

무두께 요소층을 이용한 육면체 격자의 반복적 적응 격자 세분

박철현* · 양동열**

Adaptive mesh refinement for 3-D hexahedral element mesh by iterative inserting zero-thickness element layers

C. H. Park and D. Y. Yang

Abstract

In this study, a new refinement technique for 3-dimensional hexahedral element mesh is proposed, which is aimed at the control of mesh density. With the proposed scheme the mesh is refined adaptively to the elemental error which is estimated by 'a posteriori' error estimator based on the energy norm. A desired accuracy of an analysis i.e. a limit of error defines the new desired mesh density map on the current mesh. To obtain the desired mesh density, the refinement procedure is repeated iteratively until no more elements to be refined exist. In the algorithm, at first the regions of mesh to be refined are defined and, then, the zero-thickness element layers are inserted into the interfaces between the regions. All the meshes in the regions, in which the zero-thickness layers are inserted, are to be regularized in order to improve the shape of the slender elements on the interfaces. This algorithm is tested on a simple shape of 2-d quadrilateral element mesh and 3-d hexahedral element mesh. A numerical example of elastic deformation of a plate with a hole shows the effectiveness of the proposed refinement scheme.

Key Words : Adaptive Refinement (적응격자 세분화), Error Estimation(오차 추정), Zero-thickness Element(무두께 요소), Mesh Density(격자 밀도)

1. 서론

유한요소 해석법은 연속적인 해석 영역을 유한한 요소로 분할하여 각 요소에서의 단속적인 해를 구하는 것이므로, 기타의 조건이 동일하다면, 연속적인 영역을 분할하는 요소의 개수가 많을 수록 정확한 해를 얻을 수 있다. 그러나 요소의 개수가 많아지면 계산 시간이 증가하고, 필요한 하드웨어의 사양 또한 고급화된다. 따라서 원하는 해석의 정확도를 얻으면서도 최소 요소 수를 가지는 최적의 격자를 구성하는 것이 필수적이다.

본 연구에서는 최적의 격자를 구성하기 위하여 사후 오차 추정법(a posteriori error estimation)에 의해 요소별 오차 추정치(error estimator)를 계산하고 각 요소가 같은 정도의 오차를 갖도록 세분한다.

Zienkiewicz 와 Zhu 는 재료의 변형에서 발생하는 에너지를 이용하여 오차를 정의하고, 금속의 탄성 변형 및 소성 변형 문제에서 적응 격자를 구성 하였다.⁽¹⁻²⁾ Li 등은 현재의 격자에서 발생하는 오차를 요구되는 에너지 오차 수준으로 감소시키기 위하여 필요한 전체 요소의 개수와 각 요소의 크기를 이론적으로 계산하였다.⁽³⁾ 박근등

* 한국과학기술원 기계공학과 대학원

** 한국과학기술원 기계공학과

은 이차원사각형 요소를 이용하여 세분화된 요소와 그렇지 않은 요소의 전이영역(transition zone)을 포함하는 적응 격자를 구성하여 소성변형 문제 해석에 적용한 바 있다.⁽⁴⁾

본 연구에서는 적응 격자를 구성하는 새로운 방법으로 무두께 요소층(zero-thickness element layer)을 이용한 세분화 기법을 제안한다. 이 무두께 요소층은 3 차원 육면체 요소 격자의 표면 요소층의 품질을 개선하기 위해서 사용되었으나,^(9,10) 본 연구에서는 이 층을 요소의 표면이 아니라 세분화가 필요한 영역의 경계에 선택적으로 삽입함으로써 격자세분화를 수행한다.

