

유체로 연성된 두 환형평판의 진동해석 Vibration Analysis of Two Annular Plates Coupled with a Fluid

°정경훈*·김종인**

Kyeong-Hoon Jeong and Jong-In Kim

Key Words : Fluid-coupled (유체로 연성된), Annular Plates (환형평판), Free Vibration Analysis (고유진동해석), Rayleigh-Ritz Method (Rayleigh-Ritz 방법).

ABSTRACT

An analytical method for the free vibration of two annular plates coupled with water was developed by the Rayleigh-Ritz method. The two plates with unequal thickness are clamped along a rigid cylindrical vessel wall. It is assumed that the fluid bounded by a rigid cylindrical vessel is incompressible and non-viscous. The wet mode shape of the annular plates is assumed as a combination of the dry mode shapes of the plates. The fluid motion is described by using the fluid displacement potential and determined by using the compatibility conditions along the fluid interface with the plate. Minimizing the Rayleigh quotient based on the energy conservation gives an eigenvalue problem. It is found that the theoretical results can predict well the fluid-coupled natural frequencies comparing with the finite element analysis result.

1. 서론

유체와 접촉하는 구조물의 고유진동수는 유체로 인한 부가질량의 증가로 공기중의 고유진동수보다 감소하게 된다. 이러한 유체-구조물간의 상호간섭문제는 많은 연구자들이 연구해 왔다. Kasahara 외 [1]는 두 원형평판 사이에 유체가 채워있을 때 유한요소해석 방법으로 고유진동수를 예측하였고 실험으로 검증하였다. Amabili 외 [2]는 Rayleigh-Ritz 방법으로 무한유체에 떠있는 환형평판에 대한 고유진동해석을 수행하였다. 그리고 Amabili [3]는 자유단을 갖는 단일 환형평판이 유체에 잠겨 있을 때, 실험으로 모드해석을 수행하였고 이론해로 검증하였다. Kwak과 Amabili [4]는 유체의 깊이가 환형평판의 고유진동수에 미치는 영향을 연구하였다. Liang 외 [5]는 Hankel변환으로, Bauer와 Komatsu [6]는 급수전개로, Biswal 외 [7]는 유한요소해석법으로 유체와 접하는 단일 환형평판의 고유진동해석을 수행하였다. Jeong [8]은 동일한 두 원판 사이에 유체가 채워진 경우, 공기중 모드를 조합하는 Rayleigh-Ritz 방법을 적용한 이론적인 고유진동 해석방법을 제시하였다. 지금까지 두 환형평판이 유체로 연성되었을 경우, 동특성을 연구한 논문이 없었다. 따라서 본 논문에서는 유체로 채워진 두께가 다른 두 환형평판에 대하여 고유진동 해석이론을 유도하고 유한요소해석으로 검증하고자 한다.

2. 이론 전개

2.1 수식전개

Fig.1은 유체로 연성된 두 환형평판을 보여주고 있다. R , a 와 h_j 는 상부 및 하부 환형평판의 외반경, 내반경과 두께를 각각 나타낸다. 그리고 d 는 상부 및 하부 환형평판사이의 거리를 나타낸다. 이론해석을 위하여 유체는 비압축성, 비점성의 이상유체로 가정하였다. 그리고 중력의 영향은 무시하였다.

유체와 접하는 환형평판의 상방향 변위 w_j 에 대한 운동방정식은 다음 식으로 나타낸다.

$$D_j \nabla^4 w_j + \rho h_j w_{j,tt} = p_j, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

여기서 $D_j = E h_j^3 / 12(1 - \mu^2)$ 는 환형평판의 강성도이며, ρ , μ , p_j 및 E 는 환형평판의 밀도, Poisson 비, 환형평판에 작용하는 유체압력, 그리고 탄성계수를 각각 나타낸다. 그리고 수식에서 첨자 1은 상부 환형평판을 나타내고 2는 하부 환형평판을 나타낸다. 식(1)의 미분방정식 해는 극좌표 (r, θ) 에 대하여 환형평판 공기중 변위의 조합으로 나타낼 수 있다.

