

원호형 띠기초의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Circular Strip Foundations

이 종 국[†] · 강 희 종* · 이 병 구**

Jong Kook Lee, Hee Jong Kang, Byoung Koo Lee

Key Words : Strip Foundation(띠기초), Free Vibration(자유진동), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

Since soil-structure interactions are one of the most important subjects in the structural/foundation engineering, much study concerning the soil-structure interactions had been carried out. One of typical structures related to the soil-structure interactions is the strip foundation which is basically defined as the beam or strip rested on or supported by the soils. At the present time, lack of studies on dynamic problems related to the strip foundations is still found in the literature. From these viewpoint, this paper aims to theoretically investigate dynamics of the circular strip foundations and also to present the practical engineering data for the design purpose. Differential equations governing the free, out-of-plane vibrations of such strip foundations are derived, in which effects of the rotatory and torsional inertias and also shear deformation are included although the warping of the cross-section is excluded. Governing differential equations subjected to the boundary conditions of corresponding end constraints are numerically solved for obtaining the natural frequencies and mode shapes by using the numerical integration technique and the numerical method of non-linear equation.

1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동 제어분야에서 중요한 연구대상으로 취급되어 이와 관련한 많은 연구^[1-5]가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련한 많은 문제들은 탄성지반 위에 놓인 구조로 모형화할 수 있으며, 이에 대한 가장 실제적인 예로서는 철도궤도, 파이프 라인 및 띠기초(strip foundation) 등을 들 수 있다.

본 연구에서는 지반 위에 놓인 원호형 곡선보 즉 원호형 띠기초의 면의 자유진동에 대한 수학적 모형을 구축하고, 해석모형으로부터 정확한 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하는데 연구 목적이 있다. 실제적인 공학문제에서 필요한 지점조건과 띠기초의 변수변화에 따른 고유진동수를 산출하므로써 원호형 띠기초의 자유진동 해석의 결과를 설계자료로 제시한다.

2. 수학적 모형

2.1 자유진동 변수

그림 1은 지반 위에 놓인 변화골물 띠기초의 기하적 형상을 나타낸 것이다. 띠기초의 지간길이는 l 이고, h 는 띠기초의 뼈대구조인 곡선보의 수평 높이를 나타낸다. (x, y) 는 띠기초의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며 띠기초의 곡률반경은 ρ 이고 x 축과 곡률중심 방향이 이루는 각도는 θ 이다.

이 그림에서 v, β, ψ 및 ϕ 는 수직변위, 전단에 의한 단면 회전각, 휨에 의한 단면 회전각 및 비틀림각을 나타내며, 이들은 시간에 따라서 변화하는 동적 변위들이다. 띠기초의 단면에는 변위에 의하여 전단력, 휨 모멘트 및 비틀림 모멘트의 합용력이 발생하며 각각 Q, M 및 T 로 나타낸다.

띠기초의 뼈대구조인 곡선보를 지지해주는 지반의 지반계수는 K 이며, 단위면적의 지반에 단위수직처짐을 야기시키는 데 필요한 힘의 크기로 정의된다. 탄성체인 지반에 변위가 발생하면 지반과 띠기초 단면의 접촉면에는 수직 반력과 비틀림 반력이 발생되며 그림 1에 R_v 와 R_T 로 표현되어 있다.

[†] 정희원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정
E-mail : come-s@hanmail.net
Tel : (063) 850-6718 Fax : (063) 850-6718

* 정희원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정

** 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 교수

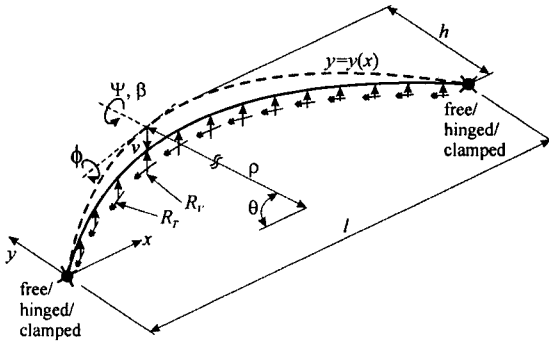


그림 1 기하적 형상 및 변수

2.2 지반 반력

그림 2(a)는 수직변위 v 와 비틀림각 ϕ 를 나타낸 것이다. B 는 지반과 접하는 띠기초의 단면폭, r 은 단면의 도심 o' 을 원점으로 하는 단면폭을 따라 변화하는 원호중심 방향의 좌표이다. $z(r, \theta)$ 는 부재축상 θ 위치에서 비틀림각 ϕ 로 인한 원호중심 방향의 좌표 r 에서 수직변위이다.