2. 오차 추정에 의한 격자 밀도 생성

2.1 Z-Z 사후 오차 추정

유한요소 해석에서는 이산화(discretization)에 의해 실제 해와의 오차가 발생하게 되어 있다. 여기서 오차를 정의 하는 척도에는 속도, 응력, 변형률에너지 등 여러 가지 해석에 의한 결과를 사용할 수 있으나, 여기서는 Zienkiewicz 와 Zhu 가 제안한 변형 에너지를 오차의 척도로 사용하였다.⁽¹⁾

변형률에너지 놈(norm)을 이용하여, 오차의 참값, $\|\hat{\epsilon}\|$ 을 구하면 아래 식과 같다.

$$\|\hat{\epsilon}\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \hat{\sigma})^T : (\epsilon - \hat{\epsilon}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

여기서 $\sigma, \hat{\sigma}$ 는 각각 응력의 참 값과 해석에 의한 값을 나타내고, $\epsilon, \hat{\epsilon}$ 는 각각 변형률의 참 값과 해석에 의한 값을 나타낸다.

오차의 절대값에 비해 전체 변형 에너지에 대한 오차의 상대값을 사용하는 것이 격자 세분화 시작의 판별이나, 세분화 후의 요소 크기를 결정하는 과정에도 유용하게 사용될 수 있다. 각 요소별 상대 오차 η_i 는 아래 식(2)과 같이 정의된다.

$$\eta_i = \frac{\|e_i\|}{\|u\|} \quad (2)$$

이 상대 오차를 이용하여 세분화되어 새로 만들어진 요소의 크기를 계산한다

2.2 격자밀도장 생성 및 세분화 척도

오차 추정에 의하여 각 요소별 상대 오차가 계산되었다면, 주어진 허용 한계오차 η_i^* 에 따라 각 요소의 새 크기를 계산한다. 여기서는 Li 와 Bettess⁽³⁾가 제시한 방법을 이용하여, 요소의 크기 및 새 격자에 필요한 최소 요소 개수를 구하여 격자 세분화에 이용하였다. 새 요소의 크기는 식(3)과 같이 정의된다.

$$h_{new} = \left(\frac{\eta_i}{\eta_i^*} \right)^{\frac{1}{p-m+2}} h_{old} \quad (3)$$

여기서 h_{old} 와 h_{new} 는 각각 세분화 전후의 요소 크기를 나타내고, m 은 요소의 변형에서 변형률을 구할 때 사용하는 미분의 최고차수를 나타내고, p 는 형상 함수의 최고차항의 차수를 의미한다.

본 연구에서는 세분화 이전 격자의 모든 요소에서 밀도 비 ζ_i 를 계산한 후, 이 값이 1 보다 큰 요소들의 집합을 세분화 영역 Ω^R 로 정의하고, 이 영역에 대해 격자 세분화를 수행하도록 한다. 식 (4)는 격자 밀도비를 나타낸다.

$$\zeta_i = \frac{\delta_{new}}{\delta_{old}} \quad (4)$$

격자 밀도비 ζ_i 는 격자 세분화 척도(measure of refinement)로 사용된다.

3. 반복적 적응 격자 세분화

3.1 무두께 요소층을 이용한 세분화

육면체 격자를 세분화 하는 방법은 Fig. 1 과

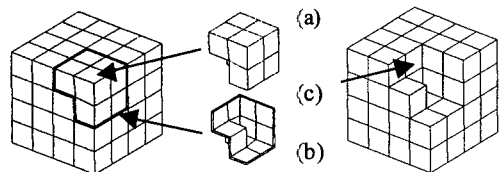


Fig.1 (a) Region subject to refinement, (b) Zero-thickness element layer, (c) Frontal surface of refinement

같이 세분화 척도에 따라 세분화 영역을 구분하

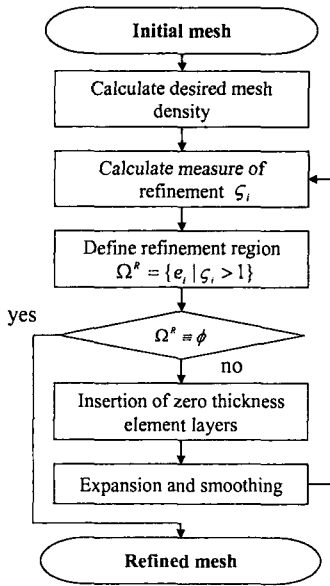


Fig. 2 Flow chart of the procedure of mesh refinement

고, (Fig. 1(a)) 이 영역의 요소의 외부면을 따라 무두께 요소층을 삽입하고, 삽입된 요소를 세분화 영역 방향으로 확장하여 격자의 밀도를 증가시킨다.

