

최적화 방법을 이용한 Delaunay 격자의 내부 격자밀도 적응 방법

홍진태* · 이석렬* · 박철현* · 양동열*

Delaunay mesh generation technique adaptive to the mesh Density using the optimization technique

J. T. Hong, S. R. Lee, C. H. Park and D. Y. Yang

Abstract

A mesh generation algorithm adapted to the mesh density map using the Delaunay mesh generation technique is developed. In the finite element analyses of the forging processes, the numerical error increases as the process goes on because of discrete property of the finite elements or severe distortion of elements. Especially, in the region where stresses and strains are concentrated, the numerical discretization error will be highly increased. However, it is too time consuming to use a uniformly fine mesh in the whole domain to reduce the expected numerical error. Therefore, it is necessary to construct locally refined mesh at the region where the error is concentrated such as at the die corner. In this study, the point insertion algorithm is used and the mesh size is controlled by moving nodes to optimized positions according to a mesh density map constructed with a posteriori error estimation. An optimization technique is adopted to obtain a good position of nodes. And optimized smoothing techniques are also adopted to have smooth distribution of the mesh and improve the mesh element quality.

Key Words : Finite Element, Delaunay Mesh Generation Algorithm, Optimization Technique, Mesh Untangling, Mesh Smoothing, Posteriori Error Estimation

1. 서론

일반적으로 유한요소해석에서는 유한요소 자체의 이산적 특징에 의해 분석적 해와 오차가 발생한다. 특히, 소재의 대변형을 수반하는 소성가공공정의 경우, 응력이나 변형률이 집중되는 영역에서는 요소의 급격한 퇴화로 인해 해석 오차가 급증하므로, 이러한 영역을 효율적으로 고려할 수 있는 격자를 구성해야 한다. 소성가공공정은 소재의 대변형으로 인해 자유곡면이 많이 존재하므로 표면 격자는 AFT 방법으로 구성이 가능하나, 일반적으로 내부 격자구성 시, 격자구성이 어려우므로 가장 안정적인 Delaunay 방

법을 이용한다. 그러나, Delaunay 방법은 표면 격자의 크기에 따라 내부 격자가 구성되므로, 내부 격자의 크기 조절은 어려운 단점이 있다.

본 연구에서는, Zienkiewicz 가 제안한 에너지 오차법⁽¹⁻²⁾을 이용하여 격자 밀도 지도를 구한 후, 밀도 함수를 구성하고, 각 위치에서 계산된 격자밀도값에 맞춰 절점을 생성하였으며, 격자 구성 알고리즘은 일반적으로 강건하고, 구현이 쉬운 것으로 알려진 Constrained Delaunay 격자구성방법⁽³⁻⁴⁾을 이용하였다. 제시된 격자밀도함수에 적응하는 요소의 구성을 위하여 최적화방법을 이용하여 절점을 이동하였으며, 행렬식 최적화 방법⁽⁵⁻⁶⁾을 이용하여 요소의 품질을 향상시켰다.

* 한국과학기술원 기계공학과

이렇게 구성된 격자는 구조적 문제로 인하여 얇은 요소가 존재하므로, 이 절점들을 이용하여 전체적으로 격자를 재구성하여 구조적 문제를 제거하였다.

2. 격자재구성 방법

2.1 격자재구성 알고리즘

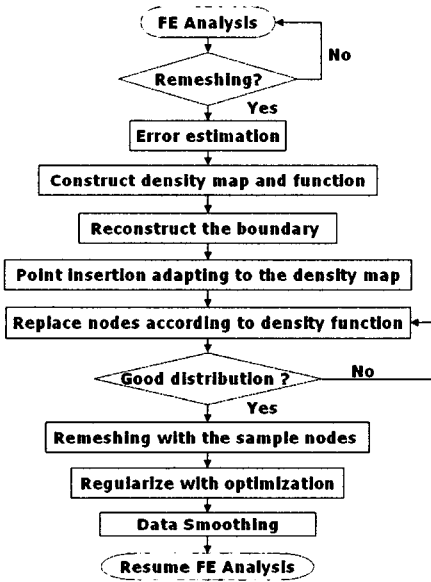


Fig. 1 Flow chart of a remeshing procedure

본 연구에서 제안하는 격자재구성 과정은 Fig.1 과 같다. 즉, 격자 재구성이 판별되었을 때, 다음과 같은 순서로 격자를 재구성한다.