$$w_1(r, \theta, t) = \cos(n\theta) \sum_{m=1}^M q_m W_{nm}(r) \exp(i\omega t) \quad (2a)$$

$$w_2(r, \theta, t) = \cos(n\theta) \sum_{m=1}^M p_m W_{nm}(r) \exp(i\omega t) \quad (2b)$$

* 한국원자력연구소, 정희원, Tel. (042) 868-8792
E-mail : khjeong@kaeri.re.kr

** 한국원자력연구소.

식(2a)와 (2b)에서 q_m 과 p_m 은 미정계수이고 n 은 환형평판의 절정직경 (nodal diameter)의 수를 나타낸다. 환형평판의 내부와 외부 단이 각각 고정단 경계조건을 갖는 경우, $r = a$ 와 $r = R$ 에서 변위 ϕ 가 영이 되어야 하므로 환형평판의 공기중 동적변위에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$W_{nm}(r) = J_n(\lambda_{nm} r) + A_{nm} Y_n(\lambda_{nm} r) + B_{nm} I_n(\lambda_{nm} r) + C_{nm} K_n(\lambda_{nm} r) \quad (3)$$

여기서 A_{nm} , B_{nm} , 그리고 C_{nm} 는 환형평판의 경계조건으로부터 결정된다. 식(2)와 (3)에서 ω 와 λ_{nm} 은 환형평판의 공기중 고유진동수와 주파수 파라미터를 나타낸다. J_n 와 I_n 는 각각 제 1종 Bessel 함수와 1종 수정 Bessel 함수이고 Y_n 와 K_n 는 각각 제 2종 Bessel 함수와 2종 수정 Bessel 함수다. 첨자 m 은 공기중 진동모드의 절정원(nodal circle)의 수를 나타내고 접수진동 모드에서는 반경방향 진동모드 전개항을 나타낸다. 환형평판의 단이 고정되기 때문에, $r = a$ 와 $r = R$ 에서 환형평판의 기울기도 영이 되어야 하므로 식(4)를 얻게 되고 이로부터 λ_{nm} 값을 계산할 수 있다.

$$\begin{vmatrix} J_n(\lambda_{nm} a) & Y_n(\lambda_{nm} a) & I_n(\lambda_{nm} a) & K_n(\lambda_{nm} a) \\ J_n(\lambda_{nm} R) & Y_n(\lambda_{nm} R) & I_n(\lambda_{nm} R) & K_n(\lambda_{nm} R) \\ J_n'(\lambda_{nm} a) & Y_n'(\lambda_{nm} a) & I_n'(\lambda_{nm} a) & K_n'(\lambda_{nm} a) \\ J_n'(\lambda_{nm} R) & Y_n'(\lambda_{nm} R) & I_n'(\lambda_{nm} R) & K_n'(\lambda_{nm} R) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

2.2 변위 포텐셜 (Displacement Potential)

두 환형평판과 강체 실린더로 둘러싸인 이상유체의 운동은 속도포텐셜의 Laplace 방정식으로 나타난다.

$$\nabla^2 \Phi(r, \theta, x, t) = 0 \quad (5)$$

식(5)의 속도포텐셜은 변수분리를 이용하면 식(6)으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi(x, r, \theta, t) = i\omega \phi(r, \theta, x) \exp(i\omega t) \quad (6)$$

식(6)을 적용하면 식(5)의 일반해는 유체의 변위포텐셜인 식(7)로 나타난다.

$$\phi = \cos n\theta \sum_{s=1}^{\infty} J_n(\beta_{ns} r) \{E_{ns} \sinh(\beta_{ns} x) + F_{ns} \cosh(\beta_{ns} x)\} \quad (7)$$

그런데 강체벽에서 반경방향의 유속은 영이 되어야 하므로 식(8)을 얻을 수 있다.

$$\partial\phi/\partial r|_{r=R} = 0 \quad (8)$$

식(8)에 식(7)을 대입하면 계수 β_{ns} 를 구할 수 있는 식(9)를 얻는다.

$$J_n'(\beta_{ns} R) = 0 \quad (9)$$

한편 두 환형평판과 유체가 만나는 접촉면에서 적합조건식은 다음과 같이 나타난다.

