



다수 관리점을 한 개의 관리점으로 통합 관리하는 방법(T^2 관리도)연구

서울대학교 기과연 통계 연구소

발표자 : 책임 연구원 이 명 주

1. T^2 관리도의 목 적

급속도로 변화하는 산업현장의 IT화 와 품질 정보화에 부합하기 위해서는 다수의 관리점을 동시에 한 개의 관리점으로 압축하고 단순화하여 시계열적인 Batch Process 관리가 요구되고 있다. 이를 달성하기 위해 다수의 인과관계 관리점들(X_s, Y_s)을 Mahalanobis 거리를 이용하여 관리점 데이터를 그룹 단순화 하고 사전관리도인 Hotelling's T^2 관리도법을 크게 2가지 단계(Phase)로 나누고 각 단계별 2가지 형태로 분류하여 활용법에 대한 이론을 제시한다. 그리고 산업현장에 도입 활용하기 위해서 관리 점 들을 자동측정에 의한 DB구축과 Real Time으로 품질요인을 추적하는 조 기경보 시스템으로 구축하고 실제 적용하는 프로그램을 개발하는데 있다.

2. T² 관리도의 특징

1) 2개이상의 관리항목의 변화를 동시에 관찰하는 관리도로서 개별 관리도의 Warning 기능을 살펴 보지 않아도 하나의 관리도로 이상징후를 민감하게 발견할 수 있다. 다만 Warning 발생시 하나로 통합 하여 관리하는 것으로 여러 개의 관리도를 일일이 예는 개별 관리도를 살펴보아야 한다.

2) 개별 관리도가 찾아내지 못하는 이상징후를 발견할 수 있는데 이는 상관관계가 존재하는 변수 그룹에서 변수들 끼리의 상관관계에 이상이 있으면 발견해 준다. 예로 온도 변수들의 양의 상관관계가 존재하는 변수의 관계에서 한 변수의 값이 커졌을 때 다른변수의 값이 작아진다면 이를 이상이라고 탐지한다. 즉 Tank 온도 프로파일 이상(상관관계 이상)과 같이개별 관리도로는 찾아낼 수 없는 Warning을 탐색해 낼 수 있다.

3) 각 변수의 데이터 값이 목표치에서 멀어질수록 T² 값이 커지고 Warning을 주게 되고 단순히 목표치를 벗어난다고 해서 T² 값이 커지는 것은 아니고, 변수가 움직이는 산포를 고려하여, 그 산포범위보다 크게 움직일때 T² 값이 커지게 된다.

