

순환 주기나 빈번한 작은 이동이 발생하는 공정관리를 위한 Z-CUSUM 관리도

강해운 · 강창욱 · 백재원

한양대학교 산업공학과

kanghn@seaq.hanyang.ac.kr, cwkang57@hanyang.ac.kr, jwpaik@seaq.hanyang.ac.kr

The Z-CUSUM Control Chart for the Process with Recurring Cycles or Frequent Small Shifts

Hae Woon Kang · Chang Wook Kang · Jae Won Paik

Dept. of Industrial Engineering, Hanyang University

kanghn@seaq.hanyang.ac.kr, cwkang57@hanyang.ac.kr, jwpaik@seaq.hanyang.ac.kr

Abstract

CUSUM control charts are widely used to monitor processes with small shifts. CUSUM control charts, however, are less effective in detecting for recurring cycles or frequent small shifts in the process.

With Shewhart control charts, we have applied the variety of run rules to check the stability of process in addition to the situations that some points fall outside the control limits. In this paper, we propose the Z-CUSUM control chart for monitoring the process with recurring cycles or frequent small shifts by use of the zone concept as like the Shewhart control charts.

Key Words : recurring cycle, small shifts, Z-CUSUM control chart

1. 서론

일반적으로 CUSUM 관리도는 작은 이동 (small shifts)이 자주 발생하는 공정들이나

자기 상관성이 존재하는 공정들에서 자주 이용된다. 그 이유는 CUSUM 관리도는 Shewhart 관리도처럼 각 샘플 데이터들의 값을 타점하여 공정을 관리하지 않고 목표 값에서부터 관측 값까지의 편차들의 누적 합

을 이용하여 공정을 관리하기 때문이다.

따라서, Shewhart 관리도에 비하여 작은 이동(small shifts)을 빠르게 감지할 수 있고, 마찬가지로 자기상관이 존재하는 공정에서도 이를 빠르게 감지할 수 있게 된다. 실제 산업 현장의 공정들에서 관리도를 적용할 경우 가장 공정의 상태를 잘 파악하고, 관리하기 위해서는 Shewhart 관리도와 CUSUM (또는 EWMA), 기타 등등 여러 관리도를 동시에 사용함으로써 각 관리도의 장·단점을 최대한 활용하여 공정을 관리하는 것이다. 그러나 이러한 공정들에서 공정의 장·단점을 파악하여 적절한 여러 관리도를 동시에 이용하여 공정을 파악하고 관리한다는 것은 비용·시간·노동 등 여러 면에서 현실적으로 많은 문제점을 갖게 된다.

따라서, 공정에 적합한 관리도를 사용하면 다른 관리도의 장점을 어느 정도 보완해 줄 수 있다면 가장 효율적으로 공정을 관리하는 방법이 될 수 있을 것이다. 본 연구는 기존의 CUSUM 관리도의 문제점 및 이를 보완해 줄 수 있는 새로운 관리도를 제시하는데 그 목적이 있으며, 본 논문에서 사용된 CUSUM 관리도를 예시는 MINITAB 이용하였다.

2. CUSUM 관리도

2.1 CUSUM 관리도

CUSUM 관리도는 (Page, 1954) 공정 평균의 작은 이동(small shifts)에 민감한 관리도로서 널리 알려져 있다.

C_i^- 통계량에 대한 이해

일반적으로 CUSUM 관리도에 타점되는 통계량은 다음과 같다.

$$C_i^+ = \text{Max}[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (1)$$

$$C_i^- = \text{Max}[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-] \quad (2)$$

여기서, $C_0^+ = C_0^- = 0$, K (reference value) = $\frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2}$ 이다.

CUSUM 관리도의 판정은 위 식 (1)와 식 (2)의 값이 H (decision interval)값을 넘게 되면 공정에 이상이 있다고 판정을 하게 된다.