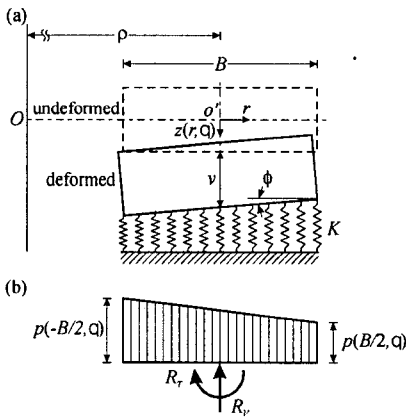


그림 2 접촉면에 작용하는 지반반력

그림 2(a)에서 지반과 단면이 접하는 접촉면에서 발생하는 압력변화 $p(r, \theta)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.^[6]

$$p(r, \theta) = K(v - r\phi) \quad (2.1)$$

그림 2(b)는 위의 결과를 단면의 접촉면에 작용하는 압력분포로 나타낸 것이다. 지반의 수직반력 R_v 및 비틀림반력 R_r 는 각각 다음의 식 (2.2), (2.3)과 같이 산출된다.

$$R_v = KBv, \quad R_r = \frac{KB^3\phi}{12} \quad (2.2, 3)$$

2.3 지배미분방정식

그림 3은 자유진동하는 띠기초의 미소요소에 작용하는 힘들을 나타내고 있다. 띠기초의 미소요소에 작용하는 이들

합응력, 관성력 및 지반 반력들 사이의 동적 평형방정식을 세우면 식 (2.4)-(2.6)과 같다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dQ}{d\theta} - F_v - R_v = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\theta} - Q + \frac{T}{\rho} + C_\psi = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{M}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\theta} + C_\phi + R_T = 0 \quad (2.6)$$

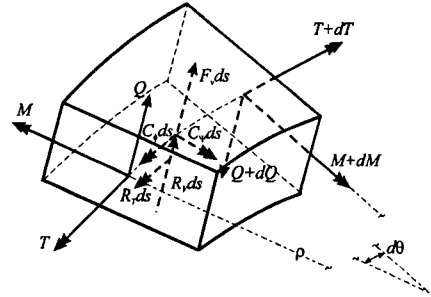


그림 3 미소요소에 작용하는 힘

띠기초의 단면에 발생하는 합응력인 전단력 Q , 휨 모멘트 M 및 비틀림 모멘트 T 는 다음의 식들과 같다.^[7]

$$Q = \alpha_s AG\beta = \alpha_s AG \left(\frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\theta} - \psi \right) \quad (2.7)$$

$$M = \frac{EI}{\rho} \left(\phi - \frac{d\psi}{d\theta} \right), \quad T = \frac{GJ}{\rho} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\theta} \right) \quad (2.8, 9)$$

여기서 A , I , J 는 단면적, 단면2차모멘트 및 비틀림상수이고, E 와 G 는 탄성계수 및 전단탄성계수이다.

자유진동을 조화진동으로 가정하면 관성력 F_v , C_ψ 및 C_ϕ 는 다음의 식 (2.10)-(2.12)과 같이 구할 수 있다.

$$F_v = -\gamma A \omega^2 v, \quad C_\psi = -\gamma I \omega^2 \psi, \quad C_\phi = -\gamma I_b \omega^2 \phi \quad (2.10-12)$$

여기서, γ 는 곡선보 재료의 질량밀도, I_b 는 단면극관성모멘트, ω 는 고유각진동수(rad/sec)이다.

지배미분방정식을 무차원 식으로 유도하기 위하여 무차원 변수들을 도입한다. (ξ , δ)는 직교좌표계 (x , y)를 무차원화한 것이며, ζ , η , f , b 는 길이차원의 변수들인 ρ , v , h , B 를 시간길이 l 로 정규화한 것이다. s , s_b 는 세장비 관련변수이며, e , u 및 k 는 각각 강성변수, 전단변수 및 지반변수를 나타낸다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l, \quad \zeta = \rho/l \quad (2.13-15)$$

$$\eta = v/l, \quad f = h/l, \quad b = B/l \quad (2.16-18)$$

$$s = l/\sqrt{I/A}, \quad s_b = l/\sqrt{I_b/A} \quad (2.19, 20)$$

$$e = GJ/(EI), \quad u = \alpha_s G/E, \quad k = KI^5/(\pi^4 EI) \quad (2.21-23)$$

무차원 고유진동수 c_i 는 다음과 같이 무차원화한다.

