

# 두 개의 이상원인을 고려한 VSSI $\bar{X}$ 관리도의 통계적 특성

이호중 · 임태진

승실대학교 산업·정보시스템공학과

## Abstract

This research investigates statistical characteristics of variable sampling size & interval(VSSI)  $\bar{X}$  charts under two assignable causes. Algorithms for calculating the average run length(ARL) and average time to signal(ATS) of the VSSI  $\bar{X}$  chart are proposed by employing Markov chain method. Extensive sensitivity analysis shows that the VSSI  $\bar{X}$  chart is superior to the VSS or VSI  $\bar{X}$  chart as well as to the Shewhart  $\bar{X}$  chart in statistical sense, even under two assignable causes.

## 1. 서론

관리도의 전통적인 샘플링 방법은 공정으로부터 일정한 크기의 표본을 일정한 간격으로(FSSI: Fixed Sample Size and Sampling Interval) 취하는 것이다. Shewhart  $\bar{X}$  관리도는 FSSI 방법을 취하며 상대적으로 큰 공정의 이동을 감지하는데 우수한 성능을 제공한다. 하지만 관리도로 공정을 감시할 때 표본의 통계량이 관리상태에서 관리한계선 가까이 타점된다면 다음의 점들은 관리한계선 밖으로 나갈 가능성이 크기 때문에 통계량의 위치에 따라 가변적인 표본 크기나 샘플링 간격을 사용하여 전형적인 관리도의 성능을 향상시킬 수 있다. 이에 착안하여 Croasdale(1974)은 DSS(Double Sampling Scheme) 관리도를 제안하였다. 이후 Reynolds et al.(1988)과 Runger and Pignatiello(1991)는 현재 표본 통계량의 위치에 따라 다음의 샘플링 간격이 변하는 VSI(Variable Sampling Interval)  $\bar{X}$  관리도를 제안하였고 이것이 전형적인 Shewhart 관리도보다 우수하다는 것을 입증하였다. Prabhu et al.(1993)은 ASS(Adaptive Sample Size) 관리도를, Costa(1994)는 VSS(Variable Sample Size) 관리도를 각각 제안하였는데, 이전 표본 통계량의 위치에 따라 표본 크기가 최소값과 최대값 사이에서 변하도록 하여 관리도의 성능을 향상시키고자 하였다. 최근에 Prabhu et al.(1994)과 Costa(1997)는 VSI  $\bar{X}$  관리도와 VSS  $\bar{X}$  관리도를 통합한 VSSI(Variable Sample Size and Sampling Interval)  $\bar{X}$  관리도를 제안하였다. VSSI 관리도에서는 표본 크기와 샘플링 구간을 동시에 변화시킴으로서 고정된 표본 크기와 샘플링 구간을

사용하는 일반적인 관리도에 비해 더 우수한 성능을 갖도록 한 것이다. VSSI 관리도는 표본 크기가 고정되어 있을 때 VSI 관리도와 일치하고, 샘플링 간격이 고정되어 있을 때는 VSS 관리도와 같아진다.

단일 이상원인이 존재하는 경우에 VSSI  $\bar{X}$ -관리도를 적용하면 FSSI  $\bar{X}$ -관리도에 비해 운영비용과 오경보 발생률 측면에서 유리하다는 사실은 이미 밝혀진 바 있다[Prabhu et al.(1997)]. 그러나 현실적으로 공정의 이상원인은 여러 가지가 존재하고 최근에는 공정의 완전 자동화에 의해 이상원인을 크게 기계에 의한 이상원인과 재료에 의한 이상원인과 같이 몇 가지로 나누어서 관리를 한다[심성보 등 (2000)]. 따라서 본 연구에서는 공정에 두 종류의 이상원인이 존재하는 경우에 대하여 VSSI 관리도의 통계적 특성을 분석하기 위하여 ARL과 ATS 등을 계산하는 알고리즘을 제안한다. 또한, 광범위한 민감도 분석을 실시하여 두 개의 이상원인이 존재하는 경우에도 VSSI 관리도의 통계적 특성이 표준 Shewhart  $\bar{X}$  관리도뿐 아니라 VSS 관리도, VSI 관리도 등에 비해 우수함을 보인다. 단, 실제 현장에 적용하기 용이하도록 두 종류의 표본크기와 샘플링 구간만을 고려한다.

2절에서는 VSSI 관리도와 관련된 기존 연구 내용을 소개하고, 3절에서는 VSSI  $\bar{X}$ -관리도의 ARL과 ATS를 계산하는 알고리즘을 제안한다. 4절에서는 민감도 분석을 통하여 VSSI  $\bar{X}$ -관리도의 효율성을 조사하고, 5절에서는 결론 및 추후연구 방향을 제시한다.

## 2. VSSI 관리도

본 연구에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

$\phi(\cdot)$	표준정규누적분포함수
$\bar{\bar{X}}$	$i$ 번째 표본군의 표본평균
$Z$	$i$ 번째 표본군의 표준화된 표본평균
$k$	표준화된 관리한계선의 폭
$LCL$	표준화된 표본평균의 관리하한선
$UCL$	표준화된 표본평균의 관리상한선
	$(LCL, UCL) = [\mu_0 \pm k]$

### 결정 모수(decision parameters)

$w$	표준화된 표본평균의 임계한계선
-----	------------------

- $n_0$  FSSI 관리도의 고정 표본크기
- $n_1$  VSSI 관리도의 최소 표본크기
- $n_2$  VSSI 관리도의 최대 표본크기
- $h_0$  FSSI 관리도의 고정 샘플링 구간
- $h_1$  VSSI 관리도의 최소 샘플링 구간
- $h_2$  VSSI 관리도의 최대 샘플링 구간
- $I_1 = [-w, w]$  : VSSI 관리도의 임계한계 내 영역
- $I_2 = (LCL, -w) \cup (w, UCL)$  : VSSI 관리도의 임계한계 외 영역
- $I_3 = (LCL, UCL)$  : 관리한계 영역