일반적으로 H 값은 표준편차의 5배인 $H = 5\sigma$, $k = \frac{1}{2}\delta$ 를 사용하고 있으며, $h = 4$ 또는

$h = 5$, $k = \frac{1}{2}$ 일 경우 좋은 수행도를 보이는

것으로 알려져 있다.[Hawkins, 1993a]

CUSUM 관리도에서 사용되는 통계량 (식 (1), (2))은 C_i 통계량에 k (reference value)를 첨가하여 구성한 것으로 C_i 통계량은 다음과 같다.

$$C_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0) \quad (3)$$

Montgomery(2001)는 위의 식 (3)의 C_i 통계량은 평균이 0을 갖는 랜덤 보행(Random Walk)을 한다고 하였다.

C_i 통계량이 랜덤보행을 하기 때문에 CUSUM 관리도는 통계량의 정규성에 대한 가정이 필요 없으며, CUSUM 관리도의 좀더 정확한 ARL 및 수행도를 계산 및 비교하기 위한 수리적 모델에 관한 연구가 그동안 꾸준히 이루어져 왔다.

따라서, Shewhart 관리도의 런 규칙들과 동일한 수리적 확률 값(p)의 계산 방법에 의하여 런 규칙들을 제안할 수 없는 문제점이 발생하게 된다.

3. Z-CUSUM 관리도의 설계

3.1 Z-CUSUM 관리도의 개념

CUSUM 관리도는 일반적으로 공정 평균의 작은 이동이 발생되었을 경우 민감한 관리도로 알려져 있지만, 앞에서 제시한 특정 패턴이 발생하였을 경우 Shewhart 관리도에서 처럼 수행도가 낮아짐을 알 수 있었다.

Shewhart 관리도에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 적용시 주의가 필요하지만 런 규칙 검정(Run Rules Test)을 Shewhart 관리도에 적용하여 문제점을 해결하고 있는 반면, CUSUM 관리도에서는 이러한 문제점이 여전히 존재한다.

Z-CUSUM 관리도에서는 이러한 CUSUM 관리도의 특정 패턴 인식에 대한 문제점을 보완하기 위하여 Shewhart 관리도에서 적용하고 있는 런 규칙들(Zone Rules이라고도 한다)의 개념을 도입하였다.

이와 같이 기존의 CUSUM 관리도와 런 규칙들의 개념을 결합하여 특정 패턴 발생에 대한 수행도를 향상시킨 새로운 관리도를 Z-CUSUM 관리도라고 한다.

3.2 Z-CUSUM 관리도의 Run Rules의 개발

일반적으로 Shewhart 관리도에서 적용된 런 규칙들들은 각각의 규칙들의 확률 값(p)을 기준으로 제안되었다.

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (4)$$

(p : 관리한계선 밖으로 어떠한 점이 발생될 확률)

Shewhart 관리도의 ARL인 370.4를 기준으로 확률 값(p)이 0.0027이하로 발생할 경우를 런 규칙들로 제안하였다.

그러나 CUSUM 관리도에서는 Shewhart 관리도에서와 같은 확률 값(p)의 계산에 의한 런 규칙들을 제안하는데 큰 어려움이 있다.

따라서, 현재 이러한 수리적 모형의 적용의 어려움을 해결하기 위한 방법으로 여러 방법론이 존재하며, 모의실험 방법도 하나의 방법으로 사용되고 있다.

이러한 다양한 모의 실험을 통하여 CUSUM 관리도에 적합한 런 규칙들을 찾을 수 있으며, 이를 통해 근사된 확률 값(p)을 얻을 수 있게 된다.

이러한 근사된 확률 값은 모의실험에 의하여 계산된 확률 값이므로 작은 오차가 존재하게 된다.

3.3 Z-CUSUM 관리도의 구역 (Zone) 설정

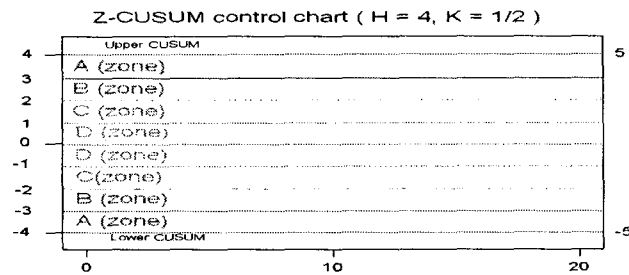
Shewhart 관리도에서 $\pm 3\sigma$ 로 관리도를 관리할 경우, 각 영역을 1σ 의 3 부분(A, B, C Zones)을 영역으로 설정하고 있는 반면, Z-CUSUM 관리도에서는 4 부분(A, B, C, D Zones)을 영역으로 설정하고 있다. 4 부분으로 영역을 설정한 이유는

첫째, 4 부분으로 설정함으로 인해 $h = 4$ (각 부분의 영역크기 : 1) 또는 5(각 부분의 영역크기 : 1.25) 일 경우, 관리도에 쉽게 각 부분의 구역을 표시 및 설정할 수 있다.