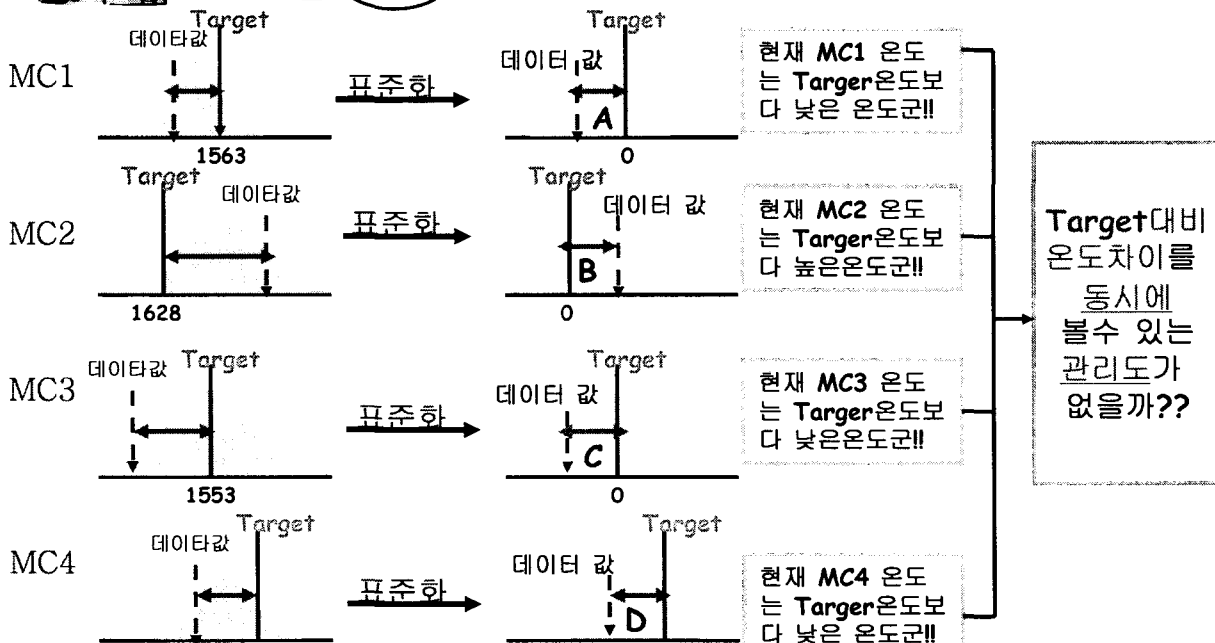
3. T² 의미



각 MC온도 마다 Target도 다 틀리고 표준편차도 틀리니 비교를 할 수가 없군!!



현재 MC온도는 Target대비 얼마나 차이가 날까??



4. T² 관리도의 계산방법

T² 값의 대략적 계산식

$$\text{Let } A = \frac{MC1 - \text{Target}(MC1)}{MC1 \text{의 표준편차}}$$

$$\text{Let } B = \frac{MC2 - \text{Target}(MC2)}{MC2 \text{의 표준편차}}$$

$$\text{Let } C = \frac{MC3 - \text{Target}(MC3)}{MC3 \text{의 표준편차}}$$

$$\text{Let } D = \frac{MC4 - \text{Target}(MC4)}{MC4 \text{의 표준편차}}$$

$$T^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

※ 실제 데이터 값이 Target에서 멀어질수록 T² 값이 커지게 되고 Warning을 주게 됨.

	$\frac{MC1 - \text{Target}}{MC1 \text{ 표준편차}}$	$\frac{MC2 - \text{Target}}{MC2 \text{ 표준편차}}$	$\frac{MC3 - \text{Target}}{MC3 \text{ 표준편차}}$	$\frac{MC4 - \text{Target}}{MC4 \text{ 표준편차}}$	T ²
07 /03	A1	B1	C1	D1	= A1 ² + B1 ² + C1 ² + D1 ²
07 /04	A2	B2	C2	D2	= A2 ² + B2 ² + C2 ² + D2 ²
07 /05	A3	B3	C3	D3	= A3 ² + B3 ² + C3 ² + D3 ²
07 /06	A4	B4	C4	D4	= A4 ² + B4 ² + C4 ² + D4 ²
07 /07	A5	B5	C5	D5	= A5 ² + B5 ² + C5 ² + D5 ²

5. T² 관리도의 계산방법

T² 값의 실제 수학적 공식

p : 변수개수, N : 데이터 수

Subgroup size	Target	T ²	Distribution (F분포)
1	Known	$(X - \text{Target}(X))' s^{-1} (X - \text{Target}(X))$	$\left[\frac{p(N-1)}{N-p} \right] F(p, N-p)$
	Unknown	$(X - \bar{X})' s^{-1} (X - \bar{X})$	$\left[\frac{p(N+1)(N-1)}{N(N-p)} \right] F(p, N-p)$

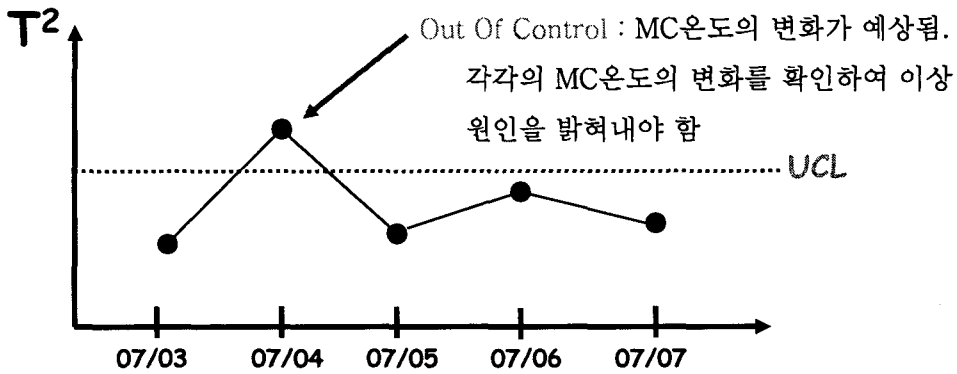
UCL은 F 분포의 95% ,99% 또는 ±3σ수준

예 : 변수를 MC 온도라 하면...

