

# 여러 개의 조화맥동을 갖는 유체를 운반하는 파이프의 진동 해석

## The Vibration Analysis of Pipes Conveying Fluid with Several Harmonic Pulsations

정석현\*·서영수\*·정의봉\*\*

Seok-Hyen Jeong\*, Young-Soo Seo\*, Weui-Bong Jeong\*\*

**Key Words :** pipes(파이프), harmonic (조화), pulsation(맥동), conveying fluid(유체를 운반하는)

### ABSTRACT

It is well known that the pipe will be unstable if the fluid velocity is higher than critical velocity. But even if the velocity of the fluid below the critical velocity, resonance will be caused by pulsation of the fluid. So, many people has studied about the piping system vibration due to a fluid pulsation. But almost guess that fluid has only one hamonic pulsation. Actually, like this case is rare quite. So, in this paper, we consider the vibration analysis of a pipe conveying fluid with several harmonic pulsations and compare the result which considers one hamonic pulsation with the result which considers several harmonic pulsations. And we verify the result in time domain again.

### 1. 서 론

유체를 수송하기 위해 이용되고 있는 배관 시스템은 산업전반은 물론 우리 주변에서도 쉽게 볼 수 있다. 그런데 배관을 설계하는데 있어서 가장 중요한 문제 중의 하나가 배관내부를 흐르는 유체에 의해 발생하는 진동과 소음이다. 그래서 이 분야에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다.

배관의 진동을 해석하는데 있어서 유체의 영향은 크다. 유체의 압력과 속도가 커지면 배관의 고유 진동수는 낮아지고, 배관 내부를 흐르는 유체의 맥동에 의해 배관이 임계속도 이하에서 불안정해지기도 한다.

그런데 대부분의 경우에 유체를 일정 속도로 가정하거나 단지 하나의 조화맥동성분만을 가지고 있다고 가정하고 있다.<sup>(3-5)</sup> 그러나 실제로 이런 경우는 아주 드물고, 펌프나 압축기의 배관을 흐르는 유체의 맥동을 보면 여러 개의 맥동성분을 가지고 있는 경우가 대부분이다.

본 논문에서는 유체를 고려한 배관의 운동방정식을 유도한 다음, 여기서 유체의 속도가 여러 개의 맥동 성분을 가진다고 가정하고, 그것을 보 (beam)의 Finite Element Method 이론과 Bolotin 법<sup>(7)</sup>을 이용하여 안정성 해석을 수행한다. 그리고 유체의 맥동성분을 2 개 이상으로 가정하여 나타나는 불안정한 영역과 각각 하나의 맥동성분을 가지고 해석하여 나타나는 불안정 영역을 비

교한다. 마지막으로 시간 영역의 응답과도 비교하여 결과의 타당성을 검증한다.

### 2. 운동방정식

#### 2.1 해석 모델

해석 모델은 길이가  $L$  인 양단고정 수직배관으로써 Fig. 1 에 나타내어져 있다.

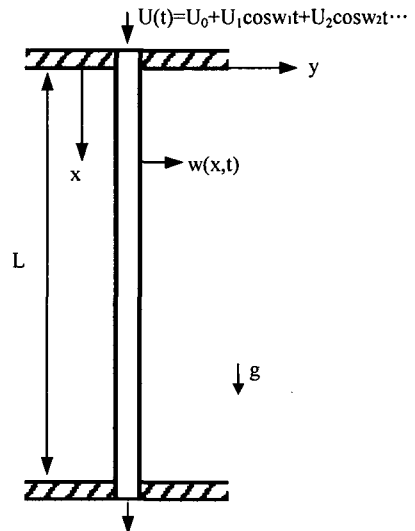


Fig. 1 Pipe model

\* 부산대학교 기계설계공학과

\*\* 부산대학교 기계공학부

$L$  은 배관의 전체 길이이고,  $w(x, t)$  는 배관의 입구부로부터  $x$  만큼의 위치에서의 횡 방향 변위

이다.  $U$  는 유체의 속도로서 특정 주파수로 맥동하는 성분을 포함하고 있음을 나타내고 있다.

## 2.2 운동방정식

배관길이에 비해 단면적이 작은 경우에 대해서 오일러 보의 이론을 적용하고, 횡 방향 변위가 아주 작다고 가정하면 미소 변형 후  $dx$  구간에서의 유체 및 배관 요소를 Fig 2. 와 Fig 3. 에서와 같이 나타낼 수 있다.

