

# SPH에서 임의의 형상의 강체면에 대한 탄소성 접촉 해석

서송원<sup>†</sup>, 이재훈<sup>\*</sup>, 민옥기<sup>\*\*</sup>

## Elasto-Plastic Contact Analysis for a Rigid Surface with an Arbitrary Shape in SPH

Songwon Seo, Jaehoon Lee, Oakkey Min

**Key Words:** Virtual work principle(가상일의 원리), Contact algorithm(접촉 알고리즘), Penalty method(벌칙 기법), Reproducing condition(재현 조건), Rigid Surface(강체면)

### Abstract

There is few research about contact problem for a rigid surface with an arbitrary shape in SPH. The variational equation based on the virtual work principle is derived and its solution is obtained by the penalty method. It is proposed a new method that can determine the parameters for a penetration and a penetration rate used in the penalty method. The reproducing condition is adopted to correct the deficiency of kernel on the boundary. In order to calculate a penetration of particles, after checking boundary particles for deformable body boundary normal vectors were determined on the rigid surface. Numerical simulations for models which have rigid surface with an arbitrary shape were conducted to validate the proposed method in 2D. The results of those analysis represent that the contact algorithm proposed in this study works properly.

### 1. 서 론

입자완화 유체 동역학 (Smoothed Particle Hydro-dynamics; SPH)를 대변형 해석에 적용할 경우에 지금까지는 주로 입자로 구성된 물체끼리의 충돌에 국한되었다. 그러나, 금속 성형이나 강체 충돌 등과 같이 고정된 경계면을 가진 대상과 변형체의 충돌 문제를 해석할 경우에는 몇 가지 측면을 고려할 필요가 있다. 첫째로, 경계면은 보통 강체로 가정되는데 SPH에서는 유한요소법에서 강체 요소를 도입하는 것과는 다르게 강체 입자를 다루어야 한다. 둘째, SPH의 특성상 연속적인 임의의 자유 형상을 가진 강체면에 대한 입자 배치에 어려움이 따른다. 또한, SPH는 강체면과 입자 사

이의 경계 조건을 부여하는 데도 제약이 따른다.

이러한 일련의 문제를 해결하기 위해 본 논문에서는 입자와 강체면 사이의 접촉 문제에 대한 SPH 수식화를 가상일의 원리에 근거해 유도하였다. 탄소성 접촉 조건을 만족시키기 위해 penalty 방법을 적용하였고, 적절한 벌칙 상수를 계산하는 방법을 제시하였다. 이 방법을 위해 SPH 입자로 이루어진 물체에 대하여 경계 입자 여부를 판단하고, 강체 경계면에서의 법선 벡터를 결정함으로써 입자의 경계면 침투량을 계산하였다. 그리고, 기존 SPH가 가지고 있는 경계에서 핵함수의 결함 문제를 보완하기 위해 재현 조건을 적용하였다.

본 연구에서 제시한 탄소성 접촉 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해 2차원 직교좌표계에서 임의의 형상의 강체 목표물에 고속 충돌하는 재료에 대하여 해석을 수행하였다.

### 2. 이 론

<sup>†</sup> 연세대학교 산업기술연구소

<sup>\*</sup> 연세대학교 대학원 기계공학과

<sup>\*\*</sup> 연세대학교 기계공학부

E-mail : minokey@yonsei.ac.kr

TEL : (02)2123-2817 FAX : (02)2123-4017

2.1 SPH 이론

2.1.1 SPH 기본식

SPH는 요소나 격자가 아닌 입자를 통해 해석 대상을 구성하고 핵함수(kernel or shape function)라는 보간 함수를 이용하여 인접한 물리량과 입자간 관계로부터 각 입자들의 물리량을 계산한다. 이를 위해 임의의 입자 물리량을 결정하는데 이용하는 핵함수 근사와 연속계의 적분을 이산계인 입자에서의 총합으로 근사하는 입자 근사를 이용하게 된다.

