

런규칙을 사용한 개량된 경계선 수정계획의 설계와 Markov 연쇄의 적용

박창순 / 중앙대학교 수학과통계학부

Abstract

The bounded adjustment is known to be more efficient than repeated adjustment when the cost is incurred for engineering process control. The procedure of the bounded adjustment is to adjust the process when the one-step predicted deviation exceeds the adjustment limit by the amount of the prediction. In this paper, two run rules are proposed and studied in order to improve the efficiency of the traditional bounded adjustment procedure. The efficiency is studied in terms of the standardized cost through Monte Carlo simulation when the procedure is operated with and without the run rules. The adjustment procedure operated with run rules turns out to be more robust for changes in the process and cost parameters. The Markov chain approach for calculating the properties of the run rules is also studied.

1. 서론

경계선수정은 수정통계량이 지정된 경계선을 초과할 때에만 수정을 하게 되며 이때의 수정량은 지수가중이동평균(exponentially weighted moving average ; EWMA) 통계량을 주로 사용하게 된다. 특히 EWMA 통계량은 잡음모형이 IMA(0,1,1)모형을 따를 때 MMSE가 됨이 알려져 있고, 다른 잡음모형에서도 효율적인 공정예측치로 널리 사용되고 있다.

이 논문에서는 잡음모형이 IMA(0,1,1)모형을 따를 때의 경계선수정에 대해 알아보고,

이를 수정보완한 런규칙(run rule)을 사용한 경계선 수정절차에 대해 연구하고 있다. 런규칙이란 관측값이 연속적으로 일정한 규칙을 만족하는 경우에 공정에 어떤 조치를 취하는 것을 의미한다.

2. 잡음모형

공정에 내재하는 잡음에 대한 모형은 IMA(0,1,1)모형이 가장 널리 이용되고 있다. 따라서 공정목표로부터의 편차인 잡음은 다음과 같이 정의한다.

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} \quad (1)$$

단, θ ; 평활모수,

$$\{Z_t\} \sim iid N(0, \sigma_a^2).$$

잡음에 대한 더 일반적인 모형으로 다음과 같은 ARMA(1,1)모형을 들 수 있다.

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} \quad (2)$$

이 때 $\phi = 1$ 이면 IMA(0,1,1)이 되고, $0 < \phi < 1$, $\theta = 0$ 이면 AR(1) 모형, $\phi = 1$, $\theta = 0$ 이면 확률보행(random walk)이 됨을 알 수 있다.

이 논문에서는 잡음모형으로 IMA(0,1,1)에 국한하여 경계선 수정방법에 대해 연구하고 있다.

3. 경계선수정

잡음모형이 식(1)을 따를 때에 MMSE는 다음과 같은 EWMA가 된다.

$$\hat{Z}_{t+1} = \lambda Z_t + \theta \hat{Z}_t \quad (3)$$

단, $\lambda = 1 - \theta$, $\hat{Z}_1 = 0$.

경계선수정의 절차는 다음과 같다. 지정된 경계선 L 에 대해 각 시점 t 에서

$$|\hat{Z}_{t+1}| \geq L$$

이면 수정을 하고 그렇지 않으면 공정을 계속한다. 수정을 할 때의 수정량은

$$Y_t = -\hat{Z}_{t+1}$$

으로 설정하여 수정후의 예측값은

$$\hat{Z}_{t+1} + Y_t = 0$$

이 된다. 따라서 수정후의 공정상태는 공정의 시작과 동일하게 된다.

경계선수정의 특성은 수정구간 (adjustment interval)과 제곱편차(squared deviation)에 의해 결정된다. 수정구간은 공정의 처음 시작부터 처음으로 수정할 때까지, 또는 수정 후부터 다음 수정까지의 시간간격을 나타낸다. 수정구간의 평균은 평균수정구간(average adjustment interval ; AAI)이라 한다. 제곱편차는 한 수정구간 내에서 발생하는 관측값의 목표치로부터의 제곱편차를 나타내며, 단위시간당 제곱편차의 평균을 평균제곱편차(mean squared deviation ; MSD)라 한다. 평균수정구간과 평균제곱편차는 함수 h 와 q 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$AAI = h(c) \quad (6)$$

$$MSD = \sigma_a^2 \{1 + \lambda^2 q(c)\} \quad (7)$$

단, $c = L / \lambda \sigma_a$.

