

복합포아송 수요를 가지는 CONWIP 시스템에서 고객집단의 성능평가 Order Based Performance Evaluation of a CONWIP System with Compound Poisson Demands

박찬우*, 이효성**

*한국철도기술연구원 철도안전연구시험센터(e-mail: cwpark@krri.re.kr)

**경희대학교 기계산업시스템공학부(e-mail: hslee@khu.ac.kr)

Abstract

In this study we consider a CONWIP system in which the processing times at each station follow a Coxian distribution and the demands for the finished products arrive according to a compound Poisson process. The demands that are not satisfied are backordered according to the number of demands that exist at their arrival instants. For this system we develop an approximation method to calculate order based performance measures such as the mean time of fulfilling a customer order and the mean number of customer orders. For the analysis of the proposed CONWIP system, we model the CONWIP system as a closed queueing network with a synchronization station and analyze the closed queueing network using a product form approximation method. Numerical tests show that the approximation method provides fairly good estimation of the performance measures of interest.

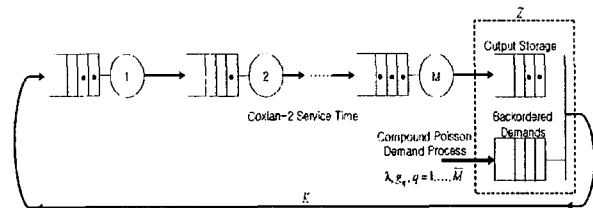
1. 서론

토요다 자동차가 간판(kanban) 시스템을 도입하여 성공을 거둔 이후 간판 시스템에 의해 대표되는 견인제어시스템(pull control system)에 대한 연구가 활발히 수행되었다. 그 중에서도 CONWIP(Constant Work In Process System)은 운영방식이 단순하고 적용범위가 넓으면서도, 간판시스템의 장점을 지니고 있어 특별한 관심을 끌고 있으며, Spearman, Duenyas, Hopp 등 많은 학자들에 의해 연구되었다 [5,6,7]. 이정은과 이효성[2]은 완제품에 대한 수요가 복합 포아송 과정(compound Poisson process)에 따라 발생하는 직렬형 CONWIP 시스템을 분석하였다. 이 연구에서는 각 기계에서의 가공시간은 지수분포를 따르며, 완제품에 대한 수요가 발생했을 때 재고가 존재하지 않으면 수요는 추후납품(backorder)이 가능하며, 재고창고의 버퍼(buffer)는 무한(infinite)하다고 가정하였다. 이와 같은 가정 하에서 이들은 재공품 수의 안전상태확률, 추후 납품되는 수요의 비율, 대기 중인 미충족수요의 평균 대기시간 등 시스템의 중요한 성능척도를 구하는 근사적 알고리즘을 개발하였다. 최근 박찬우, 신경화, 이효성[1]은 이정은과 이효성의 연구를 확장하여 각 기계에서의 가공시간이 Coxian 분포를 따르고, 재고창고의 버퍼(buffer)는 유한(finite)한 CONWIP 시스템에 대해 분석하였다. 그러나 이 연구에서는 분석의 대상을 집단고객(주문)을 구성하는 단위 고객의 성능척도에 한정하여 집단고객 관점에서의 시스템의 중요한 성능척도를 계산할 수 없었다는 점을 단점으로 지적할 수 있다. 따라

서 이러한 단점을 극복할 수 있는 연구가 요구되며, 본 논문에서는 이 연구의 확장으로서 대기 고객집단의 수, 고객집단의 대기시간 등과 같은 시스템의 중요한 성능평가척도를 신속하게 계산하여 주는 근사적 기법을 소개하고자 한다.

2. 연구모형

본 연구에서 분석하고자 하는 CONWIP 시스템은 다음과 같다([그림 1] 참조).

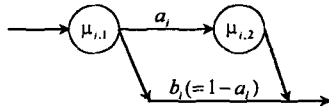


[그림 1] 복합 포아송 수요를 가지는 CONWIP 시스템

본 연구에서 분석하고자 하는 시스템은 M 개의 작업장과 완제품 재고창고로 구성된 흐름식 생산라인(flow line system)으로 각 작업장에는 1대의 기계가 존재한다. 작업장 1에서 최초의 가공을 받은 부품은 작업장 2,3,...에서 후속 가공을 거친 후 작업장 M 에서 완제품으로 출하되어 완제품 재고창고에 저장된다. 본 시스템에서는 재공품 재고의 수를 일정하게 유지하기 위하여 K 개의 간판을 사용하고 있으며, 수요가 발생하여 완제품이 창고에서 인출되면 완제품에 부착되어 있던 간판은 즉시 작업장 1로 이동해 작업지시(production authorization card)의 역할을 한다. 완제품에 대한 수요는 복합 포아송 과정에 따라 발생하고, 완제품에 대한 수요가 생겼을 때 재고가 존재하면 제품의 수요는 즉시 충족될 수 있으나, 수요를 충족할 완제품 재고가 존재하지 않고 대기 중인 미충족수요의 수가 B 미만이면, 새로 도착한 수요는 추후납품을 위해 대기상태에 들어가게 된다. 그러나 이미 대기 중인 미충족수요의 수가 B 를 초과하면, 새로 도착한 수요는 유실되는 것으로 가정한다. 따라서 B 의 값이 무한히 크면 본 모형은 미충족수요의 추후납품이 가능한 모형으로 귀착되고, B 의 값이 0이면 미충족수요가 모두 유실되는 모형으로 귀착된다.