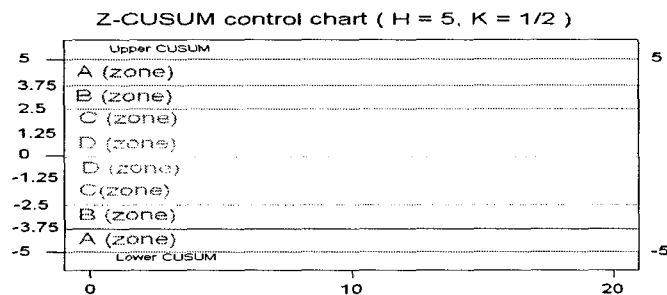
둘째, Shewhart 관리도에 비해 영역을 1개 늘림으로 인해 좀 더 다양한 런 규칙들에 대하여 살펴 볼 수 있다.

위 2.1.1절에서 언급했던 바와 같이 일반적으로 $h = 4$ 또는 5, $k = \frac{1}{2}$ 일 경우, 좋은 수행도를 보인다. 따라서 CUSUM 관리도에서는 h 와 k 에 관한 매개 변수(Parameter) 값으로 일반적으로 $h = 4$ 또는 5, $k = \frac{1}{2}$ 이 사용이 되고 있다.

$h = 4$ 또는 5일 경우 (단, $k = 1/2$)의 구역 설정 방법은 다음의 <그림 5> 와 <그림



<그림 1> h = 4, k = 1/2 일 경우의 Z-CUSUM 관리도의 구역(Zone) 설정



<그림 2> h = 5, k = 1/2 일 경우의 Z-CUSUM 관리도의 구역(Zone) 설정

6> 과 같다. 본 논문에서 다음 절에서 제안하는 Z-CUSUM 관리도를 위한 런 규칙들을 앞으로는 'Z-Runs Rules'로 표현하도록 한다. 본 논문에서 제안하는 'Z-Runs Rules'은 기본적으로 h = 4.0 또는 h = 5.0, k = 1/2 을 기준으로 제안되었다. 각 Z-Runs Rule들의 ARL_0 판단 기준은 아래와 같다.

가. h = 4일 경우 $p = 0.00595$ (5)

나. h = 5일 경우 $p = 0.00215$ (6)

Shewhart 관리도에서는 Shewhart 관리도의 ARL_0 가 370.4 이므로 위 식 (4)에 의하여 계산된 확률 값($p = 0.0027$)을 기준으로 판단하였으며, 이와 동일한 방법으로 h = 4 일 경우, CUSUM 관리도 ARL_0 가 168 이므로(참조 <표 6>) Z-CUSUM 관리도는 위 식 (4)에 의하여 계산된 확률 값($p = 0.00595$)를 기준으로 판단하였다.

h = 5일 경우, CUSUM 관리도 ARL_0 가 465 이므로 Z-CUSUM 관리도는 위 식 (4)에 의하여 계산된 확률 값($p = 0.00215$)을

<표 1> 중심선의 한 쪽 영역에 연속적인 N개 발생 할 평균 확률 (h = 4 또는 5)

N의 개수	중심선의 한 쪽 구역(Zone)에 연속적인 N개의 점들							
	13	14	15	16	17	18	19	20
확률	0.0075	0.0061	0.00497	0.00406	0.0033	0.00278	0.00228	0.00192

<표 2> 중심선의 한 쪽 영역에 연속적으로 N개의 증가 또는 감소가 발생 할 평균 확률 (h = 4 또는 5)

N의 개수	연속적으로 N개의 증가 (Upper)			연속적으로 N개의 감소 (Lower)		
	4	5	6	4	5	6
확률	0.00617349	0.00212198	0.0006075	0.00620529	0.00201717	0.00059448