$$X = \begin{pmatrix} MC1 \\ MC2 \\ MC3 \\ MC4 \end{pmatrix} \quad \text{Target} = \begin{pmatrix} \text{Target}(MC1) \\ \text{Target}(MC2) \\ \text{Target}(MC3) \\ \text{Target}(MC4) \end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} \text{Var}(MC1) & \text{COV}(MC1,MC2) & \text{COV}(MC1,MC3) & \text{COV}(MC1,MC4) \\ \text{COV}(MC1,MC2) & \text{Var}(MC2) & \text{COV}(MC2,MC3) & \text{COV}(MC2,MC4) \\ \text{COV}(MC1,MC3) & \text{COV}(MC2,MC3) & \text{Var}(MC3) & \text{COV}(MC3,MC4) \\ \text{COV}(MC1,MC4) & \text{COV}(MC2,MC4) & \text{COV}(MC3,MC4) & \text{Var}(MC4) \end{pmatrix}$$

5.1 T^2 의 UCL



- T^2 는 다변량 자료 즉, 2개 이상의 변수의 변동을 하나의 차트에 표현하는 관리도 기법.
- 변수 각각의 변동을 통해 감지해 내지 못하는 부분을 여러 변수의 변동을 동시에 살펴봄으로써 이상상태를 민감하게 감지.
- 유사한 특성을 지닌 변수들 예를 들면 앞의 그림에서 설명한 것처럼 MC온도 전체를 하나의 변수군으로 묶어서 MC의 변화를 단 하나의 그래프로 동시에 관찰할 수 있다. 단 하나의 변수값만 변화하더라도 T^2 값은 커지게 되고 이 값이 상한선(UCL)을 벗어나게 되면 이상상태를 의심해 봐야함.

6. T^2 관리도의 4가지 Case 요약

T^2 계산의 4가지 Case정리

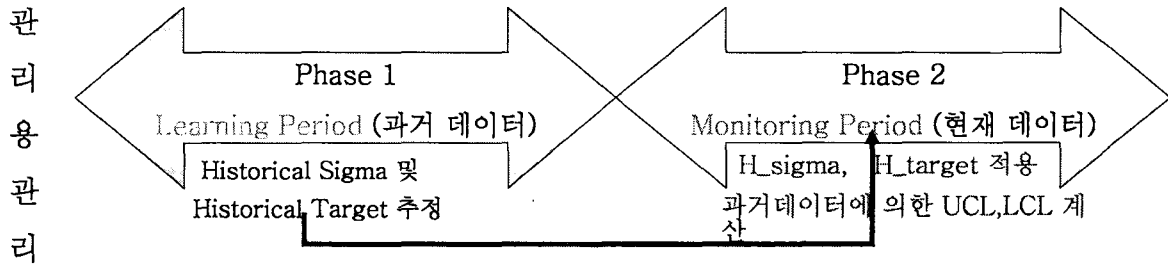
분산 공분산 행렬	Target	현재 데이터의 평균을 사용	주어진 Target값 사용
현재 데이터의 분산 공분산 행렬 사용		Case 1	Case 2
과거 안정상태 시점의 분산 공분산 행렬 사용 (Historical Variance Covariance Matrix 사용)		Case 3	Case 4

해석용 관리도 : Case1, (Case2) - 현재 데이터만으로 관리도를 그림

관리용 관리도 : (Case3), Case4 - 과거데이터(Historical Period)를
기준으로 현재를 관리

※ 조기경보시스템에서 Case4를 가장 많이 사용함 (권장 Case)

7. T² 관리도의 Phase별 적용법



도 과거의 데이터 값을 이용하여 Historical Sigma 및 Target을 구하고, 이를 현재의 데이터에 적용함

자기상관이 높은 변수(Highly Auto correlated variable)의 경우

Phase1의 기간을 조정하여 잦은 Warning문제를 해결할 수 있다.

Phase1의 기간을 짧게 하면 Tight한 관리를 할 수 있고, Phase1기간을 길게 하면 약간 Loose 하게 관리할 수 있다.

변수 특성에 따라 Phase1기간을 달리하여 관리하는 것이 좋음.