상부 환형평판에 대하여

$$\partial\phi(r, \theta, d/2)/\partial x = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq a \\ w_1(r, \theta) & a < r \leq R \end{cases} \quad (10)$$

하부 환형평판에 대하여

$$\partial\phi(r, \theta, -d/2)/\partial x = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq a \\ w_2(r, \theta) & a < r \leq R \end{cases} \quad (11)$$

식(10)과 (11)에 식(2a,b)와 (7)을 대입하고 $r J_n(\beta_{ns} r)$ 을 곱한 다음 구간별로 적분을 수행하면

$$\int_a^R \sum_{m=1}^M q_m \sum_{s=1}^{\infty} \left[J_n(\lambda_{nm} r) + A_{nm} Y_n(\lambda_{nm} r) + B_{nm} I_n(\lambda_{nm} r) + C_{nm} K_n(\lambda_{nm} r) \right] r J_n(\beta_{ns} r) dr = \int_0^R \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{ns} J_n(\beta_{ns} r) \left[\frac{E_{ns} \cosh(\beta_{ns} x)}{+F_{ns} \sinh(\beta_{ns} x)} \right] r J_n(\beta_{ns} r) dr \quad (12)$$

$$\int_a^R \sum_{m=1}^M p_m \sum_{s=1}^{\infty} \left[J_n(\lambda_{nm} r) + A_{nm} Y_n(\lambda_{nm} r) + B_{nm} I_n(\lambda_{nm} r) + C_{nm} K_n(\lambda_{nm} r) \right] r J_n(\beta_{ns} r) dr = \int_0^R \sum_{s=1}^{\infty} \beta_{ns} J_n(\beta_{ns} r) \left[\frac{E_{ns} \cosh(\beta_{ns} x)}{+F_{ns} \sinh(\beta_{ns} x)} \right] r J_n(\beta_{ns} r) dr \quad (13)$$

식(12)와 (13)을 정리하면 미정계수 E_{ns} 와 F_{ns} 에 대한 식을 얻게 된다.

$$E_{ns} = \frac{1}{2 \beta_{ns} \cosh(\beta_{ns} d/2)} \sum_{m=1}^M \{q_m + p_m\} \eta_{nms} \quad (14)$$

$$F_{ns} = \frac{1}{2 \beta_{ns} \cosh(\beta_{ns} d/2)} \sum_{m=1}^M \{q_m - p_m\} \eta_{nms} \quad (15)$$

여기서 η_{nms} 는 수식전개 과정에서 얻은 계수다. 결국 유체의 변위포텐셜은 식(16)으로 나타난다.

$$\phi = \cos n\theta \sum_{m=1}^M \sum_{s=1}^{\infty} \eta_{nms} \{q_m N_{ns} + p_m M_{ns}\} J_n(\beta_{ns} r) \quad (16)$$

여기서

$$N_{ns} = \frac{1}{2 \beta_{ns}} \left\{ \frac{\sinh(\beta_{ns} x)}{\cosh(\beta_{ns} d/2)} + \frac{\cosh(\beta_{ns} x)}{\sinh(\beta_{ns} d/2)} \right\}, \quad (17)$$

$$M_{ns} = \frac{1}{2\beta_{ns}} \left\{ \frac{\sinh(\beta_{ns} x)}{\cosh(\beta_{ns} d/2)} - \frac{\cosh(\beta_{ns} x)}{\sinh(\beta_{ns} d/2)} \right\}. \quad (18)$$