<표 3> 각 구역(Zone)에 처음으로 타점 될 평균 확률

구역(Zone)	Upper Z-CUSUM				Lower Z-CUSUM			
	D	C	B	A	D	C	B	A
h = 4	0.7842	0.1958	0.0193	0.0007	0.7849	0.1952	0.0192	0.0007
h = 5	0.86929	0.126324	0.004349	0.000037	0.86969	0.1260	0.004274	0.00003627

<표 4> 한 구역(Zone)에서 반대 구역으로 타점 될 평균 확률

반대 구역	D (Zone)				C (Zone)				B (Zone)				A (Zone)			
	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C	B	A
h=4	0.5482	0.1515	0.0396	0.0098	0.1233	0.0704	0.0097	0.00107	0	0.0103	0.002385	0.00016	0	0.00628	0.00121	0.0000779
h=5	0.662	0.103	0.0039	0.000039	0.159	0.0460	0.00220	0.000033	0.0087	0.0125	0.00039	0.000014	0	0.00149	0.00017	0.000004

기준으로 판단하고, 다양한 모의 실험 결과를 통해 얻어진 근사적 확률 값과 비교 후 런 규칙들을 제안하였다.

3.4 모의실험 수행 결과를 이용한 'Z-Runs Rules' 제안

모의실험은 랜덤한 정규분포 표본(10억개의 표본)을 연속적으로 발생하여 이 표본을 이

용, CUSUM 관리도의 계산 과정과 동일한 과정 및 방법으로 다양한 모의실험을 수행하였다.

본 논문에서 제안하는 런 규칙들의 1~3 규칙들은 Shewhart 관리도의 런 규칙을 응용하여 제안되었으며, 4~5 규칙들은 많은 다양한 모의실험을 통한 발견적(Heuristic) 해법의 결과로 제안되었다.

이렇게 모의 실험을 통해 얻어진 결과 값을 적용하여 새롭게 제안된 'Z-Runs Rules'은 다음과 같다.

확률 값(p)은 $h = 4$ 일 경우, 식 (5) 기준과 $h = 5$ 일 경우 식 (6) 기준에 의하여 모두 구역 A에 처음으로 타점될 확률 값이 각 판단 기준 확률 값 이하 중 가장 큰 발생 확률임을 알 수 있다.

(단, $C_i^+ \& C_i^- = 0$ and $C_{i+1}^+(or C_{i+1}^-)$)

④ 위의 <표 5>에서 한 쪽 구역에서 타점된 후 반대쪽 영역으로 타점 될 때 $h = 4$ 일 경

<표 5> $k = 1/2$ 일 경우의 제안하는 'Z-Runs Rules'

규칙	<ol style="list-style-type: none"> 1. 관리한계선 밖으로 점이 발생되었을 경우 2. 한쪽 영역에 연속적인 ($h=4 : 15$개), ($h=5 : 20$개) 이상의 점이 발생되었을 경우 3. 한 쪽 영역에 연속적으로 5개 이상의 점의 증가 또는 감소가 발생되었을 경우 4. A 구역(zone)에 첫 번째 점이 발생되었을 경우 ($h = 4$ 또는 5일 경우) ($C_i^+ \& C_i^- = 0$ and $C_{i+1}^+(or C_{i+1}^-)$) 5. 한 구역(Zone)에서 반대 구역으로 점이 발생 되었을 경우 ($h = 4$ 일 경우 : C 구역-> A, B-> D or A , A-> D or B or A) ($h = 5$ 일 경우 : D 구역-> A, C-> A, B-> B or A, A-> D or C or B or A)
----	---

① 중심선의 한쪽 구역에서 $h = 4$ 일 경우, 식 (5) 기준에 의하여 표본 15개, $h = 5$ 일 경우 식 (6) 기준에 의하여 표본 20개가 연속적으로 발생 할 평균 확률 값(p)이 각 판단 기준 확률 값 이하 중 가장 큰 발생 확률임을 알 수 있다.

② 중심선의 한 쪽 구역에서 $h = 4$ 일 경우, 식 (5) 기준과 $h = 5$ 일 경우 식 (6) 기준에 의하여 모두 표본 5개 이상이 연속적으로 증가 또는 감소 현상이 발생 할 평균 확률 값(p)이 각 판단 기준 확률 값 이하 중 가장 큰 발생 확률임을 알 수 있다.