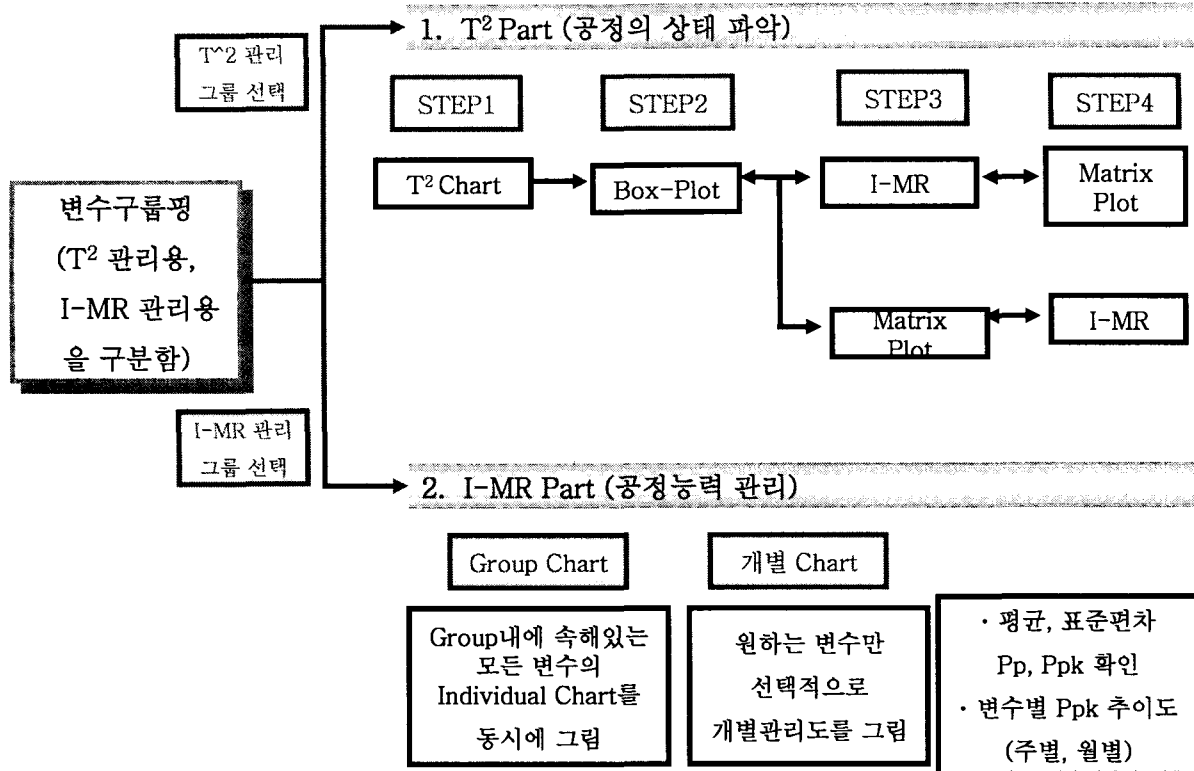
(Case Study결과 - Non Normal Type(자기상관이 높은 변수)의 경우 : 3개월,

Normal Type의 경우 : 1개월 정도로 관리하면 적절할 것으로 예상)