유체 동력학의 지배 방정식은 연속 방정식과 운동량, 에너지 보존식으로 SPH 수식화를 시키면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\alpha} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\rho_i \sum_j m_j \frac{U_j^\beta}{\rho_j} W_{ij,\beta(i)} \quad (1)$$

$$\frac{dU^\alpha}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} \Rightarrow \quad (2)$$

$$\frac{dU^\alpha}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) W_{ij,\beta(i)}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\beta} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_j m_j (U_i^\alpha - U_j^\beta) \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\Pi_{ij}}{2} \right) W_{ij,\beta(i)}$$

여기서  $\rho$ 는 밀도,  $U^\alpha$ 는 속도, E는 내부 에너지, t는 시간, x는 위치,  $\sigma$ 는 전응력, 상첨자  $\alpha, \beta$ 는 텐서 표기로 공간에서의 방향을 각각 나타낸다. 그리고,  $\Pi_{ij}$ 는 충격 문제 해석 시 수치적 발산을 막기 위한 인공 점성을 뜻한다. 그 외에 응력-변형률 관계식, 상태 방정식 등을 통해 SPH 해석을 수행하게 된다.[3]

2.1.2 재현 조건

SPH에서 사용되는 핵함수는 대상 영역의 내부에서는 일관성 조건을 대체로 잘 만족하지만 경계 부근에서 이를 만족시키지 못한다. 이 조건을 만족시키기 위해 Liu [1] 등은 RKPM(Reproducing Kernel Particle Method)에서 SPH 핵함수에 새로운 보정 함수(Correction Function)를 도입함으로써 일관성 조건을 만족시키도록 하였다. 즉, 임의의 함수  $u(x)$ 에 대한 재현 함수

$$u^h(x) = \int_{\Omega} C(x-y) W(x-y, h) u(y) d\Omega \quad (4)$$

에 대하여 RKPM은 보정 함수  $C(x-y)$ 를 결정하기 위하여, 수정된 핵함수에 다음과 같은 조건을

부여하였다.

$$\int_{\Omega} C(x, y) W(x-y) d\Omega = 1 \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} x C(x, y) W(x-y) d\Omega = x \quad (6)$$

식(5)와 식(6)을 만족시키도록 보정된 핵함수는 원래의 핵함수가 가지는 경계에서의 오차를 거의 제거해주는 효과를 나타낸다. 몇 단계의 계산과정을 통해 이산화된 함수 근사식과 수정 핵함수는 아래와 같이 표현된다.

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^N N_j(x) u_j \quad (7)$$

$$N_j(x) = [C_0(x) + C_1(x) \cdot (x - x_j)] W(x - x_j) V_j \quad (8)$$

여기서 계수  $C_0$ 와  $C_1$ 는 단위 분할 조건식(5)와 선형 일관성 조건식(6)을 통해 얻을 수 있고, 수정 핵함수의 1차 미분 형태도 추가적인 수학적 과정을 통해 구할 수 있다.[1,5]

Fig.1은 2차원에서 함수  $f(x, y) = (x+1)(y+1)$ 에 대한 재현성을 보여준다. Fig.1(a)는 원래 함수를 나타내고, (b)는 기존의 핵함수를 이용한 결과이다. 그림을 통해 기존의 핵함수를 적용한 경우에는 경계에서 일관성 조건을 만족시키지 못함을 확인할 수 있다. 반면, 재현 조건을 만족시키는 수정 핵함수를 적용한 (c)의 경우에는 원래의 함수와 거의 유사함을 보여준다.

Fig.2는  $f(x, y) = (x+1)(y+1)$ 에 대한 1차 미분을 비교한 그림이다. (a)는 원래의 1차 미분 함수이고, (b)는 기존 핵함수를 이용한 1차 미분을, (c)는 수정 핵함수를 적용한 경우의 1차 미분을 보여준다. Fig.1과 마찬가지로 기존 핵함수를 적용하면 경계에서 큰 오차가 발생하지만, 수정 핵함수는 원래 함수와 거의 일치함을 알 수 있다.