③ 각 구역에 처음으로 표본이 타점 될 평균

확률 값이 식 (5) 기준 확률 값(p) 보다 크지 않는 경우는 C->A,B->D, B->D or B or A, A->D or B or A 이다.

또한 위 경우 모든 확률 값의 합은 0.0049로 기준 값의 확률 값(p) 이하 임을 알 수 있다.

$h = 5$ 일 경우, 각 영역의 확률 값이 식 (6) 기준 확률 값(p) 보다 크지 않는 경우는 D->A, C->A, B->B or A, A->D or C or B or A 이다.

또한 위 경우 모든 확률 값의 합은 0.0023로 기준을 조금 초과하지만 ARL에 크게 영향을 미치지 않는 근사 값을 알 수 있다.

4. 결론

실제 현장에서 Shewhart 관리도와 함께 CUSUM 관리도가 많이 사용되고 있다.

따라서, 현재까지 CUSUM 관리도에 관한 연구 및 논문이 발표되고 있으며, 수행도를 높이기 위한 다양한 관리도와 결합을 이용한 연구가 계속되고 있다.

본 논문에서는 기존 CUSUM 관리도에서 몇몇 이상 원인에 의한 특정 패턴이 발생하였을 경우 문제점 및 문제 해결을 위한 연구를 하였다.

순환 주기가 발생하거나 빈번한 변화를 갖는 작은 이동의 발생 시 기존 CUSUM 관리도에서는 이러한 이상원인(assignable cause)에 의한 특정 패턴(pattern)을 제대로 감지하지 못하는 단점이 있었다.

따라서, 이러한 이상원인에 의한 패턴 감지 능력을 향상시킬 수 있는 새로운 관리도인 Z-CUSUM 관리도를 제안하였다.

또한 본 논문에서 제안한 'Z-Runs Rules'에 대해서는 추가적인 규칙들에 관한 지속적인 연구 및 개발이 필요하다.

참고문헌

- [1] Abdellatif M. A. and EI-Shabrawy A. Z. (1996), "The economic design of cumulative sum charts used to maintain current control of non-normal process means", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 31, pp 783- 790.
- [2] Besterfield, D. H.(2001), *Quality Control*, Prentice Hall, pp. 179-206.
- [3] Bissell, A. F(1979), "A Semi-parabolic Mask for Cusum Charts", *The Statistician*, Vol. 28, pp 1- 7.
- [4] Champ, C. W. and Woodall, W. H. (1987), "Exact Results for Shewhart Control Charts with Supplementary Run Rules", *Technometrics*, Vol. 29, pp 393-399.
- [5] Chiu, W. K.(1974), "The Economic Design of CUSUM Charts for Controlling Nomal Means", *Applied Statistics*, Vol. 23, pp 420- 433.
- [6] Deming, W. E.(1982), *Quality, Productivity, and Competitive Position* Massachusetts Institute of Technology.
- [7] Ewan, W. D.(1963), "When and How to Use CUSUM Charts", *Technometrics*, Vol. 5, pp 1- 22.
- [8] Gan, F. F.(1993), "The Run Length Distribution of a Cumulative Sum Control Chart", *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, pp 205- 215.
- [9] Gibra, I. N.(1975), "Recent Developments in Control Chart Techniques", *Journal of Quality Technology*, Vol. 7, pp 183-192.
- [10] Goel, A. L. and Wu, S. M. (1973), "Economically Optimum Design of CUSUM Charts", *Management Science*, Vol. 19, pp 1271- 1282.
- [11] Hawkins, D. M.(1992), "A Fast Accurate Approximation for Average Run Lengths of CUSUM Control Charts", *Journal of Quality Technology*, Vol.24. 37-43.
- [12] Hawkins, D. M.(1993a), "Cumulative Sum Control Charting: An Underutilized SPC Tool", *Quality Engineering*, Vol.25.
- [13] Johnson, N. L. and Leone, F. C.(1962), "Cumulative Sum Control Charts: Mathematical Principles Applied to Construction and Use", *Industrial Quality Control*, Vol. 18, pp 15- 21.