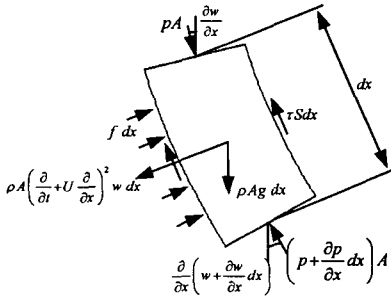


Fig. 2 Fluid element

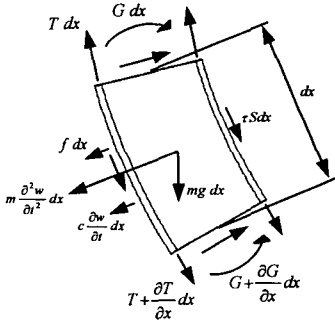


Fig. 3 Pipe element

여기서  $A$  는 배관의 내부단면적,  $S$  는 내부단면적의 원주길이,  $m$  은 배관의 단위길이당 질량,  $\rho$  는 유체의 밀도,  $p$  는 양 단면에서의 압력,  $\tau$  는 전단응력의 접선방향 성분,  $f$  는 전단응력에 의한 수직방향으로 단위길이당 작용하는 힘,  $T$  는 배관에서의 인장력,  $G$  는 배관에서의 전단력,  $c$  는 배관의 감쇠계수,  $g$  는 중력가속도를 나타낸다.

운동방정식의 유도를 위해 유체요소와 배관요소에서  $x$  및  $y$  방향 힘의 평형식을 쓰면 다음과 같다.

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} - \tau S + \rho A g - f = \rho A \frac{dU}{dt} \quad (1)$$

$$f - A \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \tau S \frac{\partial w}{\partial x} = \rho A \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 w \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \tau S + mg + f = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} - f + \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau S \frac{\partial w}{\partial x} - c \frac{\partial w}{\partial t} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

위 식들로부터 공통되는 부분을 소거하고 압력과 속도의 관계식을 이용하여 압력항을 속도항으로 대체한 뒤 전체 운동방정식을 유도하면 다음과 같이 된다. 이때 출구에서의 압력과 인장력은 없다고 가정한다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left\{ \rho A U^2 - \left[ (\rho A + m)g + \rho A \frac{dU}{dt} \right] (L-x) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \rho A U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (\rho A + m)g \frac{\partial w}{\partial x} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (\rho A + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

## 3. Finite Element Method

유체를 포함한 배관의 유한요소 지배방정식을 유도하기 위해서 가중함수  $w^*$  를 식(5)에 곱한 후 파이프 전체 길이에 대해서 적분을 한다.

$$\int_0^L EI w'''' w^* dx + \int_0^L \left( \rho A U^2 + \rho A L \frac{dU}{dt} \right) w'' w^* dx + \int_0^L \left( -\rho A \frac{dU}{dt} x \right) w' w^* dx + \int_0^L 2 \rho A U w' w^* dx + \int_0^L c w' w^* dx + \int_0^L (\rho A + m) \ddot{w} w^* dx = 0 \quad (6)$$

여기서 변위는 형상함수를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$w = [N(\xi)] \{\bar{w}\}_e \quad (7)$$

여기서  $[N(\xi)]$  는 형상함수이다. 식(7)을 이용하여 유한요소 지배 방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\rho A + m) [S_1] \{\bar{w}\} + \{2 \rho A U [S_3] + c [S_1]\} \{\bar{w}\} \{EI [S_2] - \left( \rho A U^2 + \rho A L \frac{dU}{dt} + (\rho A + m)gL \right) [S_4] + (\rho A + m)g [S_3] + \rho A \frac{dU}{dt} ([S_3] + [S_6])\} \{\bar{w}\} = \{\bar{f}\} \quad (8)$$

여기서  $\{f\}$  는 외부에서 시스템에 가해진 외력 벡터를 나타낸다.

여기서 쉽고 빠르게 주어진 방정식을 분석하기 위해서 모드 좌표계로 변환시킨다. 우선 유체가 적용되지 않은 방정식에 대해 먼저 고유치 해석을 하면 고유벡터와 고유치를 구할 수 있고 여기서 파이프의 변위는 고유벡터를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\bar{w}\} = [\varphi] \{\bar{\alpha}\} \quad (9)$$

여기서  $[\varphi]$  는 고유벡터,  $\{\bar{\alpha}\}$  는 모드좌표계이다.