**통계량(statistics)**

- $ARL_0$  관리상태에서 평균 런 길이
- $ARL_\delta$  이상원인이 발생하였을 때 평균 런 길이
- $ATS_0$  관리상태에서 이상신호가 발생하는 평균 시간
- $ATS_\delta$  이상원인이 발생하였을 때 이상신호가 발생하기까지 평균 소요시간
- $P$  전이확률  $p_{jk}$ 를 원소로 갖는 전이확률 행렬
- $p_{jk}$  공정평균이 이동되었을 때 이전 상태  $j$ 로부터 현재 상태  $k$ 로의 전이확률
- $Q$  흡수상태와 관련된 원소가 사라진 전이확률 행렬
- $b$  초기 상태의 확률 벡터
- $b_i$  최초 관리통계량이 각 상태  $i$ 에 있을 확률

**입력 변수**

- $\lambda_1$  이상원인 A1의 발생률
- $\lambda_2$  이상원인 A2의 발생률
- $\delta_1$  이상원인 A1에 의한 공정평균의 표준화된 이동
- $\delta_2$  이상원인 A2에 의한 공정평균의 표준화된 이동

표준 Shewhart  $\bar{X}$ -관리도는 고정된  $h_0$  시간마다  $n_0$  개의 표본을 추출하여 표본평균을 관리도에 타점하는 반면, VSSI 관리도는  $(n_1, h_2)$ 와  $(n_2, h_1)$ 을 각각 하나의 쌍으로 사용한다. 두 개의 표본크기와 샘플링 구간을 사용하는 이유는 관리도의 복잡함을 방지할 수 있고, 실제 현장에 적용하기에 용이하기 때문이다. 여기서  $(n_1, h_2)$ 는 최소의 표본크기와 가장 긴 샘플링 구간을 나타내고,  $(n_2, h_1)$ 은 최대의 표본크기와 가장 짧은 샘플링 구간을 나타내며, 각 쌍은  $n_1 < n_0 < n_2$  및  $h_1 < h_0 < h_2$  을 만족하도록 선택된다. 표본평균이 임계한계선  $(-w_1, w_1)$  사이에 타점되면 다음의 표본을 추출할 때 최소 표본크기  $n_1$  과 최대 샘플링 구간  $h_2$ 를 선택하고, 임계한계선과 관리한계선 사이에 타점되면 최대 표본크기  $n_2$ 와 최소 샘플링 구간  $h_1$ 을 선택한다.

즉,  $i$  번째 표본크기와 샘플링 구간을 각각  $n(i)$ 와  $h(i)$ 라고 하면 이들은 다음과 같이 결정된다[Prabhu et al. (1994)].

$$(n(i), h(i)) = \begin{cases} (n_2, h_1), & \text{if } Z_{i-1} \in I_2 \\ (n_1, h_2), & \text{if } Z_{i-1} \in I_1 \end{cases}$$

단,  $Z_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n(i)}}$  는 표준화된 표본평균으로서 표

준정규분포를 따르며,  $\mu_0$ 는 공정평균,  $\sigma$ 는 공정표준편차,  $\bar{X}_i$ 는  $i$ 번째 표본평균을 나타낸다.  $Z_i$ 가 관리영역  $I_3$ 를 벗어나면 관리도는 이상신호를 발생한다.

VSSI 관리도는 공정이 이상상태에 있을 때 큰 표본을 자주 샘플링하여 Shewhart 관리도 보다 좀 더 빨리 공정의 이동을 감지할 수 있어 불량품 생산에 의해 소요되는 비용을 줄일 수 있다.

**3. 두 개의 이상원인을 고려한 VSSI  $\bar{X}$  관리도**

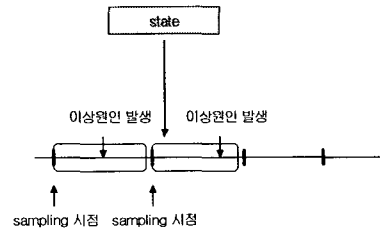
본 연구에서 사용하는 가정은 다음과 같다.

- ① 품질특성치는 정규분포를 따른다.
- ② 공정 이상원인의 종류는 두 가지를 고려한다.
- ③ 공정은 관리상태에서 시작하고, 공정의 이상원인은 공정평균을 변화시킨다.
- ④ 두 이상원인의 발생 시간은 지수분포를 따른다.
- ⑤ 두 이상원인의 발생은 독립적이다.
- ⑥ 하나의 이상원인이 발생하면 동일한 이상원인이 반복해서 발생하지는 않는다.
- ⑦ 두 이상원인이 모두 발생하면 공정평균의 이동을 증폭시킨다. 즉,  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ .

**3.1 상태 정의 및 초기상태 확률 계산**

두 개의 이상원인이 독립적이며 복합적으로 발생하는 공정에서 VSSI  $\bar{X}$  관리도의  $ARL_\delta$ 와 이상신호를 주기까지의 평균시간  $ATS_\delta$  등을 계산하는 효율적인 방법을 제시한다.

$ATS_\delta$ 는 마코프 체인을 이용하여 계산할 수 있으며, 관리도 상에서 통계량의 위치 상태와 이상원인의 존재 상태를 고려하여 통계량의 상태(state)를 그림 1과 같이 정의할 수 있다. 즉, 이전 샘플링 시점 이후로 다음 샘플링 시점 직전까지를 하나의 상태로 정의한다.