본 연구에서는 작업장 i 의 가공시간은 [그림 2]과 같은 Coxian-2 분포를 따르며, 각 작업장에서의 기

제공장은 발생하지 않고, 각 작업장의 크기는 간판의 수 보다 커 봉쇄가 발생하지 않는다고 가정한다. 또한 재고창고 및 각 작업장에서의 서비스 규칙은 선입선출방식(FCFS)을 따른다고 가정한다. 본 논문에서는 수요의 단위 시간당 평균 도착율은 λ 이고, 일회 수요의 크기는 확률분포 G 로 표시하며, 수요의 최대크기는 \bar{M} , 수요의 크기가 q 일 확률은 g_q 로 표기한다($q = 1, \dots, \bar{M}$).



[그림 2] 작업장 i 의 Coxian-2 분포($i = 1, \dots, M$)

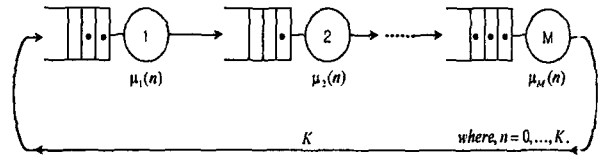
3. CONWIP 시스템의 분석

본 연구에서 분석하고자 하는 CONWIP 시스템에서는 시스템 내에 존재하는 간판 수가 K 로 고정되어 있으므로 간판을 고객으로 간주하면 대상 시스템은 폐쇄형 대기네트워크로 모델링 될 수 있으며, 본 연구에서는 이와 같은 폐쇄형 대기네트워크를 분석하기 위하여 승법형 근사법(product-form approximation method)을 사용하였다[3,8]. 본 논문에서는 승법형 근사법의 자세한 적용절차는 지면관계상 생략하고, 아래와 같이 승법형 근사법의 개요 및 하부네트워크의 분석에 관해서 소개하며, 상세한 내용은 문헌[1,2]를 참고하기 바란다.

승법형 근사법은 폐쇄형 대기네트워크를 몇 개의 하부네트워크로 분해한 후, 각각의 하부네트워크를 상태 의존적 서비스율을 갖는 지수형 서버로 근사화시키는 방법이다. 승법형 근사법에서는 이와 같은 근사화된 승법형 네트워크를 동등 승법형 대기네트워크(equivalent product form network)라 부르며, 동등 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율을 구하기 위하여 각각의 하부네트워크를 상태종속 포아송 도착과정을 갖는 개방형 대기시스템으로 가정해 분석한다. 개방형 대기시스템의 상태종속 산출율(state dependent throughput)이 구해지면 이 값이 곧 해당 단일 서버의 상태종속 서비스율로 사용된다. 또한 승법형 대기네트워크의 서비스율이 구해지면 승법형 대기네트워크를 구성하는 각 서버의 상태종속 산출율(state dependent throughput)을 구할 수 있으며, 이 값은 다시 해당 하부네트워크의 상태종속 도착율로 사용된다. 따라서 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율이 구해지면 이로부터 하부네트워크의 상태종속 도착율을 구할 수 있고, 하부네트워크의 상태종속 도착율이 구해지면 이로부터 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율을 구할 수 있게 된다. 그러나 승법형 대기네트워크의 상태종속 서비스율과 하부네트워크의 상태종속 도착율은 모두 미지의 값이므로 이를 구하는 문제는 고정점 문제(fixed point problem)가 되며, 이를 구하기 위해서는 반복적 기법을 사용하여야만 한다.

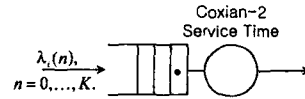
승법형 근사법이 성공적으로 적용되기 위해서는 몇 가지 조건이 충족되어야 하며, 그 중 하나는 하부네트워크간의 고객이동이 집단(group)으로 이루어져서는 안 된다는 조건이다. 본 연구 모형에서는 수요의 도착과정이 복합 포아송 과정을 따르므로, 작업장 Z 와 작업장 1간에는 한 순간에 2개 이상의 간판이

이동할 수 있으므로 작업장 Z 와 작업장 1을 하나의 하부네트워크에 포함시켜야만 한다. 본 연구에서는 작업장 Z 와 작업장 1을 하부네트워크 R^1 으로, 나머지 각각의 작업장을 독립적인 하부네트워크 R^i 라 정의한다면($i = 2, \dots, M$), 분석하고자 하는 폐쇄형 대기네트워크는 M 개의 하부네트워크로 분해된다. 하부네트워크 R^i 을 상태 종속 서비스율이 $\mu_i(n)$ 인 지수형 서버로 치환하면, 동등 승법형 대기네트워크는 [그림 3]와 같이 표현된다.