3.2 반복적 적응격자 세분화 알고리즘

세분화될 요소 영역을 선택하여 세분화를 수행하고, 이후 다시 세분화가 필요한 요소 영역을 설정하여 세분화를 반복해 나간다. 마지막으로 더 이상 세분화가 필요한 영역이 존재하지 않을 때까지 이 과정을 반복한다. (Fig. 2) 이 과정을 단계 별로 설명하면 다음과 같다.

Step 1 새 격자의 요구 밀도 계산

현재 격자의 오차 추정치를 이용하여 요구되는 격자 밀도 δ_{new} 를 구한다.

Step 2 세분화 척도 ζ_i 계산

식(4)를 이용하여 각 요소별로 요구되는 격자 밀도와 세분화 되기 전의 격자 밀도의 비를 계산한다.

Step 3 세분화 영역 설정

Step 2 에서 구한 ζ_i 가 1 보다 큰 요소

영역을 선택하여 세분화 영역 Ω^R 을 설정한다. Ω^R 이 공집합일 경우 step 6 로 이동하여 세분화 과정을 종료한다.

Step 4 격자 세분화

Step 3 에서 선택된 Ω^R 의 경계에 지정된 개수의 무두께 요소층을 삽입한다.

Step 5 격자 확장 및 유연화

Ω^R 에 포함된 요소와 새로 삽입된 요소만을 대상으로 격자 유연화를 수행한다. 격자 유연화 후, δ_{old} 를 갱신하고 step 2 로 이동한다.

Step 6 격자 세분화 종료

세분화 된 격자를 출력하고 세분화 과정을 종료한다.

4. 반복적 격자 세분화 적용

4.1 2 차원 사각형 요소 격자 적용

먼저 2 차원 예제를 통하여 무두께 요소층을 삽입하여 현재 격자에 주어진 새 격자 밀도를 만족하는 세분화가 가능한지 검증하도록 한다.

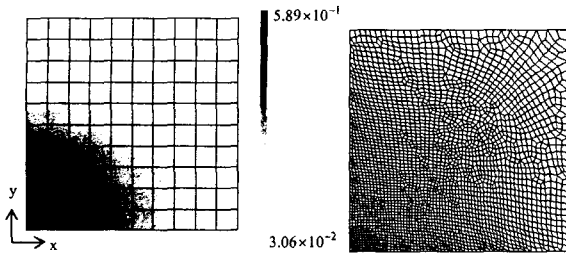
크기가 100×100 인 정사각형의 정규격자에 임의의 요소별 상대 오차를 Fig. 3(a)와 같이 분포시킨다. 이 초기 격자에 허용 상대 오차 (η^*) 를 5%로 제한 하고 요구되는 격자밀도를 구하면 Fig. 4(a)와 같은 밀도 분포를 얻는다.

Fig. 3(b)는 23 번의 세분화 반복 과정 후 더 이상 세분화할 요소가 선택되지 않아 세분화 과정이 모두 끝난 상태의 격자이다. 세분화 과정이 반복되면서 좌표 (0,0)의 쪽으로 격자 밀도가 높아지는 것을 알 수 있다.