다 변량(X_s / Y_s) 관리 점을 위한 조기 경보 System 사례

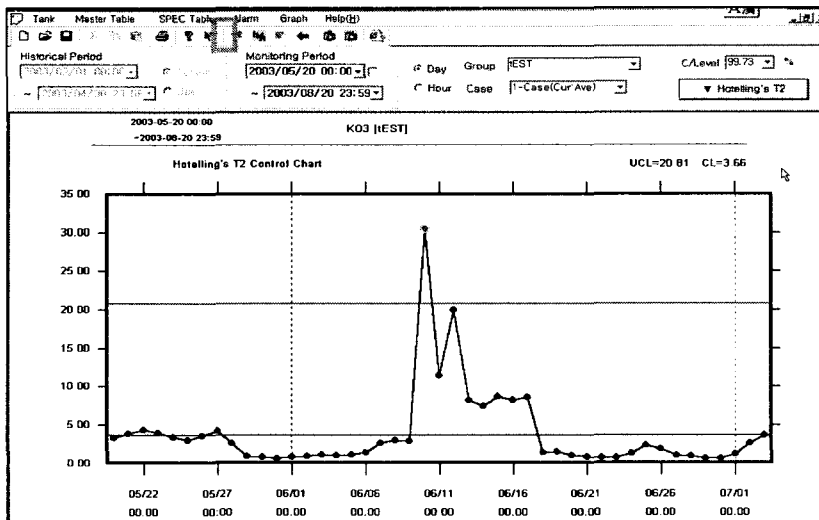
서울대학교 통계연구소

1. T² 관리도를 활용한 조기경보 시스템 흐름도



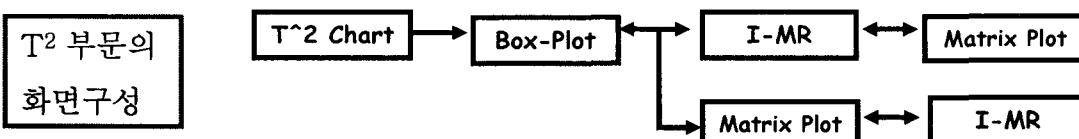
2. T² 관리도 작성법

T² 부문 초기화면 T² 버튼을 누르면서 실행.