- step1. 그 단계에서 에너지 오차를 계산
- step2. 에너지 오차 예측법을 이용하여 적절한 격자 크기를 계산
- step3. 격자밀도지도 및 밀도 함수 구성
- step4. 형상경계면의 절점 재구성
- step5. 격자밀도함수에 맞게 절점추가 및 이동
- step6. 구성된 절점을 이용하여 전체 격자 재구성 및 최적화를 통한 격자유연화

2.2 에너지오차 및 목표 격자크기 계산

이 과정은 홍진태⁽²⁾의 과정을 그대로 사용하며 요약한 내용은 다음과 같다.

강소성 유한요소해석에 이용되는 변분방정식⁽⁷⁾ (식(1))로부터 이전 단계의 요소들에서 계산된 유효 변형률 값 및 유효 응력을 구한 후, 각

요소의 소성변형에너지(식(2)) 및 소성변형에너지 오차(식(3))를 정의할 수 있다. 식(2),(3)로부터 최대허용 에너지 오차는 식(4)와 같이 정의된다.

$$\sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega} (\bar{\sigma} + \alpha \Delta t \dot{\epsilon} H') \delta \bar{\epsilon} dV + K^* \int_{\Omega} \dot{\epsilon} \cdot \delta \dot{\epsilon} dV - \int_{\Omega} (f_i + \alpha \Delta f_i) \delta v_i dS \right] = 0 \quad (1)$$

$$\|E\|^2 = \sum_{m=1}^M \|E\|_{ele}^2 = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} (\hat{\sigma}'_{ij} \hat{\epsilon}_{ij} - p \hat{\epsilon}_{kk}) d\Omega \quad (2)$$

$$\|e\|_{ele}^2 = \int_{\Omega} (\bar{\sigma}' - \hat{\sigma}') : (\dot{\epsilon} - \hat{\epsilon}) d\Omega \quad (3)$$

$$\bar{e}_{max} = \bar{\eta} \frac{\|E\|}{\sqrt{M}} \quad \text{where } \eta_l = \frac{\|e\|_{ele}}{\|E\|_{ele}} \leq \bar{\eta} \quad (4)$$

여기서, $\bar{\sigma}'$, $\dot{\epsilon}$ 은 $\hat{\sigma}'$, $\hat{\epsilon}$ 을 요소의 절점 값으로 유연화시킨 후, 보간하여 구한 값이며, $\bar{\eta}$ 는 최대 허용 오차율이다. M 은 전체 요소의 개수이다. 식(4)로부터 새로운 요소의 크기는 다음과 같이 결정한다.

$$h^{new} = \frac{h_{elem}}{\xi_{elem}^{1/p}} \quad \text{where } \xi_{elem} = \frac{\|e\|_{elem}}{e_{max}} \quad (5)$$

여기서, h_{elem} 은 현재 요소의 크기이다.

위에서 구한 h^{new} 는 요소의 크기로 길이를 의미하므로 2 차원에서는 면적을, 3 차원에서는 부피를 의미할 수 있도록 다음과 같이 격자의 밀도를 구한다.

$$D_i = \frac{\alpha_n}{(h_i^{new})^n} \quad (6)$$

여기서, n 은 차원 수를 의미한다.

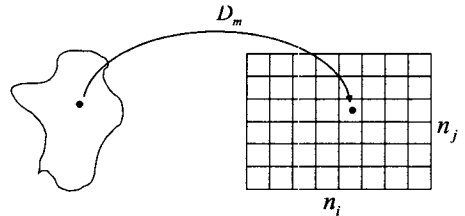


Fig. 2 Schematics of mesh density map

2.3 격자 밀도지도 및 밀도함수 구성

현재의 소재형상 전체를 에워싸며, 축좌표 방향으로 n_i, n_j 개씩 나누어진 배열에 각 요소에서

구한 면적밀도를 저장한다. 여러개의 요소가 포함되는 배열에서는 밀도값을 평균하여 적용한다.