2.3 해석 방법

수치해석을 수행할 경우, 전개항 m 을 충분히 큰 값 M 까지 고려하기 위하여 미정계수 벡터 q 와 p 및 Q 를 정의하면 다음과 같다.

$$q = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_M\}^T, \quad (19)$$

$$p = \{p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_M\}^T, \quad (20)$$

$$Q = \begin{Bmatrix} q \\ p \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

유체로 연성된 두 환형평판의 선형계에서 고유진동수를 계산하려면 환형평판 및 유체의 운동에너지와 환형평판의 변형에너지를 계산해야 한다. 먼저 유체의 운동에너지를 계산하면 식(22)가 된다.

$$T_F = -\frac{\rho_o \kappa_\theta}{2} \left[\int_a^R w_1 \phi \left(r, \frac{d}{2} \right) r dr + \int_a^R w_2 \phi \left(r, -\frac{d}{2} \right) r dr \right] \quad (22)$$

여기서, ρ_o 는 유체의 밀도를 나타내며, $n=0$ 일 때 $\kappa_\theta = 2\pi$ 이고, $n>0$ 일 때 $\kappa_\theta = \pi$ 이다. 식(22)에 식(2a,b)와 (16)을 대입하면 유체의 운동에너지는 다음 식으로 나타난다.

$$T_F = \rho_o \kappa_\theta Q^T G Q, \quad (23)$$

여기서 G 는 유도된 행렬이다. 또한 두 환형평판의 운동에너지는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_d = \rho \kappa_\theta Q^T Z Q, \quad (24)$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$Z_{j(i,k)} = \delta_{ik} \frac{h_j}{2} \int_a^R r W_n^2 dr. \quad (26)$$

여기서 δ_{ik} = Kronecker delta. 한편 두 환형평판의 변형에너지는 다음과 같은 근사식으로 나타난다.

$$V_d \cong \sum_{j=1}^2 \frac{D_j}{2} \int_0^{2\pi} \int_a^R [\nabla^2 w_j]^2 r dr d\theta = \kappa_\theta Q^T H Q \quad (27)$$

식(23), (24) 및 (27)로부터 미정계수 q_m 와 p_m 에 대하여 Rayleigh 지수 $V_d / (T_d + T_F)$ 를 최소화시키는 고유치 행렬을 식(28)과 같이 구할 수 있으며,

이로부터 유체로 연성된 두 환형평판의 고유진동수를 얻을 수 있다. (21b)

$$\{H - \omega^2 (\rho Z + \rho_o G)\} Q = \{0\} \quad (28)$$

3.0 계산에 및 고찰

3.1 수치해석 모델

고정된 두 환형평판이 반경방향으로 갇혀 있는 이상유체로 연성될 때, 고유진동수와 모드형상을 식(28)의 행렬식으로부터 구할 수 있다. 제시된 이론적인 방법의 타당성을 확인하기 위하여 일체형원자로 SMART 연구로의 하단차폐판 (bottom screen assembly)의 일부를 모델링하였다. 이론해석과 비교하기 위하여 상용 유한요소해석 코드인 ANSYS 를 이용하여 축대칭 유한요소 해석모델을 만들어 해석을 수행하였다. 해석에 사용된 두 환형평판은 321 스테인레스 재질로 제작되며, 상부 환형평판 및 하부환형평판의 내부반경은 30 mm 이고 외부반경은 720 mm 이다. 상부환형평판과 하부 환형평판의 두께는 각각 45 mm, 40 mm 이다. 환형평판 및 유체의 물성치는 다음과 같다: 환형평판의 탄성계수 = 195.0 GPa, Poisson 비 = 0.3, 밀도 = 8027 kg/m³. 두 환형평판 사이에 채워지는 유체는 물(냉각재)로서 밀도가 996 kg/m³ 이다. 또한 강체 실린더의 반경은 720 mm 이고 환형평판 내부반경과 외부반경에서 고정되었다. 유한요소 해석모델은 축대칭조화 유체요소 (FLUID81)와 축대칭탄성조화 쉘요소 (SHELL61)로 구성되었다. 유체요소 절점은 내부반경과 외부반경에서 반경방향의 변위만을 구속하였다. 그리고 환형평판과 접촉하는 유체의 절점이 환형평판의 절점과 수직방향으로만 같이 움직일 수 있도록 연성시켰다. 두 환형평판사이의 거리는 $d = 10$ mm 다. 유한요소 해석모델은 Fig.2 에서 보는 바와 같이 1152 (288 × 4)개의 유체요소와 552 (276 × 2) 개의 쉘요소로 이루어져 있다.