4.2 육면체 격자의 세분화 적용

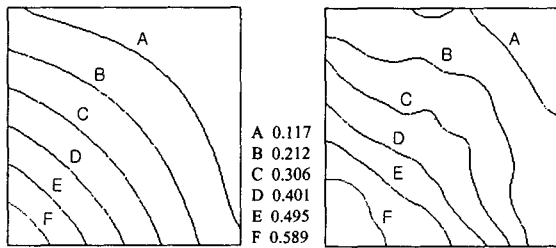
제안된 기법을 3 차원 육면체 격자 세분화에 적용하였다. 간단한 인덴테이션(indentation) 예제에 적용하여 변형 중에 발생하는 에너지 오차를 계산하고 이에 상응하는 격자 밀도를 계산하여 격자 재구성과정에서 계산된 격자 밀도에 적응하는 세분화를 수행한다.

요소의 수가 1728 개인 CASE1 격자와 요소의 수가 13770 개인 CASE2 격자에 대해서 해석을 수행하고, 본 연구에서 제안된 기법으로 세분화



(a) Initial mesh (b) Refined mesh

Fig. 3 Iterative mesh refinement of rectangular element mesh on a simple square geometry



(a) Desired mesh density (b) Mesh density after refinement

Fig. 4 Desired mesh density and resulting mesh density after end of refinement iterations

된 격자를 이용한 결과와 비교하면 Table 1 과 같다.

세분화된 격자를 사용했을 경우 CASE2 에 비해 약 5 분의 1 의 요소를 사용했음에도 비슷한 정도의 해석 정밀도를 얻을 수 있었다.

5. 결론

이상으로 본 연구의 결과를 정리하면 다음과 같다.

(1) Zienkiewicz 와 Zhu 가 제안한 상대 에너지 오차를 요소별로 정의하고 새 격자에서 요구되는 해석 오차를 만족하도록 하는 새 격자의 밀도를 계산하였다.

(2) 새로운 격자 세분화 방법인 무두께 요소층을 이용한 육면체 요소 격자의 반복적 세분화 기법을 제안 하였다. 제안된 방법을 이용하여 소성변형 문제의 해석에 적용하여 적응 격자를 구성하여 조밀한 격자와 비슷한 정밀도를 가지나 계산시간을 크게 줄일 수 있었다.

참고 문헌

Table 1. Comparison of CPU times and total relative error on meshes of CASE1, CASE2 and CASE3

Mesh	Uniform		Refined
	CASE1	CASE2	CASE3
No. of element	1728	13770	2588
CPU Time(%)	1.1	100	2.5
Total relative Error(%)	148.1	100	105.3

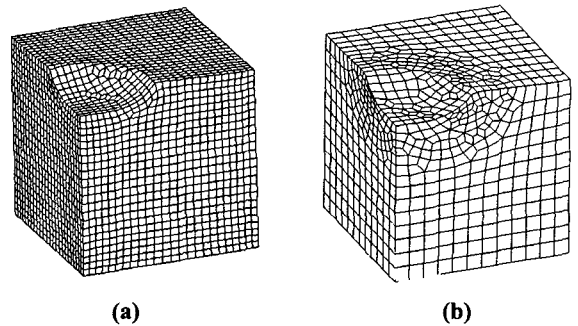


Fig. 5 Mesh configuration of (a) fine mesh and (b) refined mesh

- (1) O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, 1987, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 24, pp. 337~357.
- (2) Zienkiewicz, O. C., Liu, Y. C. and Huang, G. C., 1988, "Error Estimation and Adaptivity in Flow Formulation for Forming Problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 25, pp. 23~42.
- (3) Li, L.Y., Bettess, P. Bull, J. W., Bond, T. and Applegarth, I., 1995, "Theoretical Formulations for Adaptive Finite Element Computations," *Commun. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp. 857~868.
- (4) Park, K and Yang, D. Y., 1998, "A Posteriori Error Estimation and its Application to Adaptive Mesh Refinement in the Rigid-Plastic Finite Element Method," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 22, No. 7, pp. 1278~1286.
- (5) Lee, Y. K. and Yang, D. Y., 1999, "Development of a Grid-Based Mesh Generation Technique and its Application to Remeshing during the Finite Element Simulation," *Engineering Computations*, Vol. 16, No. 3, pp. 316~336.