각 배열에서 하나의 셀을 에워싸는 8개의 셀의 밀도값을 이용하여 반경방향 기저함수(radial basis function, 식(7))으로 $(n_i - 2) \times (n_j - 2)$ 개의 각 위치별 밀도함수를 구성한다.

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}} \quad (7)$$

이로부터 구성된 밀도함수를 이용하여 사상과 보간의 방법⁽⁴⁾으로 형상경계면의 절점을 재구성한다.

2.4 격자구성 및 절점이동

격자는 우선 convex hull 방법으로 초기 삼각망을 구성한 후, 각 요소의 절점들에서 계산된 격자밀도(식(8))를 이용하여 식(9)과 같이 밀도가중 내적법(weighted inner-product)으로 추가할 절점의 좌표를 결정한다.

$$d = \sum_{i=1}^{Num_neighbor} w_i \varphi(\|x - x_i\|) \quad (8)$$

$$x_{new} = \frac{\sum d_i x_i}{\sum d_i} \quad (9)$$



Fig. 3 Schematics of point insertion technique

위의 과정을 수차례 반복하여 모든 요소의 크기가 제시된 밀도를 만족할 경우, 절점 추가를 통한 격자 구성을 마친다. 여기서 구성된 격자는 요소의 품질이 좋지않으므로, Brackbill 등⁽¹⁰⁾이 제안한 매끄러움(smoothness) 유연화 방법을 이용하여 요소의 품질을 향상시킨다. 그러나 이 격자는 밀도함수에 이상적으로 적응한 형태가 아니므로 각 요소의 면적(D(x))과 그 위치에서의 밀도함수값으로부터 구한 목표 크기(f(x)) 차가 최소가 되도록 다음의 최적화 식을 통해 절점들을 이동시킨다.

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{num_neighbor} (D(\tilde{x}_i) - f(\tilde{x}_i))^2 \right\} \quad (10)$$

위 과정을 통해 최종적으로 구해진 격자는 구

조적 문제로 인하여 얇은 요소가 존재하므로, 이 격자의 절점들을 이용하여 전체적으로 격자를 재구성하여 구조적 문제들을 최소화한다.

3. 격자구성 결과

3.1 2 차원 예제

인장응력을 받는 중공강판에서 에너지오차에 따른 격자밀도지도를 구한 것은 Fig.4 와 같다. 소재의 형상이 1/4 대칭이므로 전체의 1/4 만 구성하였다. 위에서 구해진 격자밀도지도를 이용하여 격자를 구성한 결과 및 구성된 격자의 밀도분포를 Fig. 5 에서 비교하였다.

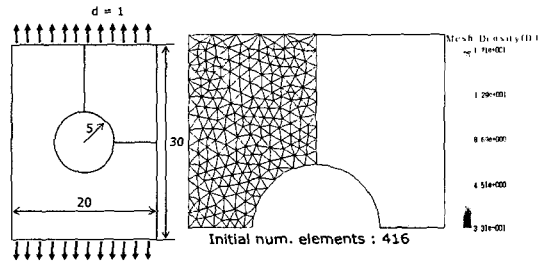


Fig. 4 Description of mesh density map in plate hole

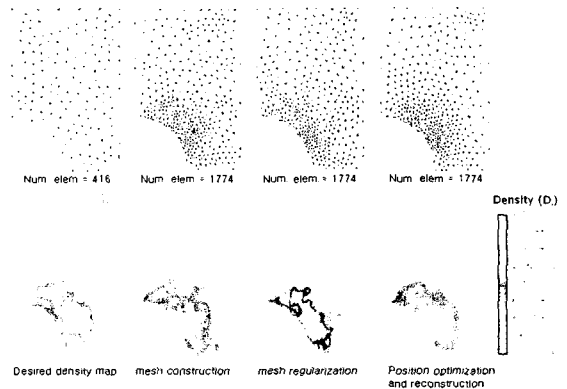


Fig. 5 Comparison of the mesh distribution and density map in the plate hole

그림에서 볼 수 있듯이, 절점 삽입법으로만 격자구성이 되었을 때 산재된 밀도 분포를 나타내던 격자가 유연화 및 최적화를 거치면서 제시된 격자밀도분포에 잘 적응함을 볼 수 있다.