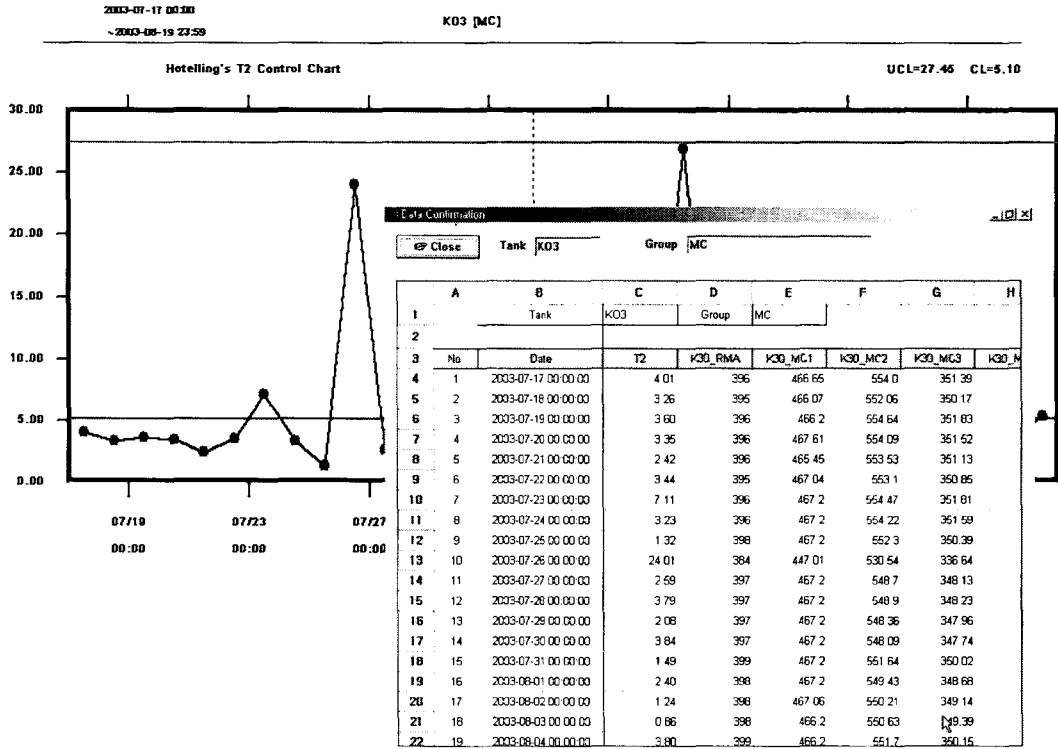


1. Tank선택
2. Historical Period 선택
3. Monitoring Period 선택
4. Group 선택
5. 분석 Case 선택

- ◆ Data Screening 기능
- ◆ Y축 조정 기능
- ◆ 분석 데이터 보기 및 Excel저장기능

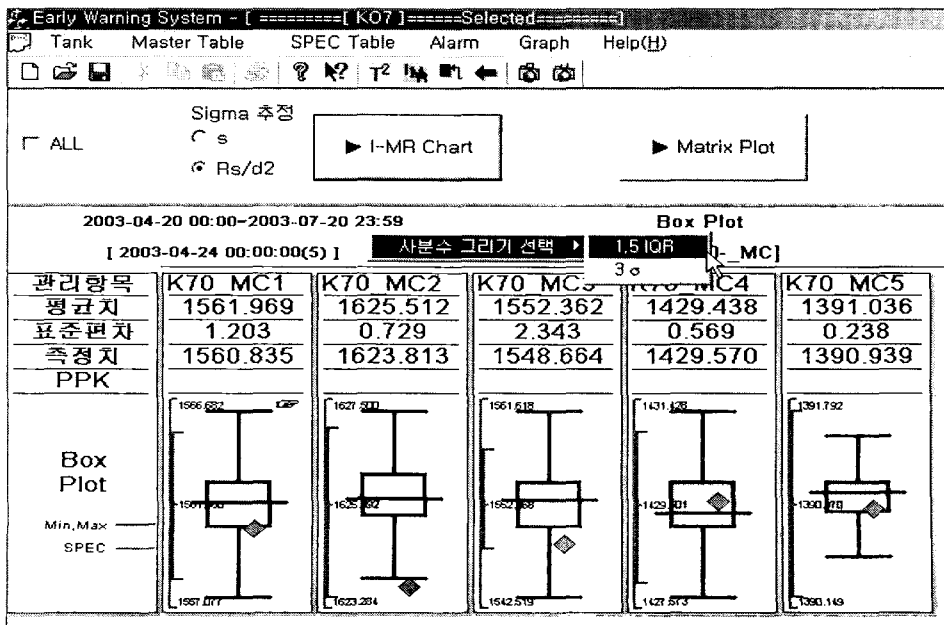


3. 데이터 보기 - 실제데이터 확인



4. Box Plot

T² Graph에 나와있는 데이터를 더블클릭!!



사분위수 선택

1.5 IQR, 3σ

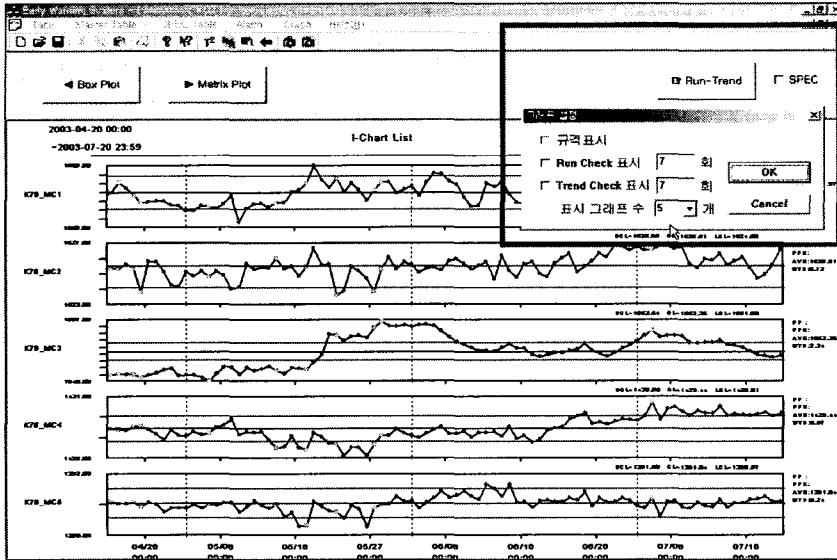
* 미니맵 계산:

1.5 IQR

5. 다 변수 I Chart

All을 체크하고 I-MR Chart 클릭 시

※ T²관리도 -> I-MR관리도로 넘어올 땐 항상 해석용 관리도를 그림

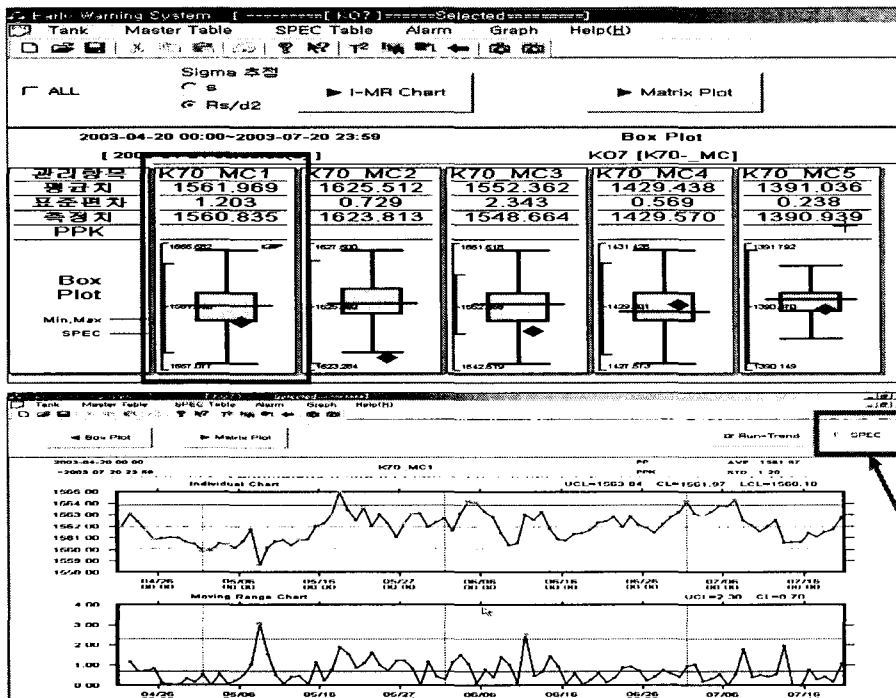


1. 한화면에 보여질
그래프 수 선택
Run-Trend 버튼 클릭
-> 그래프 표시 수 지정

2.
◆ 빨간색 데이터 점 표시:
I-MR 관리도에서
Out-Of-Control
◆ 연두색 데이터 점 표시:
T²관리도에서
Out-Of-Control

6. I-MR Chart

Box-Plot에서 일부변수만 체크하고 I-MR Chart 클릭 시



All Check를 지우고
특정변수만 선택 후
I-MR Chart버튼
클릭!!

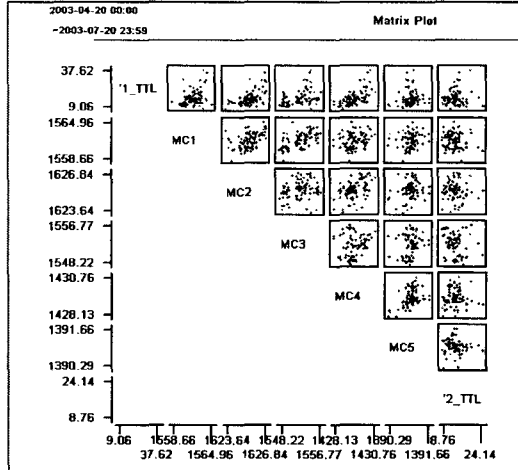
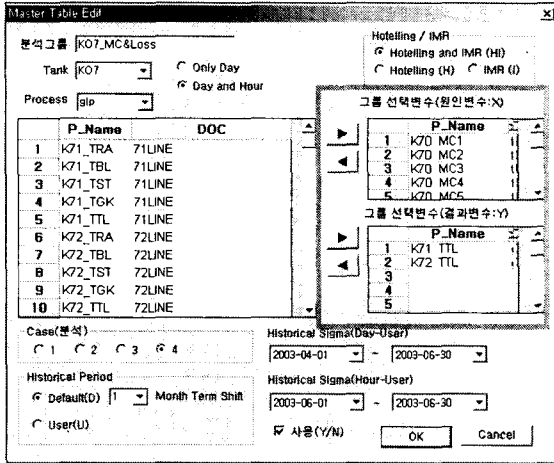
↓
선택한 변수에 대한
관리도가 그려짐.

※ Spec버튼 클릭 시
Spec이 추가로
그려짐

7. 다 변수 관리 점의 상관 Matrix Plot

Matrix Plot 에서의 Tip!!