식(9)을 식(8)에 대입하고 양변에  $[\varphi]^T$  를 곱하면 다음과 같이 모드 좌표계로 변환된 유한요소 지배방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & [U] \{\bar{\alpha}\} + \{2\rho AU[P] + [F]\} \{\bar{\alpha}\} \\ & + \{[\Lambda] + (\rho AU^2 - \rho AL \frac{dU}{dt} - (\rho A + m)gL)\} [\varphi] \\ & + \left( \rho A \frac{dU}{dt} + (\rho A + m)g \right) [R] + (\rho A + m)g[P] \{\bar{\alpha}\} \\ & = [\varphi]^T \{f\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$\begin{aligned} [M] &= (\rho A + m)[S_1], [K] = EI[S_2], \\ [U] &= [\varphi]^T [M] [\varphi], [\Lambda] = [\varphi]^T [K] [\varphi], \\ [F] &= c[\varphi]^T [S_1] [\varphi], [P] = [\varphi]^T [S_3] [\varphi], \\ [Q] &= -[\varphi]^T [S_4] [\varphi], [R] = -[\varphi]^T ([S_5] + [S_6]) [\varphi] \end{aligned} \quad (11)$$

이다.

#### 4. 안정성 해석

유속의 맥동 진폭이 0 이 아닌 유동에서는 평균 유속이 임계유속에 미치지 못하여도 조화맥동의 주파수와 배관의 고유진동수의 관계에 따라 공진 현상이 관찰 된다. 이는 parametric resonance 라고 알려져 있는 것으로 맥동주파수  $\omega$  가  $2\omega_n/k$ ,  $k=1,2,3,\dots$  근처의 특정 범위 내에 포함되면 공진이 발생하게 되고, 유체의 속도 및 질량 등에 의해 그 범위가 결정되어 진다. 여기서  $\omega_n$  은 배관의 고유진동수 이다.

이러한 공진에 의한 불안정영역을 판별하는 가장 쉽고 널리 알려진 방법으로 Bolotin 법<sup>(7)</sup> 이 있다. 이것은 시스템이 주기적으로 변할 때의 전체 해를 그 주기 T 와 2T 에서의 해로서 표현하

는 방법으로 여기서는 맥동주파수의 k/2 배와 k 배에 대한 fourier 급수 전개로서 해를 가정하여 그 계수들에 대한 행렬식을 이용하는 방법이다.

운동 방정식의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$\bar{\alpha} = \sum_k \left\{ \bar{a}_k \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + \bar{b}_k \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\}, \quad k=0,1,2, \quad (12)$$

식(12)을 식(11)에 대입하여 sin 함수와 cos 함수들의 계수들로 이루어진  $[G]$  라는 행렬을 구성할 수가 있다.

$$[G_{ij}] \begin{Bmatrix} \bar{a}_i \\ \bar{b}_i \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (13)$$

주어진 유체의 속도와 주파수 등의 특성에 따라 행렬  $[G]$  의 행렬식이 0 이 되는 조건을 찾으려면 안정영역과 불안정영역의 경계를 알 수가 있게 된다.

#### 5. 여러 개의 맥동 유속 적용

지금까지 발표된 논문에서는 맥동성분을 하나로 가정하고 해석한 경우가 대부분이다. 그러나 실제 유체로 인한 배관의 진동 문제에 있어서 맥동성분이 한 개만 나타나는 경우는 아주 이상적인 경우에 해당되는 것이다. 펌프나 압축기의 토출부에서 유체 유속의 형태는 이상적인 조화 함수의 형태가 아니라 여러 주파수의 맥동성분이 섞인 속도 분포를 보여준다.