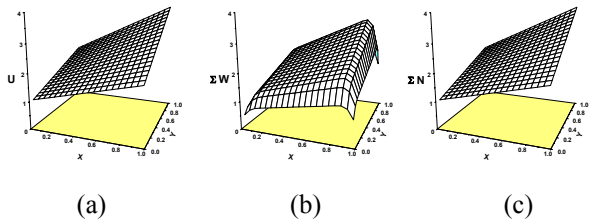


Fig.1 Comparison of kernel summation for  $f(x, y) = (x+1)(y+1)$ ; (a) the original function (b) the sum using the original kernel (c) the sum using the corrected kernel

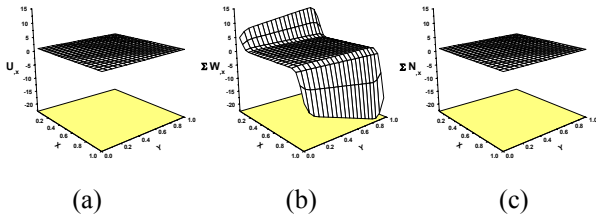


Fig.2 Comparison of kernel's derivative summation for  $f(x, y) = (x + 1)(y + 1)$ ; (a) the derivative of original function (b) the sum using the first derivative of original kernel (c) the sum using the first derivative of corrected kernel for  $x$

2.2 접촉 이론

충돌면이 임의의 함수로 주어진 강체일 경우에 SPH 입자와 연속적인 경계면사이에 관계하는 접촉 조건의 고려가 필요하다. 본 연구에서는 변분법을 이용하여 제한 조건을 갖는 에너지 범함수를 수식화하고, 벌칙 기법을 사용하여 접촉력을 구하였다.

2.2.1 경계치 문제

접촉할 수 있는 두 물체는 기본적으로 운동 방정식, 변형률속도-변위속도 관계식, 구성 방정식과 초기 및 경계 조건 그리고, 다음과 같은 일반적으로 고체 사이의 접촉을 지배하는 Kuhn-Tucker 조건을 만족시켜야 한다.[4]

- i) 물체가 상호 침투하지 않는다는 가정으로부터 접촉간극은 항상 0보다 크거나 같아야 한다.
- ii) 접촉면이 고착되어 있지 않다는 가정으로부터 접촉 압력은 반드시 압축력이어야 한다.
- iii) 접촉 압력과 접촉 간극 중에서 적어도 하나는 0이어야 한다.

2.2.2 가상일의 원리

접촉 문제의 약형을 얻기 위해 운동 방정식과 경계 조건식, 변형률속도-변위 속도 관계식을 만족하는 가상속도의 변분  $\delta v_i$ 를 곱하여 물체의 체적  $V$  및 표면적  $A$ 에 대하여 적분하면 다음 식을 얻는다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \delta v_i dV + \int_{\Omega} \rho b_i \delta v_i dV + \int_{\Omega} \rho v_i \delta v_i dV + \int_{\Gamma} (t_i - \bar{t}_i) \delta v_i dA = 0 \tag{9}$$

여기서  $b_i$ 는 입자  $i$ 의 물체력을,  $t_i$ 는 물체표면의 입자  $i$ 에 작용하는 표면력,  $\bar{t}_i$ 는 입자  $i$ 에 주어진 표면력을 나타낸다.

위 식의 좌변 제1항에 가우스의 발산정리를 적용하고, 벌칙 기법을 통해 접촉으로 인해 발생하는 부등식 구속 극화 문제를 비구속 극화 문제로 변환시키면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\delta W = \delta W^{int} + \delta W^{con} + \delta M - \delta W^{ext} \tag{10}$$

여기서

$$\delta W^{int} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} dV \tag{11}$$

$$\delta M = \int_{\Omega} \delta v_i \rho v_i dV \tag{12}$$

$$\delta W^{con} = \int_{\Gamma_c} (\lambda_1 \dot{p}_n \delta p_n + \lambda_2 p_n \delta \dot{p}_n) d\Gamma = 0 \tag{13}$$

$$\delta W^{ext} = \int_{\Omega} \rho b_i \delta v_i dV + \int_{\Gamma} \bar{t}_i \delta v_i dA \tag{14}$$

위 식들에서  $\lambda_1$ 은 상호 침투 속도에 대한 벌칙 상수,  $\lambda_2$ 는 상호 침투량에 대한 벌칙 상수,  $\dot{p}_n$ 은 상호 침투 속도,  $p_n$ 은 상호 침투량을 나타낸다.