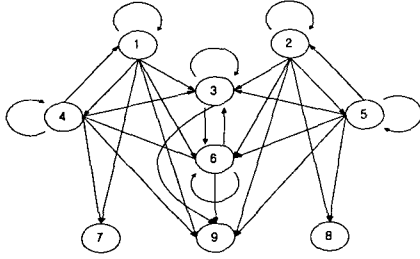
[그림 1] 통계량의 상태 정의

이상원인이 발생한 이후 이상신호가 발생하기 전의 상태를 다음과 같이 아홉 가지로 정의할 수 있다.

- 상태 1 :  $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A1 존재
- 상태 2 :  $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A2 존재
- 상태 3 :  $Z_{i-1} \in I_1$ 이고 이상원인 A1, A2 존재
- 상태 4 :  $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A1 존재
- 상태 5 :  $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A2 존재
- 상태 6 :  $Z_{i-1} \in I_2$ 이고 이상원인 A1, A2 존재
- 상태 7 :  $Z_{i-1} \notin I_3$ 이고 이상원인 A1 존재
- 상태 8 :  $Z_{i-1} \notin I_3$ 이고 이상원인 A2 존재
- 상태 9 :  $Z_{i-1} \notin I_3$ 이고 이상원인 A1, A2 존재

앞에서 정의된 아홉 가지 상태에 따른 전이도

(transition diagram)는 그림 2와 같다.



[그림 2] VSSI 관리도의 상태 전이도

상태 7, 8, 9에서는 이상신호가 발생하여 런이 마감되므로 흡수상태가 되며, 런 프로세스는 다음과 같은 전이확률 행렬을 갖는 마코프 체인을 형성한다.

$$P = ((p_{ij}))_{1 \leq i, j \leq 9} \quad (1)$$

단,  $p_{ij}$ 는 공정평균이 이동되었을 때 이전 상태  $i$ 로부터 현재 상태  $j$ 로의 전이확률을 나타낸다.

$ARL_0$  및  $ATS_0$ 를 구하기 위해서는 다음과 같이 흡수상태와 관련된 원소가 사라진 전이확률 행렬  $Q$ 와 초기 상태의 확률 벡터  $b$ 를 계산한다.

$$Q = ((q_{ij}))_{1 \leq i, j \leq 6} \quad (2)$$

$$b: b' = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 1 \quad (3)$$

전이확률 및 초기 상태의 확률을 계산하기 위하여 통계량  $Z_{i-1}$ 이 영역  $I_1, I_2, I_3$ 에 속할 확률을 각각 다음과 같이 계산한다.

$$P_1(n, \delta) \equiv \Pr [Z_{i-1} \in I_1 | n, \delta] \\ = \Phi(w - \delta \sqrt{n}) - \Phi(-w - \delta \sqrt{n}) \quad (4)$$

$$P_2(n, \delta) \equiv \Pr [Z_{i-1} \in I_2 | n, \delta] \\ = \Phi(UCL - \delta \sqrt{n}) - \Phi(w - \delta \sqrt{n}) \\ + \Phi(-w - \delta \sqrt{n}) - \Phi(LCL - \delta \sqrt{n}) \quad (5)$$

$$P_3(n, \delta) \equiv \Pr [Z_{i-1} \in I_3 | n, \delta] \\ = \Phi(UCL - \delta \sqrt{n}) - \Phi(LCL - \delta \sqrt{n}) \quad (6)$$

또한  $h$ 시간 내에 이상신호  $A_i$ 가 발생할 확률은 다음과 같이 나타낸다.

$$F_i(h) \equiv 1 - \exp(-\lambda_i h), \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$F_{1,2}(h) \equiv 1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)h] \quad (8)$$

이상 정의한 확률을 이용하여 초기 상태의 확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$b_1 = \frac{P_1(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_1(h_2)[1 - F_2(h_2)]}{F_{1,2}(h_2)} \quad (9)$$

$$b_2 = \frac{P_1(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_2(h_2)[1 - F_1(h_2)]}{F_{1,2}(h_2)} \quad (10)$$

$$b_3 = \frac{P_1(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_1(h_2)F_2(h_2)}{F_{1,2}(h_2)} \quad (11)$$

$$b_4 = \frac{P_2(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_1(h_1)[1 - F_2(h_1)]}{F_{1,2}(h_1)} \quad (12)$$

$$b_5 = \frac{P_2(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_2(h_1)[1 - F_1(h_1)]}{F_{1,2}(h_1)} \quad (13)$$

$$b_6 = \frac{P_2(n, 0)}{P_3(n, 0)} \frac{F_1(h_1)F_2(h_1)}{F_{1,2}(h_1)} \quad (14)$$

위의 식에서

$$F_1(h)[1 - F_2(h)] + F_2(h)[1 - F_1(h)] \\ + F_1(h)F_2(h) = F_{1,2}(h)$$

이므로

$$b_1 + b_2 + b_3 = P_1(n, 0)/P_3(n, 0),$$

$$b_4 + b_5 + b_6 = P_2(n, 0)/P_3(n, 0)$$

등을 얻고,

$$P_1(n, 0) + P_2(n, 0) = P_3(n, 0)$$

이므로 식 (3)이 성립함을 보일 수 있다.