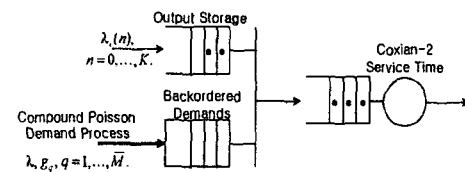
[그림 3] 동등 승법형 대기네트워크

승법형 네트워크의 상태 종속 서비스율 $\mu_i(n)$ 을 구하기 위하여서는 하부네트워크 R^i 를 상태종속 도착율이 $\lambda_i(n)$ 이고, 도착간격이 지수분포를 따르는 개방형 대기네트워크라 간주하여 분석한다. 본 연구에서는 R^1 을 제외한 각 하부네트워크는 [그림 4]과 같이 개방형 대기행렬 시스템으로 표현되며, 이는 $M/C_2/1/K$ 대기행렬 시스템의 분석기법을 이용하여 안전상태확률을 계산할 수 있다.



[그림 4] 하부네트워크 R^i ($i = 2, \dots, M$)

하부네트워크 R^1 은 [그림 5]와 같이 2개의 대기행렬 시스템으로 구성되어 있으므로, 상태의 수가 유한한 연속시간 마코프체인(continuous time Markov chain)으로 모델링이 가능하다.



[그림 5] 하부네트워크 R^1

하부네트워크 R^1 의 상태를 정의하기 위하여, n_1 을 작업장 Z 의 간판 수(양수일 경우), 혹은 미충족 수요의 수(음수일 경우)라 정의하고, n_2 을 작업장 1의 간판의 수, 그리고 n_3 을 Coxian-2 분포의 1단계에서 가공 중에 있는 작업장 1의 기계를 나타낸다고 하던, 하부네트워크 R^1 의 상태는 (n_1, n_2, n_3) 로 표현되므로, 하부네트워크 R^1 은 3차원 마코프체인으로 분석할 수 있다. 3차원 마코프체인의 안전상태확률은 시스템 평행방정식을 풀면 구할 수 있으나, 일반적으로 평행방정식의 형태는 매우 복잡하여 K 와 B 의 값이 커지면

풀기가 쉽다. 본 연구에서는 시스템 평행방정식을 효율적으로 풀기위하여 순환적 기법(recursive technique)을 이용하였다[3]. 하부네트워크 R^1 을 분석하기 위한 순환적기법의 적용과정은 복잡하므로 지면관계상 본 논문에서는 생략한다.

3. CONWIP 시스템에서 고객집단의 성능척도

승법형 근사법을 이용한 알고리즘이 수렴하여, 각 하부네트워크의 안정상태확률이 구해지면, 하부네트워크 R^1 의 안정상태확률을 이용하여 작업장 Z 의 안정상태확률을 구할 수 있다. 작업장 Z 에 n 개의 재고가(음수일 경우 미충족수요) 있을 때의 안정상태확률을 $P_Z(n)$ 라 한다면, 고객의 집단이 수용될 확률 SL^S 은 다음과 같이 계산된다.

$$SL^S = 1 - P_Z(-B) \quad (1)$$

고객의 집단이 수용되었다는 가정 하에, 이 집단의 마지막에 위치하고 있는 고객이 재고창고에 n 개의 재고를 볼 확률 $P^S(n)$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$P^S(n) = \frac{1}{SL^S} \sum_{q=1}^{\min(\bar{M}, K-n+1)} P_Z(n+q-1) g_q(n+q-1), \quad n = -B+1, K, K. \quad (2)$$

식(2)의 $g_q(n)$ 은 작업장 Z 에 n 개의 완제품이 존재할 때 완제품의 부족으로 유실되는 수요를 제외하고, 작업장 Z 에 도착한 실제 수요의 크기가 q 일 확률을 의미하며, 다음과 같이 표현된다.

$$g_q(n) = \begin{cases} g_q, & \text{if } 1 \leq q \leq \min[B+n, \bar{M}] - 1, \\ 1 - \sum_{l=1}^{\min[B+n, \bar{M}] - 1} g_l, & \text{if } q = \min[B+n, \bar{M}], \\ 0, & \text{o/w.} \end{cases} \quad (3)$$