이 때 c 를 표준화 수정한계 (standardized adjustment limit)라 한다.

경계선수정에서 발생하는 단위시간당 평균비용은 AAI와 MSD를 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$C = \frac{C_A}{AAI} + C_T \frac{MSD}{\sigma_a^2} \quad (8)$$

단, C_A ; 수정비용,

C_T ; 목표이탈비용 (단위 : σ_a).

이 때 C_A 는 한번의 수정에 필요한 평균비용을 나타내고 C_T 는 공정관측값이 목표치로부터 σ_a 만큼의 편차가 발생할 때 한 구간 동안 발생하는 평균비용을 의미한다.

식(6)과 (7)을 식(8)에 대입하고 재조정하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{C - C_T}{C_A} = \frac{1}{h(c)} + \frac{1}{R_A} q(c) \quad (9)$$

단, $R_A = (C_A / C_T) / \lambda^2$.

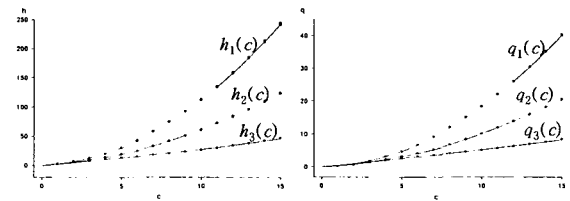
4. 런규칙을 사용한 경계선 수정

이 논문에서는 다음 세가지 런규칙을 이용한 경계선수정 절차에 대해 정의하고 그 효율을 비교하였다. 수정절차 A1은 기존의 경계선수정을 의미한다. 수정절차 A2는 수정절차 A1에 추가하여 연속된 3점중 2점이 $[2/3c, c)$ 또는 $(-c, -2/3c]$ 에 속하면 수정하는 절차를 나타낸다. 수정절차 A3는 수정절차 A2에 추가하여 연속된 5점중 4점이 $[1/3c, c)$ 또는 $(-c, -1/3c]$ 에 속하면 수정하는 절차를 나타낸다.

세 종류의 경계선 수정절차에 대한 특성, 즉 AAI와 MSD는 모의실험을 통하여 계산하였다. 각 수정절차 A1, A2, A3에 해당하는 함수 $\{h, q\}$ 는 각각 $\{h_1, q_1\}$, $\{h_2, q_2\}$, $\{h_3, q_3\}$ 로 표현한다.

<그림 1>에서 검은 점은 모의실험의 결과이며 실선은 적합된 2차 회귀식을 나타내고 있다. <그림 1>의 결과에 의하면 $h_1(c)$ 와 $q_1(c)$ 는 물론 $h_2(c)$, $q_2(c)$ 와 $h_3(c)$, $q_3(c)$ 도 R^2 가 매우 높아 c 의 2차 방정식으로 잘 적합됨을 알 수 있다.

<그림 2>는 주어진 R_A 값에 대해 c 의 값에 따른 SC의 모의실험결과를 보여주고 있다.