배관을 흐르는 유체가 2 개 이상의 속도 맥동성분이 있다고 가정하면 유체의 속도를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(t) = U_0 + U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t + U_3 \cos \omega_3 t \dots \quad (14)$$

식(14)을 식(10)에 대입하면 Bolotin 법을 통해 안정성 해석을 하는데 있어서 맥동성분이 하나일 때의 행렬구성에 비교하여 문제가 생기는 항은

$$U(t)\dot{\alpha}, \quad \frac{dU(t)}{dt}\alpha, \quad U(t)^2\alpha \quad (15)$$

와 같이 계수에서의 시간의 함수인 속도성분과 Bolotin 법 에서 가정한 해의 시간의 함수가 곱해지는 부분이다. 위의 항을 유한요소 지배방정식에 대입하기 위해서 위의 요소들을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{k=0}^{W_n} \left\{ a_k \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + b_k \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \\ \dot{\alpha} &= \sum_{k=0}^{W_n} \left\{ \left(\frac{1}{2}k\omega a_k\right) \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + \left(-\frac{1}{2}k\omega b_k\right) \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \\ U(t) &= \sum_{i=0}^N u(i) \cos(\omega(i)t) \\ \dot{U}(t) &= \sum_{i=1}^N \{-u(i)\omega(i)\} \sin(\omega(i)t) = \sum_{i=1}^N u'(i) \sin(\omega(i)t) \quad (16)\end{aligned}$$

(16) 식으로 나타낸다. 여기서  $N$  은 가정한 속도 맥동성분의 개수,  $W_n$  은 Bolotin 법에서 가정한 해의 개수이다. 위의 식들을 (15)의 항들에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}U(t)\dot{\alpha} &= \sum_{i=0}^N u(i) \cos\{\omega(i)t\} \sum_{k=0}^{W_n} \left\{ \left(\frac{1}{2}k\omega a_k\right) \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + \left(-\frac{1}{2}k\omega b_k\right) \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{W_n} \left[ u(i) \left(\frac{1}{2}k\omega a_k\right) \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\omega(i)t + \frac{1}{2}k\omega t\right) + \cos\left(\omega(i)t - \frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{W_n} \left[ u(i) \left(-\frac{1}{2}k\omega b_k\right) \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\omega(i)t + \frac{1}{2}k\omega t\right) - \sin\left(\omega(i)t - \frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \right] \quad (17-a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dU(t)}{dt} \alpha &= \sum_{i=0}^N u'(i) \sin\{\omega(i)t\} \sum_{k=1}^{W_n} \left\{ (a_k) \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + (b_k) \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{W_n} \left[ u'(i) (a_k) \frac{1}{2} \left\{ -\cos\left(\omega(i)t + \frac{1}{2}k\omega t\right) + \cos\left(\omega(i)t - \frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{W_n} \left[ u'(i) (b_k) \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\omega(i)t + \frac{1}{2}k\omega t\right) + \sin\left(\omega(i)t - \frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \right] \quad (17-b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(t)^2 \alpha &= \sum_{i=0}^N u(i) \cos\{\omega(i)t\} \sum_{j=0}^N u(j) \cos\{\omega(j)t\} \sum_{k=0}^{W_n} \left\{ (a_k) \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + (b_k) \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[ u(i)u(j) \frac{1}{2} \left\{ \cos\{\omega(i)t + \omega(j)t\} + \cos\{\omega(i)t - \omega(j)t\} \right\} \right] \sum_{k=0}^{W_n} \left\{ (a_k) \sin\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) + (b_k) \cos\left(\frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \\ &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{W_n} \left[ u(i)u(j) a_k \frac{1}{4} \left\{ \sin\left(\omega(i)t + \omega(j)t + \frac{1}{2}k\omega t\right) - \sin\left(\omega(i)t + \omega(j)t - \frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{W_n} \left[ u(i)u(j) a_k \frac{1}{4} \left\{ \sin\left(\omega(i)t - \omega(j)t + \frac{1}{2}k\omega t\right) - \sin\left(\omega(i)t - \omega(j)t - \frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{W_n} \left[ u(i)u(j) b_k \frac{1}{4} \left\{ \cos\left(\omega(i)t + \omega(j)t + \frac{1}{2}k\omega t\right) + \cos\left(\omega(i)t + \omega(j)t - \frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^{W_n} \left[ u(i)u(j) b_k \frac{1}{4} \left\{ \cos\left(\omega(i)t - \omega(j)t + \frac{1}{2}k\omega t\right) + \cos\left(\omega(i)t - \omega(j)t - \frac{1}{2}k\omega t\right) \right\} \right] \quad (17-c)\end{aligned}$$

위의 식 (17-a,b,c)을 유한요소 지배방정식에 대입하면, Bolotin 법에서 불안정 영역의 경계를 판별하는 행렬을 구성할 수 있게 된다.