도착 순간에 집단에 속해있는 한 고객이라도 대기한다면, 집단의 모든 고객의 수요가 충족될 때까지 집단이 대기한다고 정의했을 때, 안정상태확률 $P^S(n)$ 을 이용하여 도착한 고객집단의 전체 수요가 즉시 만족될 확률 F^S 과 도착한 집단이 대기할 확률 P_b^S 은 다음과 같이 계산된다.

$$F^S = SL^S \cdot \sum_{n=1}^K P^S(n) \quad (4)$$

$$P_b^S = SL^S - F^S \quad (5)$$

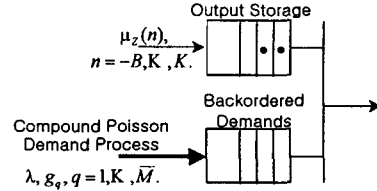
작업장 Z 에 n 개의 재고가 있을 때 임의의 수요가 충족될 때까지의 평균 시간을 $\bar{V}(n)$ 으로 정의했을 때, 도착한 고객집단의 평균 대기시간 \bar{W}^S , 대기 중에 있는 고객집단의 평균 대기시간 \bar{W}_b^S , 대기 중에 있는 평균 고객집단의 수 \bar{BP}^S 은 다음과 같이 계산된다.

$$\bar{W}^S = \sum_{n=-B+1}^0 P^S(n) \cdot \bar{V}(n-1) \quad (6)$$

$$\bar{W}_b^S = \frac{SL^S \cdot \bar{W}^S}{P_b^S} \quad (7)$$

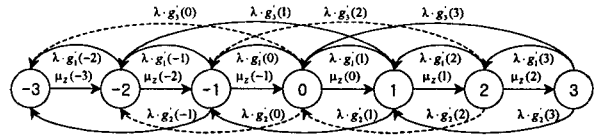
$$\bar{BP}^S = SL^S \cdot \lambda \cdot \bar{W}^S \quad (8)$$

식(6)에서 알 수 있듯이 $\bar{V}(n)$ 을 추정할 수 있다면 \bar{W}^S 을 계산할 수 있으며, 이를 이용하여 \bar{W}_b^S 와 \bar{BP}^S 을 계산할 수 있다. 본 연구에서는 $\bar{V}(n)$ 을 계산하기 위하여, 작업장 Z 를 n 개의 재고가 존재할 때 완제품의 공급율이 $\mu_Z(n)$ 이고, 완제품의 공급간격이 지수분포를 따르는 [그림 6]과 같은 단일 시스템으로 근사화하였다.



[그림 6] 완제품의 공급을 $\mu_Z(n)$ 을 가지는 작업장 Z

완제품의 공급을 $\mu_Z(n)$ 을 가지는 작업장 Z 는 완제품의 공급간격과 고객의 도착간격이 모두 포아송 과정을 따르므로, 작업장 Z 는 1차원 상태인 n 으로 표현 가능하다. $K = B = \bar{M} = 3$ 일 경우의 완제품의 공급을 $\mu_Z(n)$ 을 가지는 작업장 Z 의 상태전이율 다이어그램은 [그림 7]과 같이 표현된다.



[그림 7] 완제품의 공급을 $\mu_Z(n)$ 을 가지는 작업장 Z 의 상태전이율 다이어그램($K = B = \bar{M} = 3$ 일 경우)

$\mu_Z(n)$ 을 구하기 위하여, 작업장 Z 의 상태공간을 $S_1^Z = \{-B, \dots, n\}$ 과 $S_2^Z = \{n+1, \dots, K\}$ 로 분할한 후, S_1^Z 과 S_2^Z 간의 평균 전이율을 동일하게 하여주는 평행방정식을 작성하면 다음과 같이 표시된다.

$$\mu_Z(n) P_Z(n) = \sum_{q_1=1}^{h_1(n)} P_Z(n+q_1) \sum_{q_2=q_1}^{h_2(n, q_1)} \lambda \cdot g_{q_2}(n+q_1), \quad n = -B, K, K-1. \quad (9)$$

여기서, $h_1(n) = \min(\bar{M}, K-n)$, $h_2(n, q_1) = \min(\bar{M}, B+n+q_1)$.

식(9)으로부터 $\mu_Z(n)$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$\mu_Z(n) = \begin{cases} \frac{\lambda \sum_{q_1=1}^{h_1(n)} P_Z(n+q_1) \sum_{q_2=q_1}^{h_2(n, q_1)} g_{q_2}(n+q_1)}{P_Z(n)}, & n = -B, K, K-1, \\ 0, & n = K. \end{cases} \quad (10)$$

작업장 Z 의 완제품의 공급을 $\mu_Z(n)$ 이 구해지면, 미충족수요의 대기시간은 초기상태확률 $P_Z(n)$ 을 가지는 단계형 확률변수(PH random variable)로 모형화하여 $\bar{V}(n)$ 을 계산할 수 있다. 작업장 Z 에서 완제품의 공급율이 상태종속이므로, 작업장 Z 에서 임의의 미충족수요의 대기시간은 도착한 순간에 작업장

Z의 재고수준과 대기시간 동안 도착한 수요의 수에 의존한다. 따라서 작업장 Z에서 임의의 미충족수요의 대기시간은 이 수요가 앞으로 기다려야 하는 서비스 단계 수와 부품창고의 현재 재고수준을 모두 고려해야만 정확히 표현되며, 이에 본 연구에서는 아래의 의미를 가지는 상태 (r, b) 을 정의한다.