2.2.3 접촉 문제의 SPH 수식화

가상일의 원리로부터 유도된 약형식 (9)를 SPH 이산화 방법을 통해 수식화하면 다음과 같다. 단, 외력은 없는 것으로 가정한다.

$$M \dot{v}_i = -F^{int} - F^{con} \tag{15}$$

여기서

$$M = \sum_j \rho_j W_{ij} V_i V_j \tag{16}$$

$$F^{int} = \sum_j m_i m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j} + \Pi_{ij} \right) W_{ij,\beta(i)} \tag{17}$$

$$F^{con} = \sum_{B_c} (\lambda_1 \dot{p}_n + \lambda_2 p_n) \vec{n}_i W_{iB_c} A_{B_c} \tag{18}$$

여기서,  $B_c$ 는 접촉 조건을 만족하는 입자를,  $A_{B_c}$ 는 접촉하는 경계 입자의 접촉 표면적을,  $\vec{n}_i$ 는 경계 법선 벡터를 나타낸다. 식(15)를 통해 입자  $i$ 의 가속도를 구할 수 있으며 시간 적분법을 통해 속도와 위치를 결정하게 된다.

그러나, 위 식에서 핵함수  $W_{ij}$ 는 접촉 경계에서 결함을 가지고 있기 때문에 2.1.2절에서 제시한 보정 핵함수로 대체시킬 필요가 있다. 보정 핵함수를 식(16)~(18)과 변형률속도 및 회전속도 관계식에 모두 적용할 경우, 경계에서의 자유면

경계 조건을 만족시키지 못하게 된다. 따라서, 본 연구에서는 내부력을 나타내는 식(17)에 대해서는 기존의 핵함수를 적용하고 나머지 관계식에는 보정 핵함수를 적용한다.[7] 즉,

$$M = \sum_j \rho_j N_{ij} V_i V_j \quad (19)$$

$$F^{int} = \sum_j m_i m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) W_{ij,\beta(i)} \quad (20)$$

$$F^{con} = \sum_{B_c} (\lambda_1 \dot{p}_n + \lambda_2 p_n) \vec{n}_i N_{iB_c} A_{B_c} \quad (21)$$

여기서  $N_{ij}$ 는 보정 핵함수를 나타낸다.

### 2.2.4 벌칙 상수의 계산

입자간의 충돌일 경우, 접촉력에 해당되는 식(18)은 각각 침투량과 침투 속도로 인해 발생하는 힘을 의미하며, 우선 접근 속도에 의한 수직 응력은 1차원 탄성과 이론[2]에서 얻을 수 있다. 즉,

$$\lambda_1 \dot{p}_n = \frac{\rho_j C_j}{\rho_j C_j + \rho_i C_i} \rho_i C_i \dot{p}_n \quad (22)$$

반면에, 침투량에 따른 발생 응력은 입자간 불침투성을 만족시키기 위해 변형하면서 생기는 복원력으로 보고, 다음과 같이 단축 변형에 따른 탄성 계수와 변위의 관계로 놓을 수 있다.

$$\lambda_2 p_n = \frac{E_i E_j}{E_i + E_j} \frac{p_n}{h_0} \quad (23)$$

여기서,  $h_0$ 는 입자의 초기 유화 길이로 변형량에 대한 기준 길이가 된다.

그런데, 경계면과의 접촉 시 경계면은 강체로 상정되며, 이 경우 탄성계수  $E$ 와 음속  $C$ 를 무한대로 취급할 수 있기 때문에 극한 이론을 적용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.[7]

$$\lambda_1 \dot{p}_n + \lambda_2 p_n = \rho_i C_i \dot{p}_n + E_i \frac{p_n}{h_0} \quad (24)$$

### 2.2.5 접촉량의 결정

경계면과 입자간의 접촉여부를 판별하기 위해 경계 입자와 경계면사이의 경계 법선 벡터를 결정해야 한다. 우선, 입자로 이루어진 물체에서 경계 입자의 판단은 Sulsky[6]가 제안한 방법을 통해서 할 수 있다. 해석 프로그램에서 한 물체를 다른 물체와 구별하기 위하여 보통 사용되는 ‘색’이나 ‘종류’를 나타내는 고유의 숫자를  $\psi$ 라고 표시하자. 이 때 한 물체에 대해 핵함수를 이용해 계산하면 경계 부근에서는 다음과 같은 부등식 관계가 발생하게 된다.