### 3.2 ARL과 ATS의 계산

마코프 체인의 특성에 따라 이상상태에서 이상신호를 주기까지 각 상태를 방문한 기대회수는 이상상태에서의 평균 런 길이( $ARL_0$ )가 되고, 각 상태에서 취하는 샘플링 구간이  $h' = (h_2, h_2, h_2, h_1, h_1, h_1)$ 이므로  $h$ 와 평균 런 길이의 곱은 이상신호를 발생하기까지의 평균시간( $ATS_0$ )이 된다[Prabhu et al. (1994)].

$$ARL_0 = b'(I - Q)^{-1} \mathbf{1} \quad (15)$$

$$ATS_0 = b'(I - Q)^{-1} h \quad (16)$$

단,  $I$ 는  $6 \times 6$  단위행렬이며,  $\mathbf{1}$ 은  $6 \times 1$  단위 열 벡터를 나타낸다.

행렬  $Q$ 를 구성하는 전이확률은 다음과 같이 계산된다. 먼저, 이상원인은 발견되어 조치를 취하기 전에는 제거되지 않으므로  $p_{12}, p_{15}, p_{21}, p_{24}, p_{31}, p_{32}, p_{34}, p_{35}, p_{42}, p_{45}, p_{51}, p_{54}, p_{61}, p_{62}, p_{64}, p_{65}$  등은 모두 0이 된다(그림 2).

상태 1로부터 전이되는 확률은 공정평균이  $\delta_1\sigma$  이동하였고 표본크기는  $n_1$ , 샘플링 간격은 상태 1, 2, 3 등으로 전이될 때는  $h_2$ , 상태 4, 5, 6 등으로 전이될 때는  $h_1$ 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{11} = P_1(n_1, \delta_1)[1 - F_2(h_2)] \quad (17)$$

$$p_{13} = P_1(n_1, \delta_1)F_2(h_2) \quad (18)$$

$$p_{14} = P_2(n_1, \delta_1)[1 - F_2(h_1)] \quad (19)$$

$$p_{16} = P_2(n_1, \delta_1)F_2(h_1) \quad (20)$$

상태 2로부터 전이되는 확률은 공정평균이  $\delta_2\sigma$  이동하였고 표본크기는  $n_1$ 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{22} = P_1(n_1, \delta_2)[1 - F_1(h_2)] \quad (21)$$

$$p_{23} = P_1(n_1, \delta_2)F_1(h_2) \quad (22)$$

$$p_{25} = P_2(n_1, \delta_2)[1 - F_1(h_1)] \quad (23)$$

$$p_{26} = P_2(n_1, \delta_2)F_1(h_1) \quad (24)$$

상태 3으로부터 전이되는 확률은 공정평균이  $(\delta_1 + \delta_2)\sigma$  이동하였고 표본크기는  $n_1$ 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{33} = P_1(n_1, \delta_1 + \delta_2) \quad (25)$$

$$p_{36} = P_2(n_1, \delta_1 + \delta_2) \quad (26)$$

상태 4로부터 전이되는 확률은 공정평균이  $\delta_1\sigma$  이동하였고 표본크기는  $n_2$ 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{41} = P_1(n_2, \delta_1)[1 - F_2(h_2)] \quad (27)$$

$$p_{43} = P_1(n_2, \delta_1)F_2(h_2) \quad (28)$$

$$p_{44} = P_2(n_2, \delta_1)[1 - F_2(h_1)] \quad (29)$$

$$p_{46} = P_2(n_2, \delta_1)F_2(h_1) \quad (30)$$

상태 5에서 전이되는 확률은 공정평균이  $\delta_2\sigma$  이동하였고 표본크기는  $n_2$ 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{52} = P_1(n_2, \delta_2)[1 - F_1(h_2)] \quad (31)$$

$$p_{53} = P_1(n_2, \delta_2)F_1(h_2) \quad (32)$$

$$p_{55} = P_2(n_2, \delta_2)[1 - F_1(h_1)] \quad (33)$$

$$p_{56} = P_2(n_2, \delta_2) F_1(h_1) \quad (34)$$

상태 6에서 전이되는 확률은 공정평균이  $(\delta_1 + \delta_2)\sigma$  이동하였고 표본크기는  $n_2$ 이므로 다음과 같이 계산된다.

$$p_{63} = P_1(n_2, \delta_1 + \delta_2) \quad (35)$$

$$p_{66} = P_2(n_2, \delta_1 + \delta_2) \quad (36)$$

이상의 전이확률은 다음과 같은 특성을 만족함을 알 수 있다.

$$\sum_{j=1}^6 p_{1j} = P_3(n_1, \delta_1) \quad (37)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{2j} = P_3(n_1, \delta_2) \quad (38)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{3j} = P_3(n_1, \delta_1 + \delta_2) \quad (39)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{4j} = P_3(n_2, \delta_1) \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{5j} = P_3(n_2, \delta_2) \quad (41)$$

$$\sum_{j=1}^6 p_{6j} = P_3(n_1, \delta_1 + \delta_2) \quad (42)$$

이상의 합들은 각각의 상태에서부터 관리한계선을 벗어나지 않을 확률, 즉 이상신호가 발생하지 않을 확률을 나타낸다.