- r: 미충족수요가 완제품이 충족될 때까지 자신을 포함하여 작업장 Z에서 기다려야 하는 서비스 단계 수.
- b: 작업장 Z에 존재하는 미충족수요의 수.

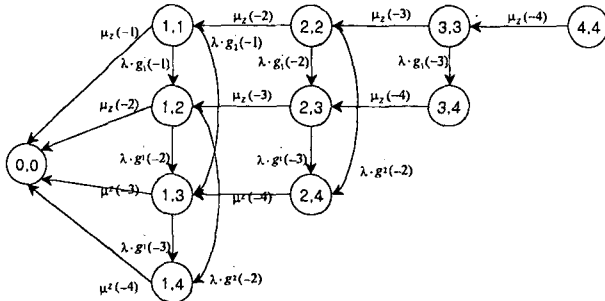
완제품이 충족되는 시점을 상태(0,0)로 정의했을 때, 작업장 Z에 상태 (r, b) 에 있는 미충족수요의 대기시간은 상태 (r, b) 에서 상태(0,0)에 도달 할 때까지의 시간으로 해석될 수 있다. 상태 (r, b) 에서 상태(0,0)에 도달 할 때까지의 시간을 $T(r, b)$ 라 하고, 이의 평균을 $\bar{T}(r, b)$ 라 정의했을 때, $\bar{T}(r, b)$ 과 $\bar{V}(n)$ 은 식(11)과 같은 관계가 성립된다. 따라서 $\bar{T}(r, b)$ 의 값이 계산되면, 식(11)로부터 $\bar{V}(n)$ 의 계산할 수 있다.

$$\bar{V}(n) = \begin{cases} \bar{T}(-n, -n), & \text{if } n = -B, K, -1. \\ 0, & \text{o/w.} \end{cases} \quad (11)$$

상태 (r, b) 의 상태공간은 식(12)과 같이 정의되며, $B=4, \bar{M}=3$ 일 경우에 $T(r, b)$ 의 예는[그림 8]과 같다.

$$S^s = \{0 \leq r \leq B, r \leq b \leq B \cdot \delta(r > 0)\} \quad (12)$$

여기서, $\delta(\text{condition}) = \begin{cases} 1, & \text{if condition} = \text{true}, \\ 0, & \text{if condition} = \text{false}. \end{cases}$



[그림 8] $B=4, \bar{M}=3$ 일 경우에 $T(r, b)$ 의 예

[그림 8]에서 알 수 있듯이 $T(r, b)$ 은 임의의 상태를 한번 이탈하면, 다시 그 상태를 방문하지 않는 특성을 지니고 있으며, $T(r, b)$ 의 이러한 특성을 이용하면 식(13)와 같이 $\bar{T}(r, b)$ 을 계산할 수 있다.

$$\bar{T}(r, b) = \frac{1}{O_b(r, b)} + \bar{T}_1(r, b) + \bar{T}_2(r, b) \quad (13)$$

여기서, $\bar{T}(0, 0) = 0$.

식(13)에서 $O_b(r, b)$ 은 상태 (r, b) 의 이탈률로써 다음과 같이 정의된다.

$$O_b(r, b) = \delta(0 < b < B) \cdot \lambda + \delta(b > 0) \cdot \mu_z(-b) \quad (14)$$

식(13)의 $\bar{T}_1(r, b)$ 은 고객의 도착에 의해서 상태 (r, b) 를 이탈하여 다음 상태로 이동했을 때, 다음 상태에서 상태(0,0)로 흡수 될 때까지의 평균 시간으로

정의되며, 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{T}_1(r, b) = \begin{cases} \sum_{q=1}^{\min(B-b, M)} \frac{\lambda \cdot g_q(-b)}{O_b(r, b)} \bar{T}(r, b+q), & \text{if } 0 < b < B, \\ 0, & \text{o/w.} \end{cases} \quad (15)$$

식(13)의 $\bar{T}_2(r, b)$ 은 완제품의 공급에 의해서 상태 (r, b) 를 이탈하여 다음 상태로 이동했을 때, 다음 상태에서 상태(0,0)로 흡수될 때까지의 평균 시간으로 정의되며, 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{T}_2(r, b) = \begin{cases} \frac{\mu_z(-b)}{O_b(r, b)} \bar{T}(r-1, b-1), & \text{if } r > 0 \text{ and } b > 0, \\ 0, & \text{o/w.} \end{cases} \quad (16)$$