$$\psi_i \neq \sum_{j \in N} \psi_j m_j W_{ij} / \rho_j \quad (25)$$

경계 입자의 판단 조건은 경계에서 빈 공간이나 각기 다른 물체를 나타내는 고유 숫자의 차이로 인해 위 부등식의 차이가 충분히 클 경우이다. 본 연구에 따르면 보통 우측의 합이 원래 숫자인 좌측값의 0.85~0.9 수준일 경우에 실제 경계 입자로 판단할 수 있었다.

판단 경계 법선 벡터가 결정되면 이것을 이용해 경계면과의 최단거리에 있는 지점을 계산함으로써 경계 법선 벡터를 결정하게 된다.

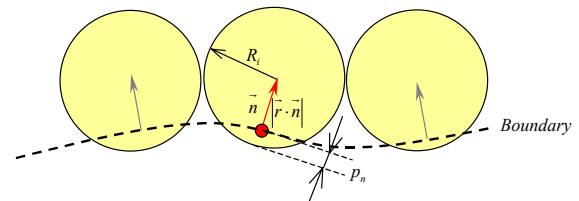


Fig.3 Contact normal vector and penetration when the contact between particle and surface occurs

Fig.3은 경계면과 입자사이의 법선 벡터를 결정하고 이를 이용해 입자의 침투량을 계산하는 방법을 개략적으로 보여준다. 이 때 침투량과 침투 속도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p_n = (R_i - |\vec{r} \cdot \vec{n}|) \quad (26)$$

$$\dot{p}_n = \vec{v}_i \cdot \vec{n} \quad (27)$$

여기서,  $R_i$ 는 입자  $i$ 의 대표 반경을,  $\vec{r}$ 은 입자와 최소 거리에 있는 경계면상의 점 사이의 위치 벡터를,  $\vec{n}$ 은 단위법선 벡터를 나타낸다.

## 3. 수치 해석

유도된 SPH 접촉 알고리즘이 적절히 작용하고 있는지 확인을 위해 수치 해석을 수행하였다.

### 3.1 판의 충돌 해석

Table 1 Material properties and constants for Mie-Gruneisen EOS of steel and copper

Material	$c_0$ (m/s)	$s$	$\Gamma_0$	$\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\mu_0$ (GPa)	$Y_0$ (MPa)
steel	4580	1.49	2.02	7850	77	600
copper	8930	1.49	1.96	3940	47	250