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A / (EI)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.24)$$

이상에서 유도한 동적 평형방정식, 합용력, 지반반력, 관성력 및 무차원 변수들을 이용하면 변화곡를 띠기초의 자유진동의 상미분방정식을 식 (2.25)-(2.27)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} = \frac{1}{\xi} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\eta}{d\theta} + \frac{\pi^4 kb - c_i^2}{us^2} \xi^2 \eta + \xi \frac{d\psi}{d\theta} \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\theta^2} = -us^2 \xi \frac{d\eta}{d\theta} + \frac{1}{\xi} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\psi}{d\theta} + \left\{ e + (us^2 - \frac{c_i^2}{s_i^2}) \xi^2 \right\} \psi + (1+e) \frac{d\phi}{d\theta} - \frac{1}{\xi} \frac{d\zeta}{d\theta} \phi \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\theta^2} = -\left(1 + \frac{1}{e}\right) \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{1}{\xi} \frac{d\zeta}{d\theta} \psi + \frac{1}{\xi} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\phi}{d\theta} + \frac{1}{e} \left[1 + \left(\frac{\pi^4 kb^3}{12} - \frac{c_i^2}{s_i^2} \right) \xi^2 \right] \phi \quad (2.27)$$

2.4 경계조건

띠기초는 자유단, 회전단 및 고정단으로 조합되는 지점조건으로 지지될 수 있다. 자유단, 회전단 및 고정단에 대한 경계조건은 다음과 같다. 먼저, 자유단에서는 합용력 Q , M , T 가 0이어야 하므로 다음의 경계조건을 얻는다.

$$\frac{d\eta}{d\theta} - \zeta \psi = 0, \quad \phi - \frac{d\psi}{d\theta} = 0, \quad \psi + \frac{d\phi}{d\theta} = 0 \quad (2.28-30)$$

회전단에서는 수직변위 v , 비틀림각 ϕ 및 휨 모멘트 M 이 0이어야 하므로 다음의 경계조건을 얻는다.

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \frac{d\psi}{d\theta} = 0 \quad (2.31-33)$$

고정단에서는 수직변위 v , 단면회전각 $dv/d\theta$ 및 비틀림각 ϕ 가 0이어야 하므로 다음의 경계조건을 얻는다.

$$\eta = 0, \quad \frac{d\eta}{d\theta} = 0, \quad \phi = 0 \quad (2.34-36)$$

3. 형상함수

그림 1에 이미 정의되어 있는 (x, y) 평면 위에 놓인 변화곡를 띠기초의 상미분방정식에 대하여 원호형 띠기초의 형상함수인 ξ , $d\xi/d\theta$ 를 다음과 같이 산정한다. 직교좌표계 (x, y) 에서 놓인 반경 ρ , 수평높이 h 및 지간길이 l 인 원호의 선형식은 무차원 변수를 이용하여 다음 식 (3.1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta = \zeta \sin \theta + f - \zeta \quad (3.1)$$

식 (3.1)을 이용하면 식 (3.2), (3.3)과 같이 원호형 선형식의 θ 및 변화곡를 계수를 다음과 같이 ξ 의 함수로 구할 수 있다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{1-2\xi}{2\zeta} \right) \quad (3.2)$$

$$\zeta = \frac{4f^2 + 1}{8f}, \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = 0 \quad (3.3,4)$$

4. 수치해석 결과

이상에서 유도된 미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수 c_i 를 산출하였다. 수치해석 예제에서 자유-자유, 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 4개의 지점조건을 채택하였다.

표 1은 띠기초의 지점조건이 무차원 고유진동수 c_i 에 미치는 영향을 분석한 표이다. 이 표에 보인 바와 띠기초의 c_i 값은 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전, 자유-자유의 지점조건 순서로 큰 것을 알 수 있다. 이 표에서 굵은 글씨는 비틀림 모드이며 비틀림 모드에서 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정 지점조건인 c_2 또는 c_3 는 63.15로 동일하여 회전지점과 고정지점은 비틀림 모드의 고유진동수 결정에서 거의 같은 영향력을 보이는 것으로 판단된다.