앞에서 언급했듯이 $T(r, b)$ 은 임의의 상태를 한번 이탈하면, 다시 그 상태를 방문하지 않는 특성을 지니고 있으며, 이와 같은 특성을 이용하면, $\bar{T}(r, b)$ 은 식(13)을 특정한 순서에 따라 실행함으로써 순차적으로 계산될 수 있다. 본 연구에서 관찰된 식(13)의 실행순서는 아래에서 주어진 반복계획으로 정리될 수 있으며, 아래의 반복계획의 실행한 후, 식(11)을 적용하면 $\bar{V}(n)$ 의 값을 계산할 수 있다. 따라서 \bar{W}^s 를 계산할 수 있으며, 이를 이용하여 \bar{W}_b^s 와 \bar{BP}^s 를 계산할 수 있다.

$\bar{T}(r, b)$ 의 반복계획

```

for r = 1 to B
  for b = B downto 0
     $\bar{T}(r, b) = \frac{1}{O_b(r, b)} + \bar{T}_1(r, b) + \bar{T}_2(r, b)$ 
  end
end
  
```

(13)

4. 연구결과

본 연구에서 개발된 근사적 기법의 정확도를 실험하기 위하여 여러 예제에 대하여 시뮬레이션 결과와 비교하여 보았다. 시뮬레이션의 종료조건으로 시뮬레이션 시간을 10^6 로 설정하여 10번 반복하였고, 알고리즘의 종료조건은 10^{-6} 이하로 설정하였다. 본 연구에서 실험한 예제에서 알고리즘은 10번 이내의 반복에서 수렴함을 관측할 수 있었고, 모든 예제에서 수렴함을 볼 수 있었다. 본 절에서는 모든 예제 중 2개의 대표적인 예제를 선정하여 소개하고자 하며, 아래의 표와 그림에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 제안된 알고리즘은 수치가 매우 작은 경우를 제외하고는 상대 오차율 5%이내의 정확한 값을 산출함을 알 수 있다. 지면관계상 모든 예제 중 2개의 예제를 소개하였으나, 다른 예제에 대해서도 비슷한 양상을 보였음을 밝힌다.

[참고 문헌]

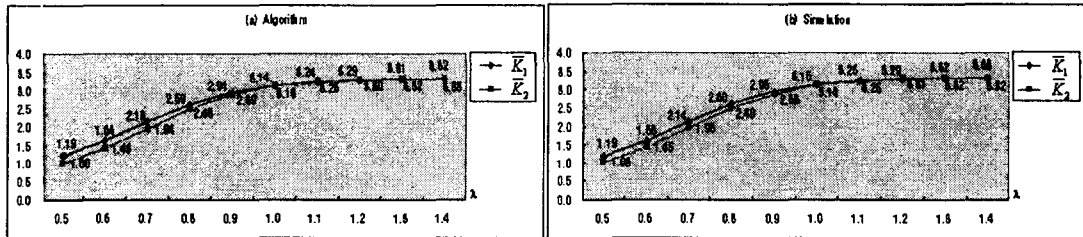
[1] 박찬우, 신경화, 이효성, "완제품에 대한 수요가 Compound Poisson 과정에 따라 발생하는 CONWIP System의 성능분석", 「2002 한국경영과학회/대한산업공학회 추계 공동학술대회 논문집」
 [2] 이정은, 이효성, "Compound Poisson 수요를 갖는 CONWIP 시스템의 근사적 분석", 「한국경영과학회지」, 제 23권, 제 3호 (1998)

- [3] B. Eaynat and Y. Dallery, "A Unified View of Product-form Approximation Techniques for General Closec Queueing Networks.", Performance Evaluation vol.18 pp.205-224, 1993
- [4] Buzacott, J.A. and D. Kostelski, "Matrix-geometric and Recursive Algorithm Solution of a two-stage Unreliable Flow Line", *IIE Trans.*, vol.19 (1987), pp.429-438.
- [5] I. Duenyao and W. J. Hopp, "Conwip Assembly System with Deterministic Processing and Random Outages", *IIE Transactions*, vol. 24. No.4, pp.97-111, 1992
- [6] I. Duenyas and W.J.Hopp, "Estimating the Throughput of an Exponential Conwip Assembly System", *Queueing systems*, vol.14, pp.135-157, 1993
- [7] I.Duenyas, W.J.Hopp and M.L. Spearman, "Characterizing the Output Process of a Conwip Line with Deterministic Processing and Random Outages", *Mgmt. Sci.*,vol.39, pp.975-988, 1993
- [8] R.A.Marie, "An Approximate Analytical Method for General Queueing Networks", *IEEE Trans. Soft. Eng. SE-5*, pp.530-538, 1979

