2) nodes.

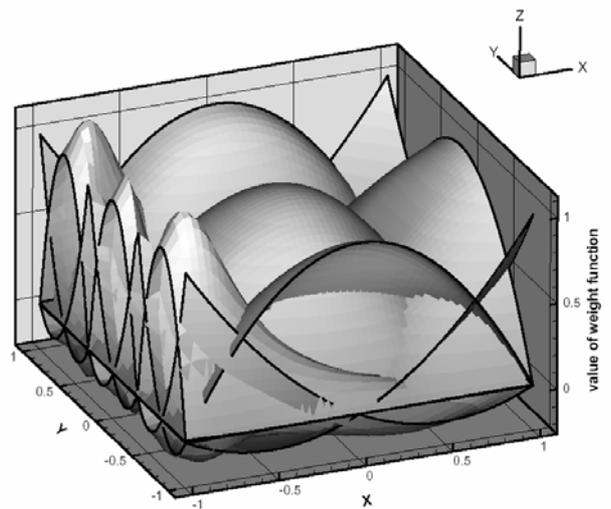


Fig. 6 Shape functions for the transition element with (9+4) nodes.

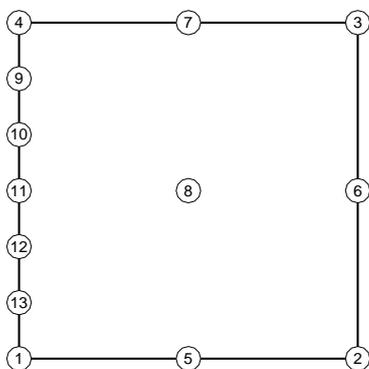


Fig. 4 A transition element with (9+4) nodes.

본 연구에서 사용한 균열요소는 그림. 7 과 같이 한 변에서 균열이 시작되어 요소의 중앙에 균열 선단을 갖는 모양이며, 균열선단 오른쪽의 5 개의 절점들은 특이요소의 특성을 갖도록 실제 영역에 사상할 때, 1/4 지점으로 사상하여 사용한다. 사용되어지는 가중함수는 그림. 8 과 같이 표현된다. 이 가중함수를 이용하여 구한 형상함수는 그림. 9 와 같고 이것은 변이요소와 마찬가지로 요소간의 연속성과 적합성을 만족하는 요소이다. 균열요소 또한 변이요소와 마찬가지로 절점이 추가된 경우는 그림. 10 과 같이 정의하여 형상함수를 구한다.

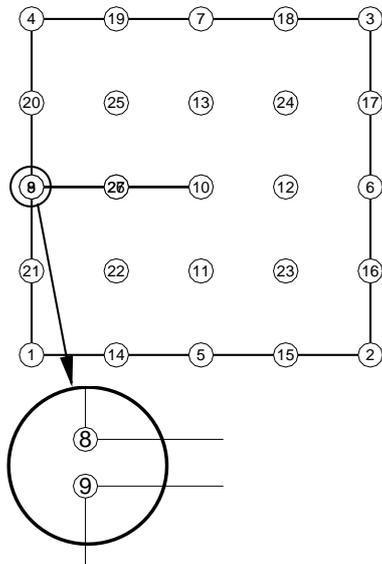


Fig. 7 A crack element with (23+4) nodes

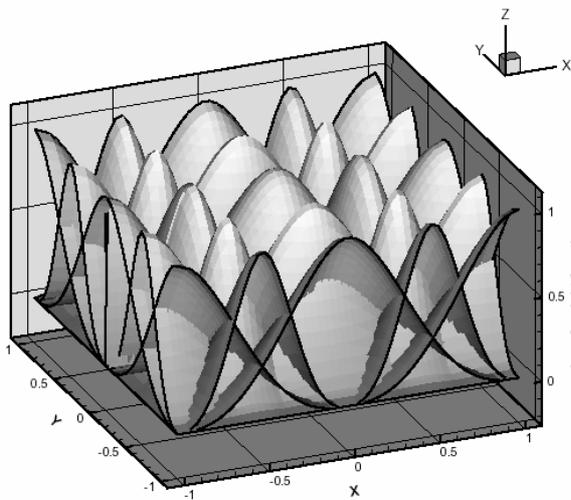


Fig. 8 Weight functions used for the crack element with (23+4) nodes.