## 6. FEM을 이용한 안정성 해석 결과

### 6.1 하나의 맥동성분에 대한 안정성 해석

식 (17)을 이용하여 구성한 행렬식을 이용하여 배관의 속도 맥동성분이 2 개 이상으로 가정한 경우 해석한 결과와 지금까지 다른 논문에서 사용했던 속도 맥동성분 한 개인 경우에 대한 해석한 결과를 비교해보아야 한다.

먼저 맥동성분이 하나인 경우의 안정성 해석 결

과를 Fig. 4 에 나타내었다.

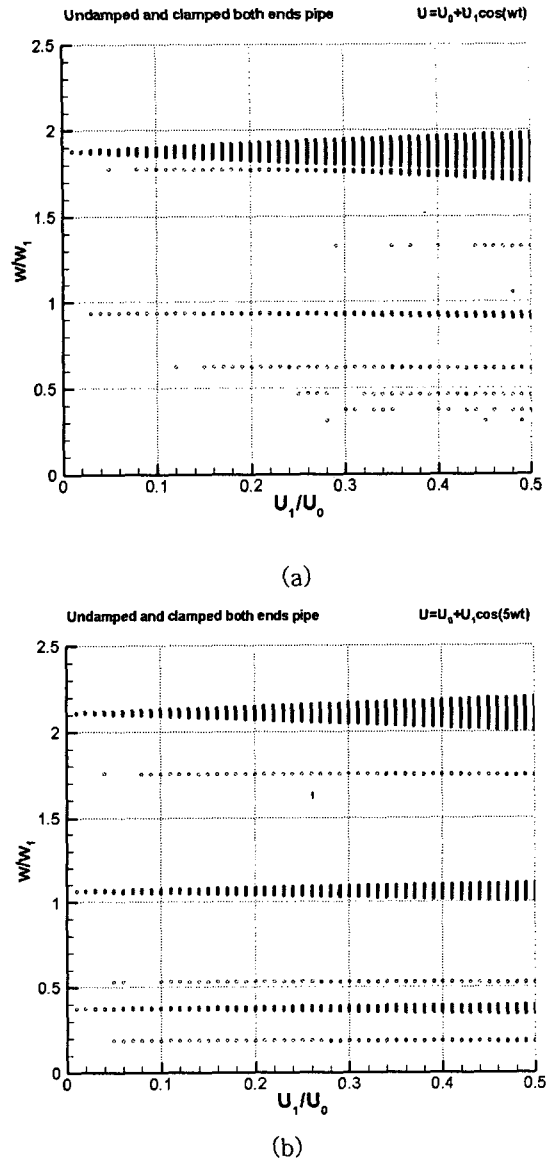


Fig. 4 Stability analysis of undamped and clamped both ends pipe

(a)  $U = U_0 + U_1 \cos(\omega t)$

(b)  $U = U_0 + U_1 \cos(5\omega t)$

각각의 그래프에서 보면 맥동주파수  $\omega$  가  $2\omega_n/k$ ,  $k=1,2,3,\dots$  근처의 특정 범위 내에 포함되면 공진이 발생하여 불안정한 영역이 나타나고, 맥동성분의 속도의 크기( $U_1$ )의 크기가 커질수록 불안정한 영역이 확대되어 나타나는 것을 확인할 수 있다. 여기서  $\omega_n$  은 배관의 고유 진동수

이다.

특히  $k=1$  일 때 principal resonance 라고 하여 불안정한 영역의 크기는 다른 영역에 비해 크게 나타난다. 위와 같이 맥동하는 주파수에 따라서 불안정한 영역이 다르게 나타나는 것을 확인할 수 있다.

## 6.2 2 개의 맥동성분에 대한 안정성 해석

유체의 맥동 성분을 각각 해석했던 두 맥동성분이 함께 나타나는 유동이라고 가정하고 속도를 다음과 같이 가정한다.

$$U = U_0 + U_1 \cos(\omega t) + U_1 \cos(5\omega t) \quad (18)$$

맥동 성분이 두 개인 유속에 대해서 안정성 해석 결과, 나타나는 불안정한 영역은 Fig. 5 와 같다.