$$h_1(c) = 1.3212c + 0.9912c^2 \quad R^2 = 0.999983$$

$$h_2(c) = 1.8876c + 0.4217c^2 \quad R^2 = 0.999967$$

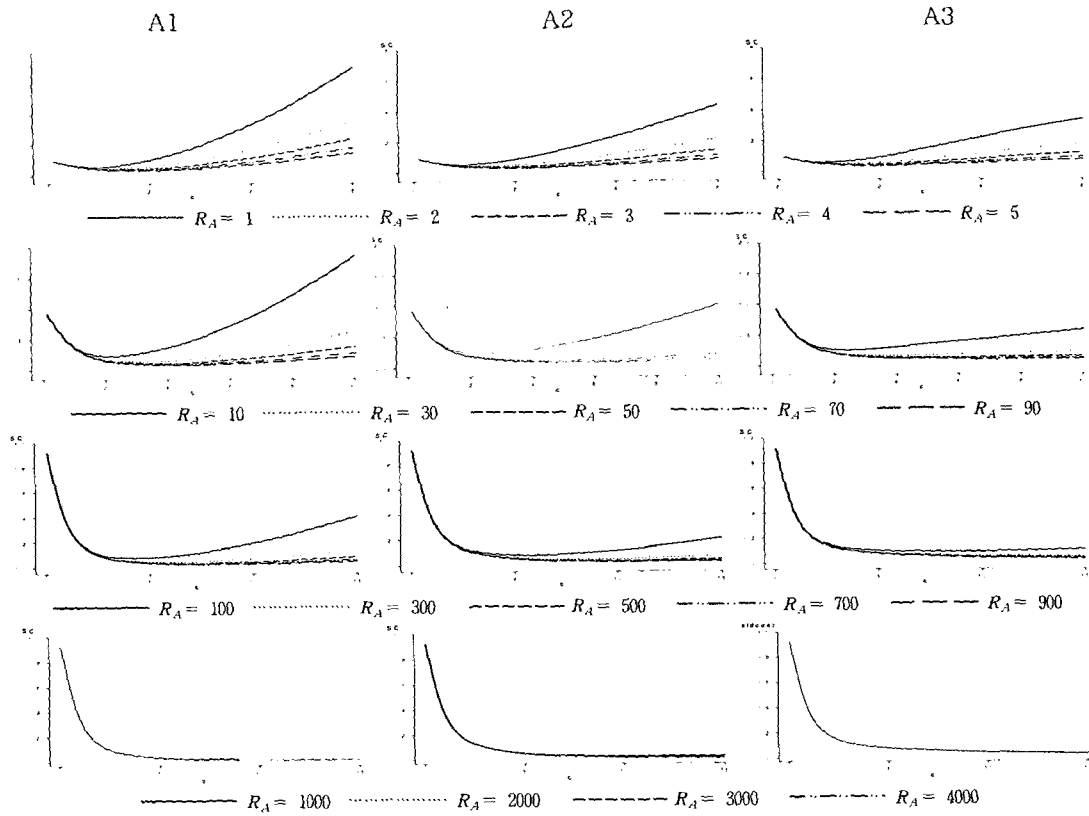
$$h_3(c) = 2.3654c + 0.0483c^2 \quad R^2 = 0.999359$$