<표 1> 예제 가 군의 고객집단에 대한 시스템 성능척도

$M = 3, K = 10, B = 10, \bar{M} = 2, g_1 = g_2 = 1/2, \mu_{i,1} = \mu_{i,2} = 2, a_i = 0.3, i = 1, K, M.$

λ	Algorithm (Relative Error (%))						Simulation (95% Confidence Interval)					
	BP^s	F^s	SL^s	P_b^s	\bar{W}^s	\bar{W}_b^s	BP^s	F^s	SL^s	P_b^s	\bar{W}^s	\bar{W}_b^s
0.5	0.0549 (-2.4967)	0.9484 (0.1902)	0.9998 (0.0000)	0.0514 (-3.3835)	0.1088 (-2.4000)	2.1336 (0.8079)	0.0563 (+/- 0.0003)	0.9466 (+/- 0.0002)	0.9998 (+/- 0.0000)	0.0532 (+/- 0.0002)	0.1125 (+/- 0.0007)	2.1165 (+/- 0.0035)
0.5	0.2199 (1.6644)	0.8932 (-0.0233)	0.9983 (-0.0100)	0.1391 (0.0719)	0.3672 (1.7175)	2.6345 (1.5865)	0.2163 (+/- 0.0004)	0.8894 (+/- 0.0002)	0.9984 (+/- 0.0000)	0.1390 (+/- 0.0002)	0.3610 (+/- 0.0006)	2.5931 (+/- 0.0019)
0.7	0.6547 (0.4686)	0.6974 (0.3742)	0.9913 (-0.0706)	0.2309 (-1.1104)	0.9579 (0.5458)	3.2306 (1.5944)	0.6616 (+/- 0.0008)	0.6948 (+/- 0.0003)	0.9920 (+/- 0.0000)	0.2972 (+/- 0.0003)	0.9527 (+/- 0.0012)	3.1799 (+/- 0.0022)
0.3	1.5140 (0.5112)	0.4828 (0.8565)	0.9709 (-0.1851)	0.4881 (-1.1943)	1.9483 (0.6974)	3.8775 (1.7316)	1.5063 (+/- 0.0011)	0.4787 (+/- 0.0002)	0.9727 (+/- 0.0000)	0.4940 (+/- 0.0014)	1.9369 (+/- 0.0014)	3.8115 (+/- 0.0012)
0.3	2.6398 (0.1290)	0.2822 (1.5839)	0.9324 (-0.3953)	0.6502 (-1.2304)	3.1458 (0.5241)	4.5110 (1.3685)	2.6364 (+/- 0.0016)	0.2778 (+/- 0.0003)	0.9361 (+/- 0.0001)	0.6563 (+/- 0.0002)	3.1294 (+/- 0.0020)	4.4501 (+/- 0.0014)
1.0	3.7367 (-0.1843)	0.1455 (3.4115)	0.8815 (-0.4517)	0.7361 (-1.1681)	4.2388 (0.2673)	5.0765 (1.0068)	3.7436 (+/- 0.0015)	0.1407 (+/- 0.0002)	0.8855 (+/- 0.0001)	0.7448 (+/- 0.0001)	4.2275 (+/- 0.0020)	5.0262 (+/- 0.0016)
1.1	4.6214 (-0.4309)	0.0705 (7.4695)	0.8278 (-0.5646)	0.7573 (-1.2647)	5.0754 (0.1421)	5.5476 (0.8361)	4.6414 (+/- 0.0010)	0.0656 (+/- 0.0001)	0.8325 (+/- 0.0001)	0.7670 (+/- 0.0001)	5.0682 (+/- 0.0013)	5.5016 (+/- 0.0014)
1.2	5.2883 (-0.5678)	0.0337 (13.4680)	0.7769 (-0.5886)	0.7432 (-1.1439)	5.6672 (-0.0705)	5.9239 (0.4800)	5.3185 (+/- 0.0018)	0.0297 (+/- 0.0001)	0.7815 (+/- 0.0001)	0.7518 (+/- 0.0001)	5.6712 (+/- 0.0024)	5.8956 (+/- 0.0020)
1.3	5.7757 (-0.6980)	0.0163 (20.7407)	0.7308 (-0.5714)	0.7145 (-0.9702)	6.0794 (-0.1331)	6.2181 (0.2893)	5.8163 (+/- 0.0008)	0.0135 (+/- 0.0000)	0.7360 (+/- 0.0001)	0.7215 (+/- 0.0001)	6.0875 (+/- 0.0012)	6.2014 (+/- 0.0012)
1.1	6.1511 (-0.4498)	0.0081 (22.7273)	0.6896 (-0.6626)	0.6815 (-0.8871)	6.3712 (0.2082)	6.4470 (0.4440)	6.1789 (+/- 0.0007)	0.0066 (+/- 0.0000)	0.6942 (+/- 0.0001)	0.6876 (+/- 0.0001)	6.3579 (+/- 0.0014)	6.4185 (+/- 0.0015)