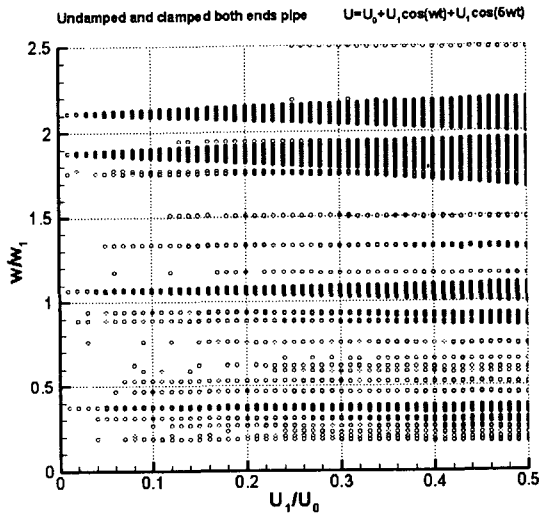


Fig. 5 Stability analysis of undamped and clamped both ends pipe

Fig. 5 를 보면 맥동성분을 각각 하나씩 해석할 때에 나타나는 불안정 영역 외에도 두 가지 맥동성분을 동시에 고려하면 새로운 불안정한 영역이 나타나는 것을 확인할 수 있었다.

그러면 새롭게 나타나는 주파수 성분에 대해 불안정 영역이 확실한지 판별하기 위해서 불안정한 영역과 안정한 영역에서의 몇 가지의 경우에 대한 시간 영역의 수치해석을 수행하였다.

가장 대표적인 시간영역의 수치해석 기법인 4 차 Runge Kutta 법을 이용하여 초기조건에 따른 변위의 발산 여부를 알아보았다.

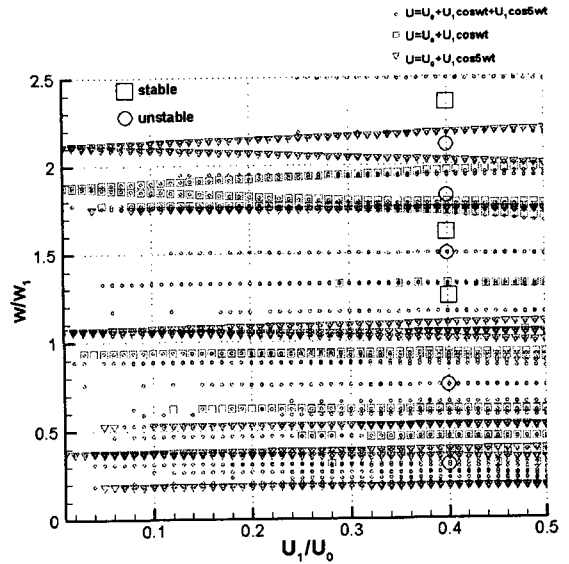


Fig. 6 the boundary of unstable area

Fig. 6 은 불안정한 영역의 경계를 도시한 것으로 사각형으로 표시한 부분은 안정한 영역의 point 를 나타낸 것이고 원형으로 표시한 부분은 불안정한 영역의 point 이다. 각각의 point 에 대한 좌표값을 표. 1 에 나타내었다.

point	$U_1/U_0$	$\omega/\omega_1$
1	2.3	0.4
2	2.1	0.4
3	1.85	0.4
4	1.6	0.4
5	1.48	0.4
6	1.25	0.4
7	0.75	0.4
8	0.3	0.4

Table. 1 The coordinates value of point

여기서 point 2,3 은 기존에 맥동성분 하나에 대한 해석 시 나타나는 불안정 영역에 해당하는 point 이고, point 5,7,8 이 2 개의 맥동성분을 함께 고려하여 안정성 해석을 했을 때 새롭게 나타나는 불안정 영역의 point 이다. 그리고 4 차 Runge Kutta 법을 이용하여 위의 8 가지 경우에 대해서 시간영역에서 해석하였다. 그리고 그 결과는 Fig. 7 과 같다.