### 3.3 VSSI 관리도의 성능 평가를 위한 제약

VSSI  $\bar{X}$  관리도의 성능을 평가하기 위하여 공정이 관리상태에 있을 때 기대 표본크기와 샘플링 구간이 표준 Shewhart  $\bar{X}$ -관리도의 표본크기  $n_0$  및 샘플링 구간  $h_0$ 와 같아지도록 다음과 같은 제약을 부과한다.

$$E[n(i) | Z_{i-1} \in I_3; \delta_1 = \delta_2 = 0] = n_0 \quad (43)$$

$$E[h(i) | Z_{i-1} \in I_3; \delta_1 = \delta_2 = 0] = h_0 \quad (44)$$

식 (4), (5), (6) 등에서 정의한 확률  $P_i(n, \delta)$ 는  $\delta = 0$ 일 때는  $n$ 과 무관하므로  $P_i(0) \equiv P_i(n, 0)$ 로 정의하고, 식 (43)과 (44)로부터 다음의 식을 얻는다.

$$n_0 P_3(0) = n_1 P_1(0) + n_2 P_2(0) \quad (45)$$

$$h_0 P_3(0) = h_2 P_1(0) + h_1 P_2(0) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \text{식 (4), (5), (6) 등으로부터} \\ P_1(0) &= 2\Phi(w) - 1, \\ P_2(0) &= 2[\Phi(UCL) - \Phi(w)], \\ P_3(0) &= 2\Phi(UCL) - 1 \end{aligned}$$

이므로, 식 (45)와 (46)에 각각 대입해서 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다[Prabhu et al. (1994)].

$$w = \Phi^{-1} \left( \frac{2\Phi(UCL)[n_0 - n_2] + (n_1 - n_0)}{2(n_1 - n_2)} \right) \quad (47)$$

$$w = \Phi^{-1} \left( \frac{2\Phi(UCL)[h_0 - h_1] + (h_2 - h_0)}{2(h_2 - h_1)} \right) \quad (48)$$

따라서 최대 샘플링 구간  $h_2$ 는 다음과 같이 다른 설계 변수들의 함수로 표현할 수 있다.

$$h_2 = \frac{h_0(n_1 - n_2) - d - h_1 c}{n_1 - n_2 - c} \quad (49)$$

단,  $d$  와  $c$  는 아래의 식과 같다.

$$d = 2(h_0 - h_1)(n_1 - n_2)\Phi(UCL),$$

$$c = 2(n_0 - n_2)\Phi(UCL) + (n_1 - n_0)$$

### 4. 수치예제

본 예제에서는 공정 평균의 이동에 대하여 이상 신호가 발생하는 평균 시간 관점에서 VSSI  $\bar{X}$  관리도, 표준 Shewhart  $\bar{X}$  관리도, VSS  $\bar{X}$  관리도, VSI  $\bar{X}$  관리도를 비교하였다. 모수의 값은 단일 이상원인에서의 VSSI  $\bar{X}$  관리도를 연구한 Prabhu et al. (1994)의 모수와 동일하게 설정하였고, 두 가지 이상원인의 발생률은 각각 0.02로 하였다.

<표 1>과 <표 2>는 두 개의 이상원인에 의한 표준 평균이동  $(\delta_1, \delta_2)$  가 (0.0, 0.0), (0.5, 0.0), (0.5, 0.5), (0.5, 1.0), (1.0, 0.5), (1.0, 1.0)일 때의  $ATS_0$ 를 계산하여 나타낸 것이다. (0.0, 0.0)에 대한 결과는 공정이 관리상태에 있을 때 모든 관리도의 성능이 같다는 것을 보인다. 또한, (0.5, 0.0)에 대한 결과를 통하여 두 개의 이상원인 중에서 하나의 이상원인이 발생하지 않으면 그 결과는 단일 이상원인( $\delta = 0.5$ )과 같아진다는 것을 검증하였다.

VSS  $\bar{X}$  관리도에서는 일정한 간격으로 표본을 추출하므로 다음과 같은 방법으로  $ATS_0$ 를 계산할 수 있다.

$$ATS_0 = b'(I-Q)^{-1} h_0$$

VSI  $\bar{X}$  관리도의  $ATS_0$ 를 계산하는 것은 VSSI  $\bar{X}$  관리도의  $ATS_0$ 를 계산하는 절차의 특수한 경우이다. 따라서, VSI  $\bar{X}$  관리도의  $ATS_0$ 도 VSSI  $\bar{X}$  관리도처럼 마코프 체인을 이용하여 계산할 수 있으나 VSI  $\bar{X}$  관리도의 표본 크기는 항상 고정되어 있으므로  $n_1 = n_2 = n_0$ 로 놓고  $ATS_0$ 를 계산한다.

<표 1>에서는  $n_0 = 3$ ,  $h_1 = 0.01$ 인 경우에 대하여 모든 관리도의  $ATS_0$ 를 비교하였고, <표 2>에서는  $n_0 = 5$ ,  $h_1 = 0.1$ 일 때의  $ATS_0$ 를 비교하였다. 위의 결과에서 우리는 VSSI  $\bar{X}$  관리도의  $ATS_0$ 가 표준 Shewhart  $\bar{X}$  관리도 뿐만 아니라 VSS  $\bar{X}$  관리도와 VSI  $\bar{X}$  관리도 보다도 짧게 나타난다는 것을 알 수 있다. 따라서, 표본 크기나 샘플링 간격을 동시에 변화시키면 좀 더 빨리 공정 평균의 이동을 효율적으로 감지할 수 있다.

### 5. 결론

현실적으로 공정의 이상원인은 단일 이상원인보다는 다중 이상원인으로 존재하는데 기존의 연구에서는 대부분 단일 이상원인을 가정하여 관리도를 적용해 왔다. 따라서, 본 연구에서는 공정평균의 변화를 일으키는 두 개의 이상원인이 독립적이며 복합적으로 발생하는 공정에 VSSI  $\bar{X}$  관리도를 적용하였고, 그 때의 평균 런 길이(ARL: Average Run Length)와 이상 신호를 주기까지의 평균 시간(ATL: Average Time to Signal)을 계산하는 알고리즘을 제안하였다. 또한, 공정에 이상신호가 발생하는 평균시간의 관점에서 표준 Shewhart  $\bar{X}$  관리도, VSS 관리도, VSI 관리도와 비교하여 두 개의 이상원인이 존재하는 공정에도 VSSI 관리도를 사용하는 것이 효율적임을 보였다.