[그림 10] 작업장의 평균 재공품 수(예제 가 군)

<표 2> 예제 나 군의 고객집단에 대한 시스템 성능척도

$M = 7, K = 15, \lambda = 1, \bar{M} = 3, g_1 = g_2 = g_3 = 1/3, \mu_{i,1} = \mu_{i,2} = 4, a_i = 0.5, i = 1, K, M.$

B	Algorithm (Relative Error (%))						Simulation (95% Confidence Interval)					
	BP^s	F^s	SL^s	P_b^s	\bar{W}^s	\bar{W}_b^s	BP^s	F^s	SL^s	P_b^s	\bar{W}^s	\bar{W}_b^s
2	0.2345 (2.5909)	0.6326 (-0.1736)	0.9061 (-0.6033)	0.2734 (-1.5839)	0.2588 (3.2310)	0.8576 (4.2421)	0.2286 (+/- 0.0002)	0.6337 (+/- 0.0002)	0.9116 (+/- 0.0001)	0.2778 (+/- 0.0001)	0.2507 (+/- 0.0002)	0.8227 (+/- 0.0004)
4	0.5604 (2.3188)	0.5293 (-0.7873)	0.9199 (-0.6687)	0.3906 (-0.4841)	0.6092 (2.9624)	1.4346 (2.8019)	0.5477 (+/- 0.0005)	0.5335 (+/- 0.0004)	0.9260 (+/- 0.0001)	0.3925 (+/- 0.0005)	0.5915 (+/- 0.0005)	1.3955 (+/- 0.0005)
6	0.9447 (3.5969)	0.4518 (-1.6543)	0.9301 (-0.8316)	0.4784 (-0.0209)	1.0157 (4.4636)	1.9750 (3.6365)	0.9119 (+/- 0.0003)	0.4594 (+/- 0.0001)	0.9379 (+/- 0.0000)	0.4785 (+/- 0.0001)	0.9723 (+/- 0.0003)	1.9057 (+/- 0.0004)
8	1.3689 (4.1363)	0.3917 (-1.7803)	0.9379 (-0.8667)	0.5462 (-0.2010)	1.4606 (5.0414)	2.5080 (4.3391)	1.3155 (+/- 0.0015)	0.3988 (+/- 0.0004)	0.9461 (+/- 0.0000)	0.5473 (+/- 0.0003)	1.3905 (+/- 0.0017)	2.4037 (+/- 0.0014)
10	1.8250 (5.0541)	0.3440 (-2.2172)	0.9440 (-0.8662)	0.6000 (-0.2328)	1.9333 (6.0737)	3.0418 (5.3036)	1.7372 (+/- 0.0018)	0.3518 (+/- 0.0004)	0.9532 (+/- 0.0000)	0.6014 (+/- 0.0004)	1.8226 (+/- 0.0019)	2.8886 (+/- 0.0012)
12	2.3029 (5.5263)	0.3054 (-2.5837)	0.9489 (-0.9499)	0.6435 (-0.1552)	2.4270 (6.5456)	3.5790 (5.7031)	2.1823 (+/- 0.0011)	0.3135 (+/- 0.0003)	0.9680 (+/- 0.0001)	0.6445 (+/- 0.0002)	2.2779 (+/- 0.0013)	3.3699 (+/- 0.0012)
14	2.7987 (6.1078)	0.2736 (-3.0475)	0.9529 (-1.0180)	0.6792 (-0.1910)	2.9372 (7.2010)	4.1205 (6.3090)	2.6376 (+/- 0.0027)	0.2822 (+/- 0.0005)	0.9627 (+/- 0.0000)	0.6805 (+/- 0.0004)	2.7399 (+/- 0.0029)	3.8760 (+/- 0.0017)
16	3.3091 (6.7452)	0.2471 (-3.7773)	0.9562 (-1.0555)	0.7091 (-0.0705)	3.4607 (7.8805)	4.6668 (6.8211)	3.1000 (+/- 0.0022)	0.2568 (+/- 0.0002)	0.9684 (+/- 0.0001)	0.7096 (+/- 0.0003)	3.2079 (+/- 0.0026)	4.3688 (+/- 0.0039)
18	3.8318 (7.1143)	0.2246 (-4.0581)	0.9590 (-1.0320)	0.7343 (-0.0816)	3.9957 (8.2347)	5.2181 (7.2051)	3.5773 (+/- 0.0027)	0.2341 (+/- 0.0003)	0.9680 (+/- 0.0001)	0.7349 (+/- 0.0003)	3.6917 (+/- 0.0029)	4.8674 (+/- 0.0020)