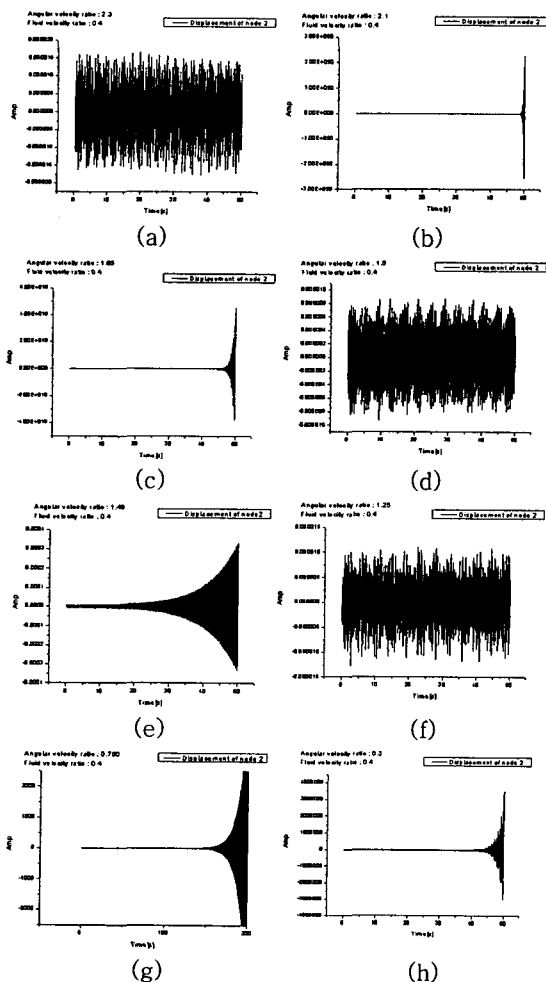


Fig. 7 Time response

- (a) point 1 (stable area) (b) point 2 (unstable area)  
(c) point 3 (unstable area) (d) point 4 (stable area)  
(e) point 5 (unstable area) (f) point 6 (stable area)  
(g) point 7 (unstable area) (h) point 8 (unstable area)

위의 결과에서 보듯이 기존에 불안정 영역으로 해석된 부분의 point 는 물론 새롭게 나타난 불안정한 영역에 해당되는 point 도 발산한다는 것이 증명되었다. 그리고 안정한 영역의 point 는 발산하지 않는 것을 확인할 수 있다. 따라서 맥동성분이 2 개 이상으로 많아질 경우에는 각각의 맥동성분을 이용하여 구한 불안정한 영역보다는 2 개의 맥동성분을 함께 고려하여 불안정한 영역을 판별해야 하는 것을 알 수 있다.

## 7. 결 론

본 연구에서는 여러 개의 조화맥동성분을 갖는 유체를 운반하는 파이프의 안정성을 해석할 수 있

는 방안을 제시하였다. 여러 개의 각각의 맥동성분으로 안정성 해석을 한 결과에서 나타나지 않았던 새로운 불안정 영역까지 찾아낼 수 있었다. 그리고 시간영역에서 해석한 결과를 보면 새롭게 나타난 불안정한 영역도 배관의 공진에 영향을 미치는 불안정한 영역임을 알 수 있었다.

본 논문을 통해 여러 개의 조화 맥동하는 유체를 운반하는 파이프의 진동 특성을 파악하게 됨으로써 앞으로 좀 더 현실에 가까운 배관 모델에 대한 진동 해석이 가능할 수 있을 것이다.

## 참고문헌

- (1) 오준석, 정의봉, 서영수, 조화 맥동하는 유체를 포함하는 직관의 강제진동 응답해석, 2003년도 추계학술대회는문집, p.277~283
- (2) Michael P. Paidoussis, 1998, Fluid-Structure Interactions; slender structures and axial flow Volume I, Academic Press.
- (3) Jerry H. Ginsberg, 1973, The Dynamic Stability of a Pipe Conveying a Pulsatile Flow, International Journal of Engineering Science vol.11 p.1013-1024
- (4) M. P. Paidoussis and C. Sundararajan, 1975, Parametric and Combination Resonances of a Pipe Conveying Pulsating Fluid, Journal of Applied Mechanics vol.42, p.780-784
- (5) M.P. Bohm and G. Herrmann, 1974, The Dynamic Behavior of Articulated Pipes Conveying Fluid with Preperiodic Flow Rate, Journal of Applied Mechanics,
- (6) M. P. Paidoussis and N. T. Issid, 1976, Experiments on Parametric Resonance of a Pipes Containing Pulsatile Flow, Journal of Applied Mechanics vol.43, p.198-202
- (7) V. V. Bolotin, 1964, The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden Day Inc.
- (8) S. T. Ariaratnam and N. Sri Namachchivaya, 1986, Dynamic Stability of Pipes Conveying Pulsating Fluid, Journal of Sound and Vibration, vol.107, p.215-230