3.2 이론의 검증 및 결과

Table 1 은 ANSYS Code 를 이용한 유한요소해석 및 이론해석 결과를 보여주고 있다. 이론해석 계산에서 급수전개의 수렴성을 조사하여 수렴속도가 빠르다는 것을 확인하였고 따라서 충분히 큰 급수전개항을 계산에서 사용하였다. 급수전개항 s 는 300 을 취하여 해가 충분히 수렴하도록 하였다. Rayleigh-Ritz 방법을 적용할 때 공기중의 모드를 중첩시키는데 m 에 충분히 큰 값 40 을 취하여 계산하였다. 이 계산을 수행할 때 상용 소프트웨어

인 MathCAD2000 을 사용하여 이론치 고유치, 즉 고유진동수와 고유벡터(모드형상)를 구하였다.

Table 1 에서 보는 바와 같이 16 개의 저차 모드 고유진동수를 확인한 결과 이론치와 유한요소 해석결과가 17% 오차범위 이내에서 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 유한요소해석에서 유체의 물성치로 물(냉각재)의 체적탄성계수 (2.2 GPa)를 고려한 반면 이론해석에서는 이를 반영하지 않았기 때문에 이 오차가 발생하고 있다고 판단된다. 따라서 이론해석에서 유체를 압축성유체로 간주하면 이 오차는 급격하게 줄어들 것으로 판단한다. 일반적으로 동위상모드의 오차는 매우 작은 반면에 역위상모드의 오차는 상당히 크게 나타나고 있음을 확인할 수 있었으며 따라서 역위상 모드에서 고유진동수에 미치는 유체 압축성의 영향이 상당히 크게 나타나고 있음을 알 수 있다. 고유진동 모드 중에서 $n = 0$ 이고 $m' = 0$ 인 모드는 관찰할 수 없는데 그 이유는 물리적으로 이 모드가 유체질량의 보존에 위배되어 나타날 수 없기 때문이다.

Fig. 3 은 $n = 0 \sim 2$ 일 때 이론치 계산으로 구한 진동모드형상을 보여주고 있다. 점선은 하부환형평판의 모드형상이고 실선은 상부환형평판의 모드형상을 나타낸다. 대체적인 모드형상이 동위상 모드와 역위상 모드로 나타나는데 두 환형평판의 강성 차이로 인해서 대칭성을 갖는 동위상 모드와 역위상 모드형상으로부터 약간씩 벗어난다. 그리고 모드가 증가함에 따라서 동위상 모드와 역위상 모드에서 벗어난 혼합된 모드형상이 나타나고 있음도 확인하였다. 일반적으로 동위상 모드에서는 두 평판의 강성 차이에도 불구하고 모드형상에서 큰 차이가 없지만 역위상 모드에서는 강성차로 인한 모드형상의 차이가 나타난다. 일반적으로 공기중 원판이나 환형평판에서 절정직경의 수 (n)가 증가하면 배 (antinode)의 위치가 판의 가장자리로 점차 이동하는데 유체와 접하는 환형평판의 경우도 동일한 현상이 나타나고 있음을 확인하였다.