3. 결과

그림. 11 과 같은 edge-crack plate 의 경우, 균열 을 10 개의 step 으로 진전시키며 응력 집중 계수, K_I 을 계산하여 정해⁽⁴⁾와 비교하였다. 모델은 균 열요소 를 포함하여 861 개의 요소이다. 그림. 12 는 step 1, 6, 10 에서의 y 방향 응력 contour 이다. 그림. 13 은 정해의 응력 집중 계수와 영역 보존적분을 이용한 계산된 응력 집중 계수의 비교 그래프이다. 각각 균열 선단에서 균열과 평행 또는 직각인 방

향으로 요소의 2 배 크기에서 4 배 크기의 영역을 정해 보존적분을 행하였다. 그림. 14 의 double cantilever beam 의 경우, 균열 선단에 각각 0.025, 0.05, 0.1(rad)의 각도를 가지는 균열이 존재할 때⁽¹⁾, 그림. 15 와 같은 균열 진전 그래프를 얻을 수 있다. 균열 진전 방향의 결정은 최대 원주 하중 기준을 사용하였으며, 그 계산에 있어 모드 분리에 효율적으로 알려진 두 상태 보존적분을 사용하였다.⁽⁵⁻⁸⁾

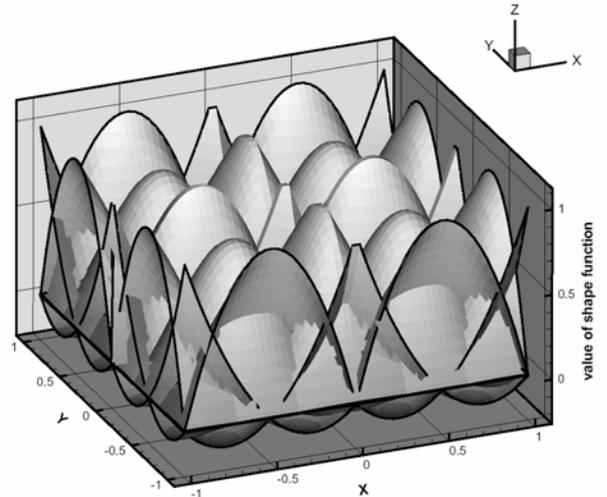


Fig. 9 Shape functions for the crack element with (23+4) nodes.

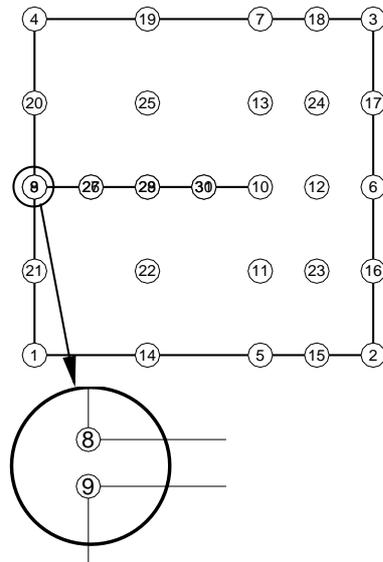


Fig. 10 A crack element with (23+8) nodes.

4. 결론

본 연구에서 제안한 균열요소를 사용하여 균열

진전을 해석하는 경우, 균열 진전에 의한 형상의 변화로 인한 수정은 균열면에 새로운 절점의 추가만으로 해결된다. 이러한 해석 결과로 볼 때, 본 연구는 균열 진전과 같은 불연속성이 움직이는 모델링을 위한 다른 스킴들보다 보다 효율적인 방법이라 하겠다.

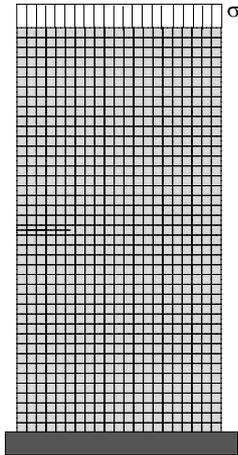


Fig. 11 Edge-crack model.

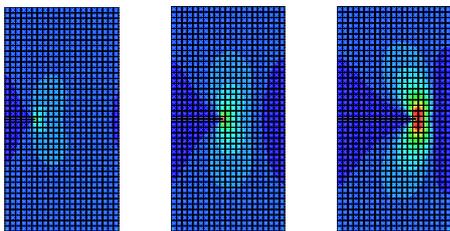


Fig. 12 Contour plots of edge-crack model at step 1, 6 and 10.