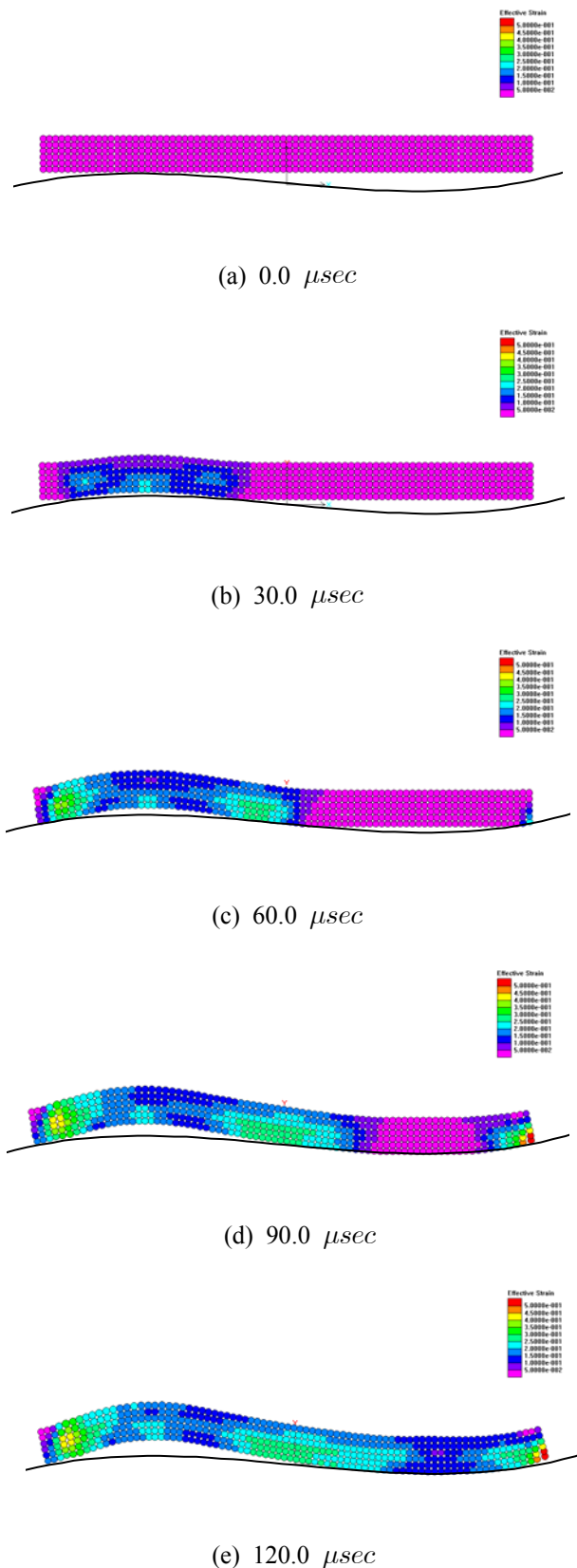


Fig.4 Simulated impact to a rigid surface with a wave shape according to time

Fig.4는 400mm×30mm 크기의 금속판을 물결형상의 강체면에 고속으로 충돌시킨 경우의 시간에 따른 변형을 나타낸다. 판의 초기 속도는 200m/sec이고, 구성식은 탄성-완전 소성식, 상태방정식은 Mie-Gruneisen식이 적용되었다. NPH (Number of Smoothing Length h)는 1.5를, 인공 점성 계수  $\alpha = \beta = 2.5$ , 유화길이는  $h=5\text{mm}$ 가 적용되었다. Table 1에는 해석에 사용된 steel재료의 물성치와 EOS 상수 값들을 나타내고 있다.

실선으로 나타낸 것이 미리 정해진 고정된 강체면으로 판이 시간에 지남에 따라 왼쪽부터 접촉하기 시작한다. 먼저 접촉한 면은 소성변형을 일으키며 반발되고 점차적으로 오른쪽으로 접촉이 이루어진다. 왼쪽과 오른쪽의 접촉 시간의 차이로 판의 중간부에서 상대적으로 소성변형이 많이 발생하고, 판의 왼쪽이 시간이 지남에 따라 더 크게 변형됨을 확인할 수 있다. 이 결과를 통해서 고속으로 충돌하는 SPH 입자가 미리 주어진 강체면을 침투하지 않고 변형됨을 확인할 수 있다.

### 3.2 봉의 충돌 해석

오목한 췌기 모양의 강체면에 대한 충돌 해석을 수행하였다. Table 1의 물성치를 가진 구리로 이루어진 직경 200mm의 봉이 100m/sec의 속도로 충돌할 경우에 변형되는 형상을 Fig.5에서 보여주고 있다. 이 경우에 NPH는 1.5를, 인공 점성 계수  $\alpha = \beta = 2.5$ 가 적용되었다. (a)는 초기 봉의 입자 배치와 강체면을 나타내며, 봉은 원주 형태로 입자가 배치되었다. (b)는 충돌 0.2msec 후에 변형 형상과 밀도 분포를 나타내고 있다.

앞의 판의 충돌 해석과 마찬가지로 고정된 강체면을 따라 봉이 췌기 모양으로 변형된 것을 볼 수 있다.