4. 결론

본 논문은 물로 연성된 반경과 두께가 다른 두 환형평판에 대하여 고유진동수를 구하는 해석방법을 제시하였다. 이 해석방법의 타당성을 확인하기 위하여 환형평판의 경계조건이 고정된 경우에 대하여 고유진동수를 이론적으로 구하고 상용 컴퓨터 코드로 검증하였다. 계산결과를 통해서 이론값의 고유진동수와 유한요소 해석결과로 얻은 고유진동수가 비교적 잘 일치하고 있음을 확인하였다. 물의 압축성을 고려하면 좀더 정확한 결과를 얻을 것으로 판단된다. 제시된 이론은 원자로내부

구조물과 같이 물과 접하는 구조물 해석에 유용하게 이용될 것으로 기대된다.

참고 문헌

- (1) M. Kasahara, H. Ishii, M. Takagi and K. Kawamoto, An analysis of fluid-structure coupled vibration considering modal added mass, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers (c)*, **60(571)** (1994), 743-748. (in Japanese).
- (2) M. Amabili, G. Frosali and M. K. Kwak, Free vibrations of annular plates coupled with fluids, *Journal of Sound and Vibration*, **91** (1996), 825-846.
- (3) M. K. Kwak and M. Amabili, Hydroelastic vibration of free-edge annular plates, *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Vibration and Acoustics* **121** (1999), 26-32.
- (4) M. Amabili, Effect of finite fluid depth on the hydroelastic vibrations of circular and annular plates, *Journal of Sound and Vibration* **193** (1996), 909-925.
- (5) C. C. Liang, Y. S. Tai and P. L. Li, Natural frequencies of annular plates having contact with fluid, *Journal of Sound and Vibration* **228** (1999), 1167-1181.
- (6) H. F. Bauer and K. Kumatsu, Coupled frequencies of a circular cylindrical tank with an elastic partial surface cover, *Journal of Sound and Vibration* **230** (2000), 1147-1163.
- (7) K. C. Biswal, S. K. Bhattacharyya and P. K. Sinha Dynamic response analysis of a liquid-filled cylindrical tank with annular baffle, *Journal of Sound and Vibration*, **274** (2004), 13-37.
- (8) K. H. Jeong, Free vibration of two identical circular plates coupled with bounded fluid, *Journal of Sound and Vibration* **260** (2003), 653-670.

후 기

본 연구는 과학기술부 원자력연구개발사업의 일환으로 수행되었음.

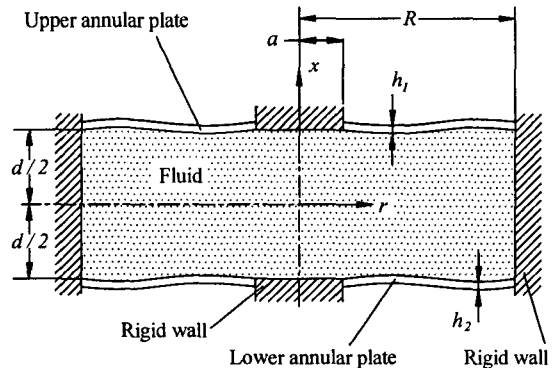


Fig. 1 Two annular plates coupled with a fluid contained rigid cylinder.

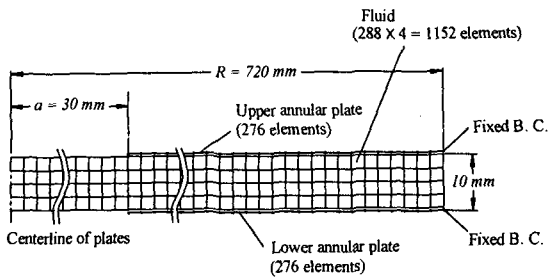


Fig. 2 Finite element model for the bottom screen assembly coupled with water.