$$q_1(c) = 0.1382c + 0.1697c^2 \quad R^2 = 0.999989$$

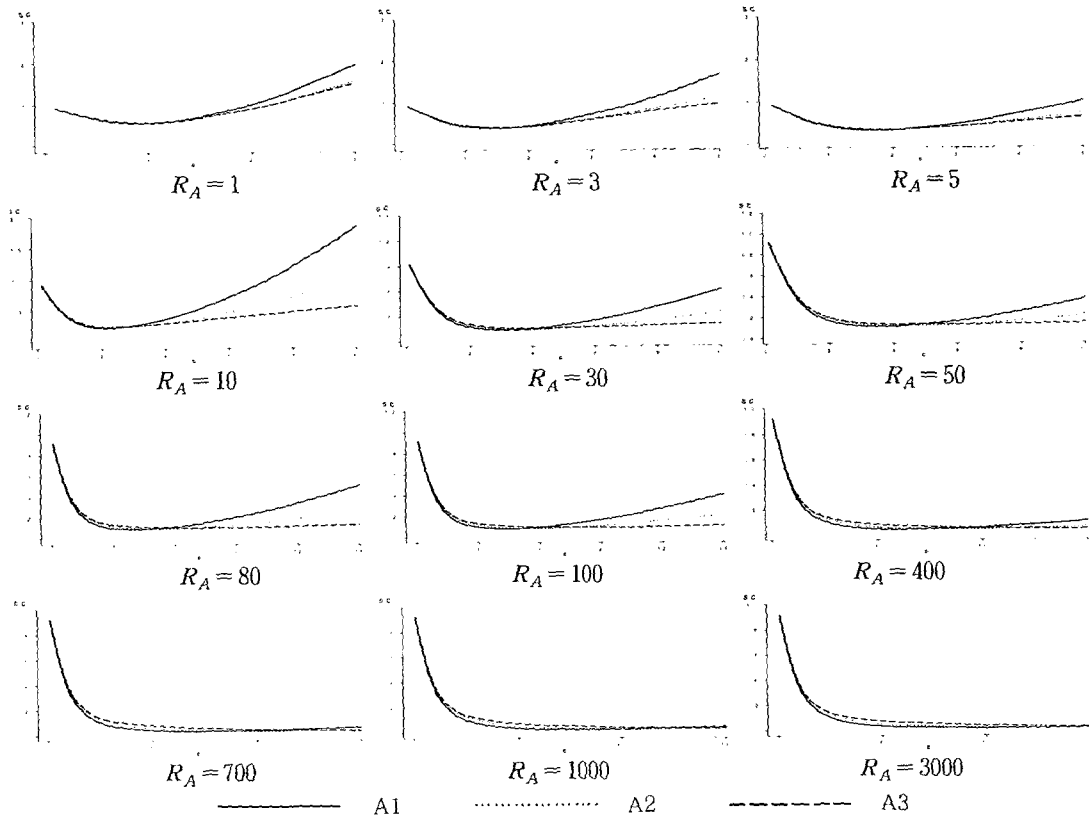
$$q_2(c) = 0.2886c + 0.0721c^2 \quad R^2 = 0.999951$$

$$q_3(c) = 0.4969c + 0.0043c^2 \quad R^2 = 0.999148$$

<그림 1> 수정절차에 따른 함수 h 와 q 의 형태 및 적합된 절편없는 2차 회귀식



<그림 2> 표준화 수정한계(c)에 따른 표준화비용(SC)의 형태



<그림 3> 세 수정절차(A1, A2, A3)에 따른 표준화비용(SC)의 비교 플롯

이 그림에서 쉽게 알 수 있듯이 동일한 R_A 와 c 에 대해 수정절차 A3가 A2보다, A2가 A1보다 더 작은 SC값을 유발하는 경향이 있음을 알 수 있다.

5. 런규칙의 효과

<그림 2>의 각 그림에서는 지정된 수정절차와 다양한 종류의 R_A 값(매우 작은 값 $R_A=1$ 에서 매우 큰 값 $R_A=4000$)에 대해 SC를 c 의 함수로 표현하였다. 모든 그림에서 알 수 있듯이 c 의 변화에 대한 SC의 값의 변화는, A1은 A2보다 더 민감하고, 또한 A2는 A3보다 더 민감함을 알 수 있다. 이 뿐만 아니라 R_A 의 변화에 대한 SC의 값의 변화에도 A1은 A2보다 더 민감하고, 또한 A2는 A3보다 더 민감한 것으로 나타나고 있다. 특히, A3는 유사한 R_A 값에 대해서는 변화가 미미하며, 이러한 현상은 R_A 값이 커질 때 더 두드러지고 있다.

<그림 3>에서는 개개의 R_A 값에 대해 c 의 변화에 따른 세 수정절차의 SC값을 비교 플롯하였다. 특이한 사항은 시각적으로 쉽게 확인할 수 있듯이 SC의 최소값을 유발하는 c 의 값은 수정절차에 따라 다르지만, 그 때의 SC의 최소값은 항상 거의 일치된 값을 보이고 있다. 그러나 수정절차 A2나 A3는 비용모수 R_A 와 표준화 수정한계 c 의 변화에 둔감하기 때문에, 그 절차상의 추가적인 노력에 대한 보상이 보장된다고 할 수 있다.

모수 추정에서의 부정확성은 주어진 R_A 에서 최적의 c 값을 선택하기 어렵게 만들어 c 의 변화에 민감한 수정절차는 효율성이 급격히 떨어지게 된다.