따라서, 현재 표준 Shewhart 관리도를 사용하고 있는 공정이 두 개의 이상원인이 존재하는 공정이

라면 VSSI  $\bar{X}$  관리도를 적용하여 공정을 효율적으로 관리할 수 있다.

본 연구에서는 두 개의 이상원인이 있는 경우만을 고려하였으나 3개 이상의 이상원인이 발생하는 경우로도 확장이 가능할 것으로 기대된다. 즉, 관리도 상에서 통계량의 위치 상태와 이상원인의 존재 상태를 고려하여 통계량의 상태를 재정의하고 새로운 전이행렬과 이를 이용한  $ARL_0$ ,  $ATS_0$ 을 구해주면 3개 이상의 이상원인이 존재하는 경우에도 적용이 가능할 것이다.

참고문헌

[1] 심성보, 강창욱(2000), “두 개의 이상원인을 고려한 VSS  $\bar{X}$  관리도의 통계적 설계”, 「대한품질경영학회지」, 28권, 3호, pp. 44-52.  
 [2] Costa, A. F. B.(1994), " $\bar{X}$  Charts with Variable Sample Size", Journal of Quality Technology, Vol. 26, No. 3, pp. 155-163.  
 [3] Costa, A. F. B.(1997), " $\bar{X}$  Chart with Variable Sample Size and Sampling Intervals", Journal of

Quality Technology, Vol. 29, No. 2, pp. 197-204.

[4] Croasdale, R.(1974), "Control charts for a double-sampling scheme based on average production run lengths", International Journal of Production Research, Vol. 12, pp. 585-592  
 [5] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C. and Runger, G. C.(1994), "A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval  $\bar{X}$  Control Scheme", Journal of Quality Technology, Vol. 26, No. 3, pp. 164-176.  
 [6] Prabhu, S. S., Runger, G. C. and Keats, J. B.(1993), "An Adaptive Sample Size  $\bar{X}$  Chart", International Journal of Production Research, Vol. 31, No. 12, pp. 2895-2909.  
 [7] Reynolds, M. R. Jr., Amin, R. W. and Arnold, J. C.(1988), " $\bar{X}$  Charts with Variable Sampling Intervals", Technometrics, Vol. 30, No. 2, pp. 181-192.  
 [8] Runger, G. C. and Pignatiello, J. J.(1991), "Adaptive Sampling for Process Control", Journal of Quality Technology, Vol. 23, No. 2, pp. 135-155.

<표 1> 다양한 관리도의  $ATS_0$  비교 ( $n_0 = 3, h_0 = 1.0, h_1 = 0.01$ )

$(\delta_1, \delta_2)$		(0, 0)	(0.5, 0.0)	(0.5, 0.5)	(1.0, 0.0)	(1.0, 0.5)	(1.0, 1.0)											
FSSI $n_0 = 3, h_0 = 1.0$		370.40	60.69	32.87	9.77	18.91	8.47											
$(n_1, n_2)$	$(h_1, h_2)$	w	ALL	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI
(1, 4)	(0.01, 2.98)	0.43	370.40	52.78 87%	43.71 72%	37.31 62%	29.35 89%	25.23 77%	22.76 69%	7.00 72%	3.44 35%	2.49 26%	16.72 88%	13.74 73%	12.27 65%	6.37 75%	3.31 39%	2.43 29%
(1, 5)	(0.01, 1.99)	0.67	370.40	46.46 77%	45.01 74%	33.40 55%	26.80 82%	25.66 78%	21.14 64%	5.49 56%	3.73 38%	2.25 23%	15.19 80%	14.02 74%	11.44 61%	5.14 61%	3.56 42%	2.20 26%
(1, 8)	(0.01, 1.40)	1.06	370.40	33.85 56%	47.97 79%	25.56 42%	21.81 66%	26.82 82%	17.80 54%	3.85 39%	4.46 46%	2.28 23%	12.45 66%	14.75 78%	9.86 52%	3.73 44%	4.21 50%	2.24 26%
(1, 10)	(0.01, 1.28)	1.22	370.40	28.60 47%	49.32 81%	22.17 37%	19.59 60%	27.37 83%	16.20 49%	3.61 37%	4.83 50%	2.48 25%	11.34 60%	15.10 80%	9.17 49%	3.53 42%	4.53 54%	2.42 29%
(1, 12)	(0.01, 1.22)	1.33	370.40	24.82 41%	50.36 83%	19.68 32%	17.88 54%	27.80 85%	14.95 46%	3.61 37%	5.13 53%	2.71 28%	10.53 56%	15.37 81%	8.65 46%	3.53 42%	4.78 57%	2.64 31%
(1, 15)	(0.01, 1.17)	1.46	370.40	20.92 35%	51.54 85%	17.10 28%	15.97 49%	28.30 86%	13.56 41%	3.78 39%	3.06 56%	3.06 31%	9.69 51%	15.69 83%	8.12 43%	3.69 44%	5.09 60%	2.97 35%
(1, 20)	(0.01, 1.12)	1.61	370.40	17.24 28%	52.93 87%	14.70 24%	14.03 43%	28.90 88%	12.21 37%	4.25 44%	5.96 61%	3.64 37%	8.94 47%	16.08 85%	7.70 41%	4.12 49%	5.47 65%	3.50 41%
(1, 25)	(0.01, 1.09)	1.72	370.40	15.50 26%	53.90 89%	13.67 23%	13.08 40%	29.33 89%	11.65 35%	4.76 49%	6.30 65%	4.18 43%	8.69 46%	16.36 87%	7.65 41%	4.59 54%	5.76 68%	3.99 47%
(2, 4)	(0.01, 1.99)	0.67	370.40	53.97 89%	45.01 74%	39.20 65%	29.73 91%	25.66 78%	23.34 71%	7.13 73%	3.73 38%	2.62 27%	16.92 90%	14.02 74%	12.59 67%	6.47 77%	3.56 42%	2.55 30%
(2, 5)	(0.01, 1.50)	0.96	370.40	48.85 81%	47.14 78%	36.81 61%	27.59 84%	26.49 81%	22.38 68%	5.68 58%	4.24 44%	2.41 25%	15.60 83%	14.54 77%	12.08 64%	5.30 63%	4.02 48%	2.35 28%
(2, 8)	(0.01, 1.20)	1.38	370.40	38.41 63%	50.79 84%	30.93 51%	23.54 72%	27.98 85%	20.09 61%	3.97 41%	5.26 54%	2.30 24%	13.28 70%	15.49 82%	10.97 58%	3.83 45%	4.90 58%	2.25 27%
(2, 10)	(0.01, 1.14)	1.53	370.40	33.72 56%	52.17 86%	27.87 46%	21.71 66%	28.57 87%	18.84 57%	3.65 37%	5.70 58%	2.40 25%	12.34 65%	15.86 84%	10.40 55%	3.55 42%	5.26 62%	2.34 28%
(2, 12)	(0.01, 1.11)	1.63	370.40	30.12 50%	53.15 88%	25.40 42%	20.26 62%	28.99 88%	17.77 54%	3.56 37%	6.03 62%	2.54 26%	11.62 62%	16.14 85%	9.94 53%	3.47 41%	5.54 65%	2.48 29%
(2, 15)	(0.01, 1.08)	1.75	370.40	26.17 43%	54.21 89%	22.58 37%	18.56 57%	29.47 90%	16.48 50%	3.62 37%	6.41 66%	2.78 29%	10.83 57%	16.45 87%	9.40 50%	3.53 42%	5.85 69%	2.71 32%
(2, 20)	(0.01, 1.06)	1.90	370.40	22.06 36%	55.37 91%	19.59 32%	16.65 51%	30.00 91%	15.02 46%	3.90 40%	6.87 70%	3.19 33%	10.02 53%	16.81 89%	8.85 47%	3.78 45%	6.21 73%	3.08 36%
(2, 25)	(0.01, 1.05)	2.00	370.40	19.84 33%	56.14 93%	18.01 30%	15.57 47%	30.36 92%	14.23 43%	4.23 43%	7.19 74%	3.57 37%	9.61 51%	17.05 90%	8.61 46%	4.09 48%	6.47 76%	3.43 41%