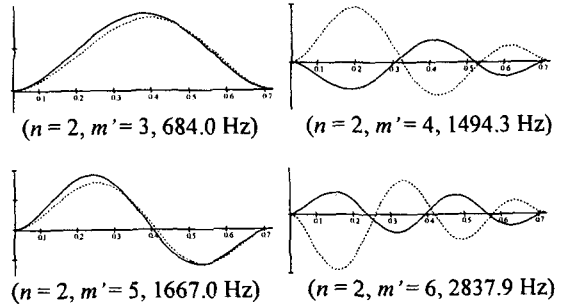


Fig. 3 Theoretical mode shapes of two annular plates (bottom screen assembly) coupled with water (dashed line = lower plate, solid line = upper plate)

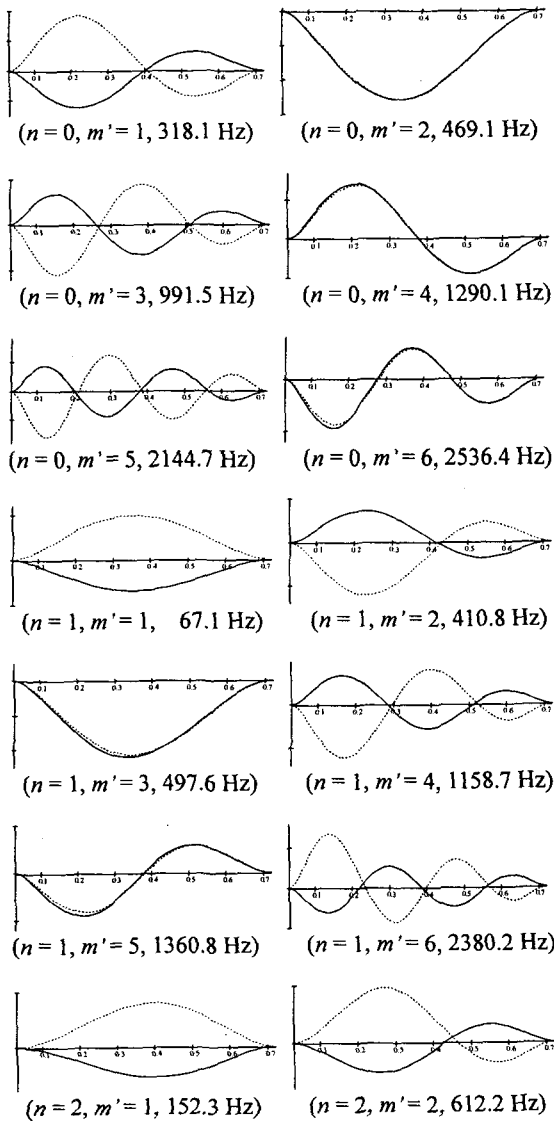


Table 1. Comparison of FEM (ANSYS) and theoretical natural frequencies for bottom screen assembly coupled with coolant ($R = 720$ mm, $a = 30$ mm, $h_1 = 45$ mm, $h_2 = 40$ mm, $d = 10$ mm).

Mode		Natural Frequency (Hz)		Error (%)
n	m'	ANSYS	Theory	
0	1	308.1	318.1	3.14
	2	468.2	469.1	0.19
	3	899.3	991.5	9.30
	4	1280.3	1290.1	0.76
1	1	66.8	67.1	0.45
	2	397.2	410.8	3.31
	3	496.3	497.6	0.31
	4	1053.2	1158.7	9.11
2	1	150.8	152.3	0.98
	2	584.9	612.2	4.46
	3	681.0	684.0	0.44
	4	1334.7	1494.3	10.68
3	1	286.6	291.7	1.74
	2	869.9	928.5	6.31
	3	986.0	992.9	0.69
	4	1737.0	2005.4	13.38
4	1	469.5	482.8	2.75
	2	1208.0	1318.3	8.37
	3	1342.9	1357.6	1.08
	4	2183.0	2610.2	16.37

m' = number of radial mode.