런규칙을 사용할 때 예상되는 또 다른 장점은 수정비용이 고정되어있지 않고 수정량의 크기에 따라 변하는 경우에 기대할 수 있다. 수정절차 A1보다 A2는, 또한 A2보다 A3는 수정량이 작은 경향이 있다. 이것은 절차 A1의 수정량은 항상 수정한계 L 보다 큰 반면에, 절차 A2의 수정량은 범위 $(2L/3, L)$ 내에

있을 가능성이 있기 때문이다. 또한 절차 A3의 수정량은 범위 $(L/3, 2L/3)$ 내에 있을 가능성이 있다. 만일 수정량이 클수록 수정비용이 증가한다면 수정절차 A2는 A1보다, A3는 A2보다 표준화비용이 줄어들 것으로 기대된다.

6. 런 규칙에 대한 Markov chain의 적용

이 절에서는 런규칙 A2에 대한 Markov chain을 적용하는 방법에 대해 알아보았다. 먼저 구간 $(-\infty, \infty)$ 를 4개의 부구간으로 분할하고 각 부구간에 포함되는 점은 아래와 같이 표시한다.

구 간	기호
$(-\infty, -c] \cup [c, \infty)$	•
$[c_1, c)$	+
$(-c_1, c_1)$	0
$(-c, -c_1]$	-

런규칙 A2를 적용할 때 두개의 연속된 점이 각 부구간에 포함되는 경우를 나타내면 아래 9개의 상태로 표현된다.

$$(0,-), (0,+), (+,-), (-,+), (-,0), (+,0), (0,0), A2, A1$$

단 (,)속의 첫 번째 요소는 바로 전 시점, 두 번째 요소는 현시점의 값이 포함된 부구간을 나타내고, A2는 연속된 세점중 두점이 부구간 $[c_1, c)$ 또는 $(-c, -c_1]$ 에 포함되어 수정하는 상태, A1은 한점이 구간 $(-c, c)$ 밖에 나타나서 수정하는 상태를 나타낸다.

위의 상태에 Markov chain의 전이행렬은 다음과 같다.

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0,-) & (0,+) & (+,+) & (-,+) & (-,0) & (+,0) & (0,0) & A2 & A1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0,-) \\ (0,+) \\ (+,+) \\ (-,+) \\ Q=(-,0) \\ (+,0) \\ (0,0) \\ A2 \\ A1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p_{+-} & p_{-0} & 0 & 0 & p_{-} & p_{-} \\ 0 & 0 & p_{+-} & 0 & 0 & p_{+0} & 0 & p_{++} & p_{++} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{-0} & 0 & 0 & p_{-+} & p_{-+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{+0} & 0 & p_{++} & p_{+-} \\ 0 & p_{0+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{00} & p_{0-} & p_{0-} \\ p_{0-} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{00} & p_{0+} & p_{0+} \\ p_{0-} & p_{0+} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{00} & 0 & p_{0-} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (10)$$

이 때 이 행렬 Q 의 0이 아닌 부행렬은 하나의 점에 대한 Markov chain을 통해 구할 수 있다. 먼저 한 점에 대한 Markov chain의 전이행렬은 다음과 같이 정의한다.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} - & 0 & + & \cdot \end{matrix} \\ \begin{matrix} - \\ 0 \\ + \\ \cdot \end{matrix} & \begin{bmatrix} P_{--} & P_{-0} & P_{-+} & P_{-\cdot} \\ P_{0-} & P_{00} & P_{0+} & P_{0\cdot} \\ P_{+-} & P_{+0} & P_{++} & P_{+\cdot} \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (11)$$

또한 행렬 P 는 구간 $(-c, c)$ 를 n 등분하여 n 개의 상태로 구분하고 다음과 같이 전이행렬을 구한다. 구간 $(-c, c)$ 를 n 등분할때의 i 번째 구간의 하한, 상한과 중심점을 각각 $l(i), u(i), p(i)$ 라 한다 ($i=1, 2, \dots, n$). 즉

$$\begin{aligned} p(i) &= -c + id - d/2 \\ l(i) &= p(i) - d/2 \\ u(i) &= p(i) + d/2 \end{aligned}$$

단, $d = 2c/n$.