<표 2> 다양한 관리도의  $ATS_0$  비교 ( $n_0 = 5, h_0 = 1.0, h_1 = 0.1$ )

$(\delta_1, \delta_2)$		(0, 0)	(0.5,0.0)	(0.5,0.5)	(1.0,0.0)	(1.0,0.5)	(1.0,1.0)											
FSSI $n_0 = 5, h_0 = 1.0$		370.40	33.40	21.93	4.50	12.52	4.24											
$(n_1, n_2)$	$(h_1, h_2)$	$w$	ALL	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI	VSS	VSI	VSSI
(1, 8)	(0.1, 2.20)	0.56	370.40	22.60 68%	21.33 64%	13.81 41%	16.55 76%	15.61 71%	11.25 51%	2.91 65%	1.77 39%	1.60 36%	9.50 76%	8.58 69%	6.36 51%	2.84 67%	1.75 41%	1.59 37%
(1, 10)	(0.1, 1.72)	0.76	370.40	18.30 55%	22.15 66%	11.50 34%	14.18 65%	16.04 73%	9.72 44%	2.64 59%	1.85 41%	1.72 38%	8.28 66%	8.82 70%	5.66 45%	2.60 61%	1.83 43%	1.70 40%
(1, 12)	(0.1, 1.51)	0.91	370.40	15.34 46%	22.86 68%	9.95 30%	12.42 57%	16.41 75%	8.65 39%	2.57 57%	1.93 43%	1.87 42%	7.41 59%	9.02 72%	5.20 42%	2.54 60%	1.90 45%	1.84 43%
(1, 15)	(0.1, 1.36)	1.06	370.40	12.45 37%	23.75 71%	8.49 25%	10.57 48%	16.87 77%	7.59 35%	2.65 59%	2.03 45%	2.09 47%	6.55 52%	9.28 74%	4.78 38%	2.62 62%	2.00 47%	2.06 49%
(1, 20)	(0.1, 1.24)	1.25	370.40	9.88 30%	24.88 75%	7.31 22%	8.81 40%	17.44 80%	6.71 31%	2.93 65%	2.17 48%	2.46 55%	5.82 47%	9.61 77%	4.52 36%	2.89 68%	2.14 50%	2.41 57%
(1, 25)	(0.1, 1.18)	1.38	370.40	8.74 26%	25.72 77%	6.94 21%	8.00 37%	17.87 82%	6.45 29%	3.27 73%	2.29 51%	2.81 63%	5.57 45%	9.86 79%	4.54 36%	3.21 76%	2.25 53%	2.74 65%
(2, 8)	(0.1, 1.90)	0.67	370.40	23.06 69%	21.75 65%	14.24 43%	16.78 77%	15.83 72%	11.48 52%	2.90 65%	1.81 40%	1.51 34%	9.61 77%	8.70 70%	6.43 51%	2.84 67%	1.79 42%	1.50 35%
(2, 10)	(0.1, 1.54)	0.88	370.40	18.87 57%	22.75 68%	12.02 36%	14.49 66%	16.35 75%	10.04 46%	2.59 58%	1.91 43%	1.56 35%	8.40 67%	8.99 72%	5.75 46%	2.55 60%	1.89 45%	1.55 37%
(2, 12)	(0.1, 1.39)	1.03	370.40	15.93 48%	23.57 71%	10.48 31%	12.77 58%	16.77 77%	8.99 41%	2.47 55%	2.01 45%	1.64 37%	7.53 60%	9.23 74%	5.26 42%	2.44 57%	1.98 47%	1.62 38%
(2, 15)	(0.1, 1.27)	1.19	370.40	13.00 39%	24.54 74%	8.95 27%	10.92 50%	17.27 79%	7.89 36%	2.45 55%	2.13 47%	1.77 40%	6.62 53%	9.52 76%	4.78 38%	2.43 57%	2.09 49%	1.75 41%
(2, 20)	(0.1, 1.18)	1.38	370.40	10.29 31%	25.72 77%	7.61 23%	9.08 41%	17.87 82%	6.89 31%	2.59 58%	2.29 51%	2.00 45%	5.78 46%	9.86 79%	4.39 35%	2.56 60%	2.25 53%	1.97 46%