3.2 3 차원 테스트

위 알고리즘의 3 차원 형상에 적용 가능성을 테스트하기 위하여 Fig.6 과 같이 정육면체의 모형에 격자밀도지도를 구성하고 격자밀도 함수를 구성하여 격자를 구성하여 격자의 분포를 비교

하였다.

그림에서 볼 수 있듯이, 절점삽입법으로 구성된 격자로부터 최적화 과정 및 재구성 과정을 거치면서 더욱 격자밀도지도에 적응하여 구성됨을 볼 수 있다.

이상의 2 차원과 3 차원 예제에서, 에너지 오차를 이용하여 구성된 격자 밀도함수에 맞추어 Delaunay 방법으로 격자를 재구성 하였으며, 비교적 잘 적응하였음을 알 수 있다.

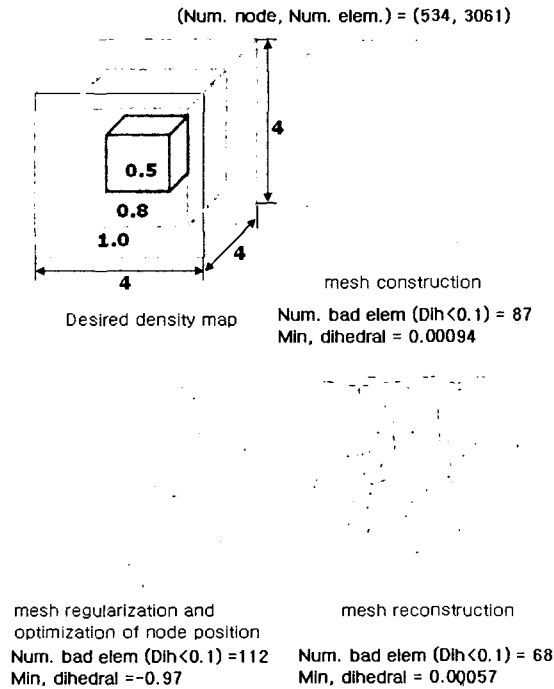


Fig.6 Comparison of the mesh distribution in the cube

4. 결론

본 연구에서는 Delaunay 방법을 이용한 격자 재구성 시, 해석의 정확도를 높이기 위해 에너지 오차방법을 이용하여 적절한 격자크기를 구하고, 그로부터 격자밀도함수를 구성하였다. 구성된 격자밀도함수에 맞추어 적절한 분포로 경계면 절점을 재구성하였으며, 내부 격자도 격자밀도에 맞게 Delaunay 방법을 이용하여 구

성하였다. 또, 요소의 품질을 향상시키기 위하여 최적화 방법을 이용한 격자유연화를 수행하였으며, 구성된 격자와 밀도함수와의 적응성 향상을 위하여 최적화방법으로 절점을 이동하였으며, 격자의 구조적 문제점 해결을 위하여 구성된 절점을 이용하여 전체 격자를 재구성 하였다.

참고 문헌

- (1) O. C. Zienkiewicz and J. Z.Zhu, 1987, "A simple error estimate and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.24, pp. 337~357.
- (2) 홍진태, 이석렬, 박철현, 양동열, 2004, "오차 예측과 격자밀도 지도를 이용한 적응 Delaunay 격자생성방법", *한국소성가공학회지*, Vol. 13, No. 4, pp. 334~341.
- (3) P. Chew, 1987, "Constrained Delaunay triangulation", *ACM*, New York.
- (4) T. J. Baker, 1989, "Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using the constrained Delaunay triangulation", *Eng. Comput.* Vol. 5, pp.161~175.
- (5) P. M. Knupp, 2000, "Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities Part I-a framework for surface mesh optimization", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 48, pp. 401~420.
- (6) 홍진태, 이석렬, 양동열, 2003, "격자압축을 이용하여 구성된 격자의 효과적인 격자유연화 방법", *한국소성가공학회지*, Vol. 12, No. 4, pp. 340~347.
- (7) J.H. Yoon and D.Y. Yang, 1988, "Rigid-plastic finite element analysis of three-dimensional forging by considering friction on continuous curved dies with initial guess generation", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 30, pp. 887~898.
- (8) j. Brackbill and J. Saltzman, 1982, "Adaptive zoning for singular problems in two dimensions", *J. Comput. Phys.*, Vol. 46, pp. 342~368.