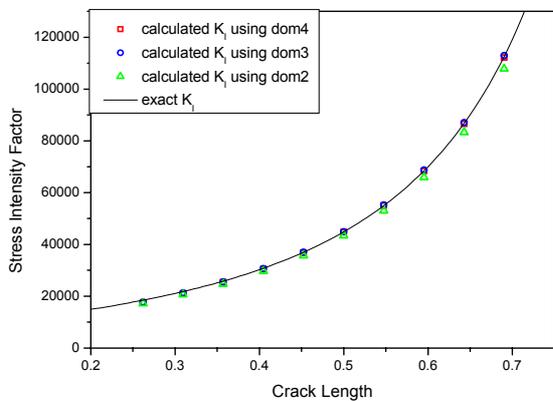


Fig. 13 Calculated stress intensity factors and the exact value

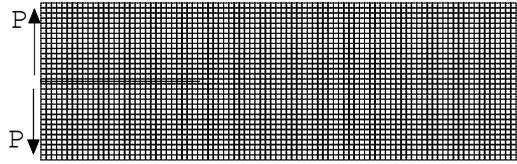


Fig. 14 Double cantilever model.

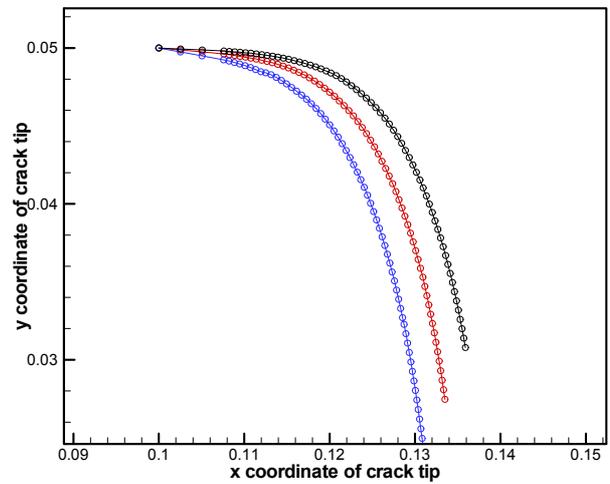


Fig. 15 Path of crack growth for the kinked cracks.

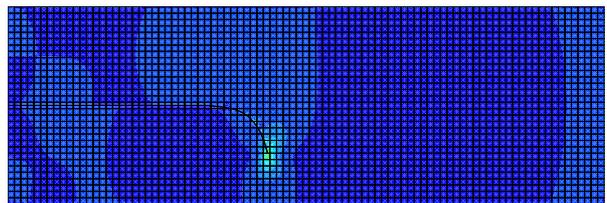


Fig. 16 Contour plot of final configuration of 0.1(rad) kinked crack growth in DCB.

후 기

이 논문은 2002 년도 한국과학재단의 지원에 의하여 연구되었음. (R01-2002-000-00230-0)

참고문헌

- (1) T. Belytschko and T. Black, 1999, "Elastic crack

- growth in finite elements with minimal remeshing,” *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 45, pp. 601.
- (2) N. Moes, J. Dolbow and T. Belytschko, 1999, “A finite element method for crack growth without remeshing,” *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 46, pp. 131.
 - (3) H.-G. Kim, 2003, “Arbitrary placement of local meshes in a global mesh by the interface-element method(IEM),” *Int. J. for Numer. Meth. in Eng.*, Vol. 56, pp. 2279.
 - (4) H. Tada, P.C. Paris and G. R. Irwin, 1985, “The edge cracking and spalling of brittle plates,” *Acta metal.*, Vol. 35, pp.2789
 - (5) S. Im and I. Jeon, 2001, “The role of higher order eigenfields in elastic-plastic crack,” *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 49, pp. 2789.
 - (6) Y. J. Kim, H.-G. Kim and S. Im, 2001, “ Mode decomposition of three dimensional cracks under mixed mode,” *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 6405.
 - (7) S. Im and K.-S. Kim, 2000, “An application of the two-state M-integral for computing an intensity of a singular near-tip field for a generic composite wedge,” *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 48, pp. 129.
 - (8) Y. Lee and S. Im, 2003, “On the computation of the near-tip stress intensities for three dimensional wedges via two-state M-integral,” *J. Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 825.