(2, 25)	(0.1, 1.14)	1.50	370.40	9.00 27%	26.56 80%	7.08 21%	8.15 37%	18.29 83%	6.49 30%	2.78 62%	2.43 54%	2.21 49%	5.41 43%	10.11 81%	4.29 34%	2.74 65%	2.38 56%	2.17 51%
(3, 8)	(0.1, 1.60)	0.84	370.40	23.75 71%	22.52 67%	15.14 45%	17.13 78%	16.23 74%	12.03 55%	2.92 65%	1.89 42%	1.48 33%	9.78 78%	8.92 71%	6.70 54%	2.85 67%	1.87 44%	1.47 35%
(3, 10)	(0.1, 1.36)	1.06	370.40	19.82 59%	23.75 71%	13.16 39%	15.02 69%	16.87 77%	10.78 49%	2.58 57%	2.03 45%	1.51 34%	8.65 69%	9.28 74%	6.09 49%	2.54 60%	2.00 47%	1.49 35%
(3, 12)	(0.1, 1.26)	1.22	370.40	17.01 51%	24.68 74%	11.69 35%	13.41 61%	17.34 79%	9.82 45%	2.44 54%	2.15 48%	1.56 35%	7.82 62%	9.56 76%	5.64 45%	2.41 57%	2.11 50%	1.55 36%
(3, 15)	(0.1, 1.18)	1.38	370.40	14.10 42%	25.72 77%	10.13 30%	11.64 53%	17.87 82%	8.74 40%	2.38 53%	2.29 51%	1.66 37%	6.93 55%	9.86 79%	5.15 41%	2.36 56%	2.25 53%	1.64 39%
(3, 20)	(0.1, 1.12)	1.55	370.40	11.30 34%	26.90 81%	8.63 26%	9.79 45%	18.47 84%	7.66 35%	2.45 55%	2.49 55%	1.83 41%	6.06 48%	10.21 82%	4.69 37%	2.42 57%	2.43 57%	1.80 43%
(3, 25)	(0.1, 1.09)	1.68	370.40	9.87 30%	27.71 83%	7.92 24%	8.79 40%	18.87 86%	7.14 33%	2.58 58%	2.63 59%	1.98 44%	5.62 45%	10.46 84%	4.50 36%	2.55 60%	2.57 61%	1.96 46%
(4, 8)	(0.1, 1.30)	1.15	370.40	25.14 75%	24.25 73%	17.42 52%	17.81 81%	17.12 78%	13.40 61%	2.98 66%	2.09 47%	1.55 35%	10.12 81%	9.43 75%	7.41 59%	2.90 68%	2.06 49%	1.54 36%
(4, 10)	(0.1, 1.18)	1.38	370.40	21.86 66%	25.72 77%	15.98 48%	16.12 74%	17.87 82%	12.56 57%	2.64 59%	2.29 51%	1.57 35%	9.20 74%	9.86 79%	7.00 56%	2.59 61%	2.25 53%	1.56 37%
(4, 12)	(0.1, 1.13)	1.52	370.40	19.42 58%	26.70 80%	14.72 44%	14.80 68%	18.37 84%	11.80 54%	2.49 55%	2.45 55%	1.61 36%	8.51 68%	10.15 81%	6.64 53%	2.45 58%	2.40 57%	1.60 38%
(4, 15)	(0.1, 1.09)	1.68	370.40	16.76 50%	27.71 83%	13.21 40%	13.28 61%	18.87 86%	10.86 50%	2.42 54%	2.63 59%	1.70 38%	7.75 62%	10.46 84%	6.22 50%	2.39 56%	2.57 61%	1.68 40%
(4, 20)	(0.1, 1.06)	1.85	370.40	13.97 42%	28.77 86%	11.53 35%	11.59 53%	19.41 89%	9.77 45%	2.47 55%	2.85 63%	1.86 41%	6.94 55%	10.79 86%	5.74 46%	2.43 57%	2.77 65%	1.83 43%
(4, 25)	(0.1, 1.05)	1.96	370.40	12.42 37%	29.45 88%	10.61 32%	10.60 48%	19.75 90%	9.15 42%	2.57 57%	3.01 67%	2.00 45%	6.49 52%	11.00 88%	5.50 44%	2.53 60%	2.91 69%	1.97 47%