이때 행렬 P 의 요소는, $Z \sim N(0, 1)$ 에 대해

$$P(i, j) = \Pr(l(i) < Z + x < u(j) | x = p(i))$$

이 되고 P 의 부행렬은 해당 전이확률 $P(i, j)$ 의 집합으로 구성된다. 부구간의 대칭성으로 인해 다음 사실을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{+-} &= p_{-+}, & p_{--} &= p_{++}, \\ p_{-0} &= p_{+0}, & p_{0-} &= p_{0+}, \\ p_{-\cdot} &= p_{+\cdot}. \end{aligned}$$

따라서 행렬 (10)에서 상태의 수를 줄인 연속된 두점의 상태로 나타낸 전이행렬은 다음과 같이 축소된 행렬로 표현될 수 있다.

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0,+), (-,+), (+,0), (0,0) \end{matrix} & \begin{matrix} A2 \\ A1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0,+), (-,+), (+,0), (0,0) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & P_{+-} & P_{+0} & 0 & P_{++} & P_{+\cdot} \\ 0 & 0 & P_{+0} & 0 & P_{++} + P_{+-} & P_{+\cdot} \\ P_{0+} & 0 & 0 & P_{00} & P_{0+} & P_{0\cdot} \\ 2P_{0+} & 0 & 0 & P_{00} & 0 & P_{0\cdot} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12)$$

행렬 (12)에서 일시(transient)상태만을 나타내는 부행렬을 V_s 라 하면 함수 $h_2(c)$ 와

$q_2(c)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} h_2(c) &= s' [I - V_s]^{-1} \mathbf{1} \\ q_2(c) &= s' [I - V_s]^{-1} S \end{aligned}$$

단, s 는 시작벡터,

S 는 해당 부구간의 중심점 $p(i)$ 의 제곱을 나타내는 행렬.

7. 결론 및 토의

이 논문에서의 경계선수정의 효율을 증대시키기 위한 런규칙을 제안하고, 그에 대한 특성을 도출하였다. 결과적으로 런규칙을 이용한 수정절차는 수정이용비 R_A 와 표준화 수정한계 c 에 대해 민감성이 둔화되어, 비용모수나 공정모수의 추정에 오차가 발생할 경우 좀 더 로버스트(robust)한 절차가 될 수 있음을 보였다.

세 종류의 수정절차에 따른 표준화비용의 최소값은 거의 동일한 값을 나타내어, 런규칙을 사용하여도 지역적(local) 최소값을 줄일 수는 없는 것으로 나타났다.

앞으로 연구할 수 있는 과제로는, 첫째 앞 절에서 언급한 바와 같이 수정비용이 수정량에 따라 변하는 경우에 대한 런규칙의 효율성을 연구해 보는 것을 제시할 수 있으며, 둘째로는 잡음모형이 IMA(0,1,1)으로 국한되지 않고 ARMA(1,1)모형을 따를 때의 런규칙에 대한 연구를 들 수 있다.

참고문헌

- [1] Box, G. E. P. and Kramer, T (1992), Statistical Process Control and Feedback Adjustment - A Discussion, Technometrics, Vol.34, No.3, pp.251-285.
- [2] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1994), Selection of Sampling Interval and Action Limit for Discrete Feedback Adjustment, Technometrics, Vol.36, No.4, pp.369-378.
- [3] Box, G. E. P. and Luceno, A. (1997), Statistical Control by Monitoring and Adjustment and Statistical Process Control, Journal of Quality Technology,

Vol.29, No.3, pp.248-260.

[4] Kramer, T. (1989), Process Control from an Economic Point of View, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin-Madison.

[5] Montgomery, D. C. (1999), A Perspective on Models and the Quality Science : Some Challenges and Future Directions, ASQ Statistical Division Newsletter, Vol.18, No.1, pp.8-13.

[6] Nelson, L. (1984), The Schewart Control Chart-Tests for Special Causes, Journal of Quality Technology, Vol.16, No.4, pp.237-239.

[7] Page, E. S. (1955), A Control Chart with Warning Lines, Biometrika, Vol.42, pp.243-257.