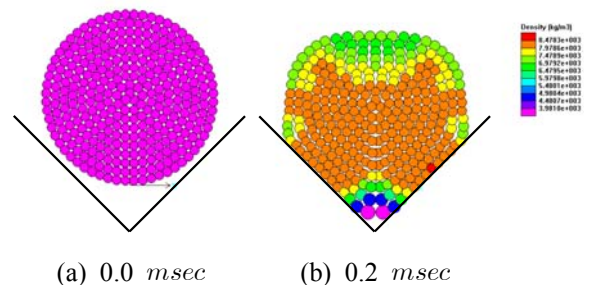


Fig.5 Simulated impact to a rigid surface with a concave edge shape

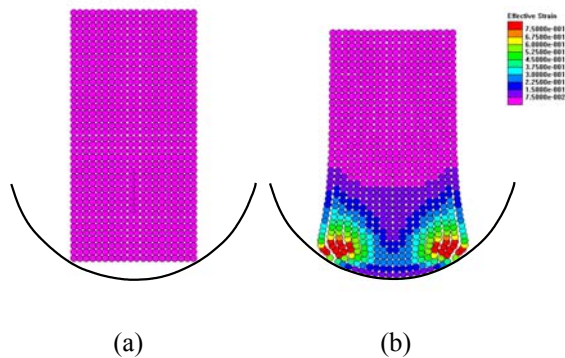


Fig.6 Simulated impact to a rigid surface with a half circle shape

### 3.3 사각막대의 충돌 해석

반원 형상의 강체면에 구리로 이루어진 200mm×400mm 크기의 사각 막대를 100m/sec의 속도로 충돌시키는 해석을 수행하였다. NPH는 1.5를, 인공 점성 계수  $\alpha = \beta = 2.5$ , 유화길이  $h=10\text{mm}$ 가 적용되었다. Fig.6이 해석 모델에 대한 초기 형상과 변형 후 형상을 보여주는 그림이다. 제일 먼저 접촉하는 모서리에서 가장 많은 소성 변형이 발생됨을 볼 수 있고, 원의 형상면을 따라 변형이 이루어지고 있음을 확인할 수 있다.

## 4. 토의 및 결론

SPH에서 거의 다루어지지 않았던 강체 경계면과 입자사이의 탄소성 접촉 문제에 대한 접근을 시도 하였다. 변분법에 기초하여 접촉 문제의 해를 구할 수 있는 SPH 수식화 기법을 제시하였다.

제시된 SPH 접촉 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해 몇 가지 자유 형상의 강체 목표물에 대한 충돌 해석을 수행하여 보았다. 물결 모양, 오목한 췌기 모양과 반원 형태의 강체면에 대하여 각각 판과 구, 사각 막대를 충돌시키는 해석을 통해, 본 연구에서 제시한 접촉 알고리즘이 입자와 입자의 강체면에 대해서도 잘 적용됨을 알 수 있었다.

이 연구는 고체역학분야에서 금속 성형 가공과 같이 복잡한 경계면에 대한 접촉 문제를 해결할 수 있는 방법을 제공할 뿐만 아니라, 유동이 발생하는 주물 해석, die-casting 해석과 같이 입자가 변형을 무시할 수 있는 연속적인 고체 경계와 접촉하는 문제에 대해서도 성공적으로 적용될 수 있다고 보여 진다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R01-2001-000-00390-0)의 지원으로 수행되었음.

## 참고문헌

- (1) Wing Kam Liu, Sukky Jun, 1998, "Multiple-scale reproducing kernel particle methods for large deformation problems," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 41, pp. 1339~1362.
- (2) M.A. Meyers, 1994, *Dynamics Behavior of Materials*, John wiley & sons, Inc.
- (3) L.D. Libersky, A.G. Petschek, T.C. Carney, J.R. Hipp, and F.A. Allahdadi, 1993, "High Strain Lagrangian Hydrodynamics," *J. Comput. Phys.*, Vol. 109, pp. 67~75.
- (4) A.Czekanski, S.A.Meguid, 2001, "Solution of dynamic frictional contact problems using nondifferentiable optimization," *Inter. J. Mech. Sci.*, Vol. 43, pp. 1369~1386.
- (5) Sukky Jun, Wing Kam Liu and Ted Belytschko, 1998, "Explicit Reproducing Kernel Particle Methods for Large Deformation Problems," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 41, pp. 137~166.
- (6) P.W.Randles, L.D.Libersky, 1996, "Smoothed Particle Hydrodynamics : Some recent improvements and applications," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, pp. 375~408.
- (7) S.W. Seo, 2003, *A Study on Elasto-Plastic Contact Algorithm in SPH using Reproducing Condition and Penalty Method*, Ph.D Dissertation, Yonsei University