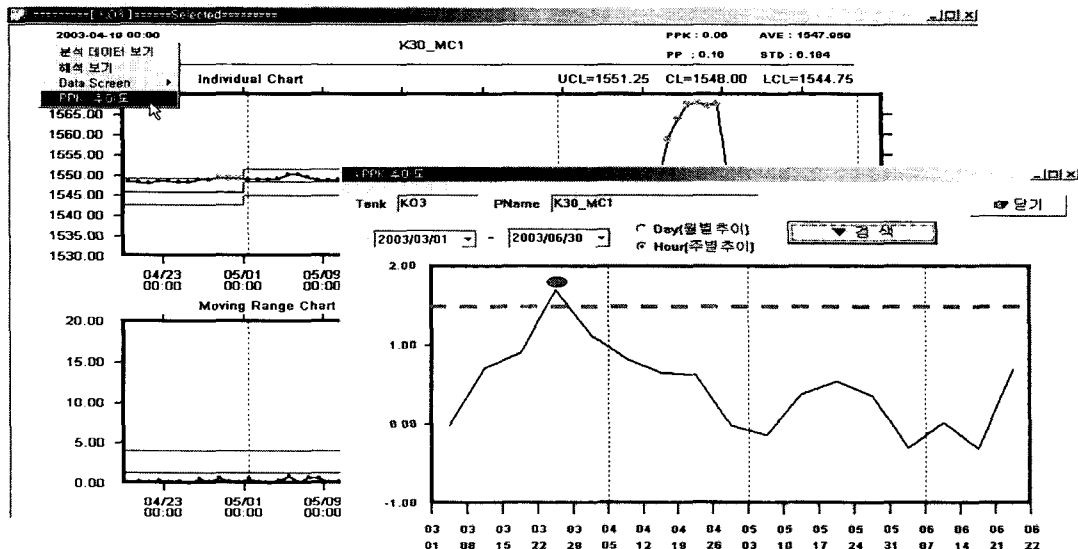
변수를 Grouping할때 결과변수 Y를 함께 묶는 Matrix Plot용 Group을 만들어 놓으면, Matrix Plot을 그려 X-Y 상관관계를 보는데 유용.



불량데이터와 MC온도의 상관관계를 확인할 수 있음.

8. Ppk 추이도

*. 해당변수에 대하여 주별, 월별 PPK 추이도 파악 (I-MR Chart에서 단일 변수 선택시 확인가능)



Ppk추이도를 통해 변수에 대한 공정능력관리를 할 수 있음.

9. 요약 및 고찰

과거의 관리 안정된 관리점 데이터 군(set)의 생성은 다 변량 관리 기법을 Batch 프로세스에 적용하는데 필요한 절차이다. 이 기법을 적용함에 있어 중요한 3가지를 강조하고 있다. 이상점 제거, 변수 추정, 그리고 유의한 배치공정에 대한 평균치 차이에 대한 위치, 배치 공정의 관리점 데이터가 동일한 다 변량 정규분포를 한다면은 T^2 통계량이 이상 점을 탐지하는 데는 탁월한 통계량이라고 본다. 또한 공통적인 원인이 다른 배치 공정에도 다 변량 정규분포를 가정한다면 T^2 통계량을 활용하여 이상점들을 탐지하는 데도 강력한 관리 기법이라고 본다. 그외 추후 관찰할 사항은 관계 있는 원인(Xs)과 결과(Ys)변수들을 T^2 통계량으로 단순화 하여 인과관계 파악을 실시간 으로 관리가 가능토록 해야 할 것이다.

10. 참고문헌

- 1) Applying Hotelling's T^2 Statistic to Batch Processes (2001); ROBERT L. MANSON 외 2인 : Southwest Research Institute, San Antonio, TX 78228-0510 (JQT Vol.33,)
- 2) Manson,R.L;Tracy,N.D;and Young,J.C(1995)"Decomposition of T^2 for Multivariate Control Chart Interpretation" Journal of Quality Technology 27,pp99-108
- 3) Mason,R.L;Tracy,N.D;and Young,J.C.(1997)"A Practical Approach for Interpreting Multivariate T^2 Control Chart Signals"Journal of Quality Technology 29,pp396-406
- 4) Manson,R.L. and Young,J.C(1998) "Hotelling's T^2 : A Multivariate Statistic for Industrial Process Control" Proceedings of the 52nd Annual Quality Congress,pp78-85
Statistic in Multivariate Process Control" Journal of Quality Technology31,pp155-165
- 5) Manson,R.L and Young,J.C(1999b)"Autocorrelation in Multivariate Processes" in Statistical Monitoring and Optimization for Process Control edited by S.Park and G. Vining. Marcel Dekker,Inc,New York,NY,pp223-239
- 6) Nomikos,P. and Macgregor,J.F (1995)"Multivariate SPC Charts for Monitoring Batch Processes" Technometrics 37,pp41-59
Seber,G.A.F(1984) Multivariate Observations.John Wiley & Sons,New York,NY.
- 7) Sullivan,J.H and Woodall,W.H (1996)"A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations" Journal of Quality Technology 28,pp398-408