표 1 지점조건 영향*

지점조건	무차원 고유진동수, c_i			
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
자유-자유	35.76	39.28	44.41	59.97
회전-회전	40.19	52.06	63.15	83.59
회전-고정	41.61	58.65	63.15	95.00
고정-고정	44.24	63.15	66.73	107.6

* $f=0.1, b=0.2, k=80, a=0.2,$

$s=14.6, s_p=15.5, u=0.35, e=1.15$

** 굵은 글씨: 비틀림 모드

띠기초의 변수가 변화함에 따라서 무차원 고유진동수 c_i 값은 변화한다. 따라서 띠기초의 각종 변수 값들이 c_i 에 미치는 영향을 분석하기 위하여 변수연구를 시행하였다. 각 변수연구에 사용한 변수 값들을 그림 상단에 표기하였다. 그림 4는 c_i 와 f 사이의 관계를 나타낸 것이다. 띠기초의 경우에 f 값의 범위는 0~0.3 사이의 범위이므로 이 f 값을 이 범위에서 변화시키면서 수치해석하였다. 이 그림들에서 보는 바와 같이 f 값이 증가할수록 c_i 값은 감소하는 것을 알 수 있다. 이는 f 값이 증가하면 띠기초의 자유진동에 관한 강성이 감소되어 c_i 값은 감소하는 것을 의미한다. 특히 1, 2, 3 모드의 무차원 고유진동수의 변화는 거의 없었다.

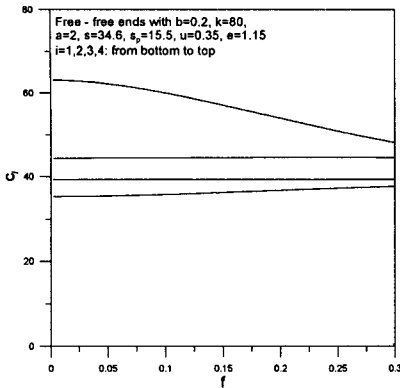


그림 4 c_i 와 f 의 관계: 자유-자유

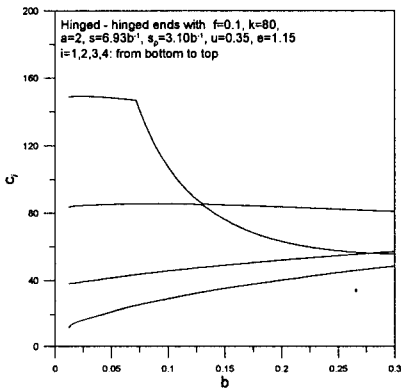


그림 5 c_i 와 b 의 관계: 회전-회전

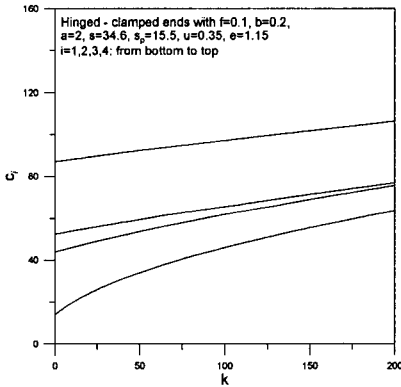


그림 6 c_i 와 k 의 관계: 회전-고정

그림 5는 c_i 와 b 의 관계를 나타낸 그림이다. b 가 증가함에 따라서 c_i 값은 증가하거나 또는 감소한다. 띠기초의 진동형은 휨 진동 및 비틀림 진동으로 구분할 수 있으며 회전관성 C_ψ 및 비틀림 관성 C_ϕ 의 고려여부로 구분할 수 있다. 이 그림에서 c_i 가 감소하는 경우는 비틀림 진동이며, 증가하는 경우는 휨 진동이다.

그림 6은 c_i 와 k 사이의 관계를 나타낸 그림이다. 지반

변수 k 가 증가함에 따라서 c_i 값은 증가하는 것을 알 수 있다. 이 그림에서 $k=0$ 인 경우에 c_i 는 지반으로 지지되지 않은 곡선보의 c_i 값임을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구는 지반 위에 놓인 원호형 띠기초의 면외 자유진동에 관한 연구이다. 띠기초가 진동할 때 부재의 미소요소에 발생하는 합용력, 지반반력 및 관성력에 대한 동적 평형방정식을 유도하였다. 위의 기본식들을 이용하여 원호형 띠기초의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였으며, 지점조건에 따른 경계조건식을 유도하였다. 유도된 미분방정식을 수치해석하여 띠기초의 고유진동수와 진동형을 산출할 수 있는 수치해석기법을 개발하였다. 지점조건으로는 자유-자유, 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 4가지 지점조건을 채택하였다. 실제의 수치해석 예제에서는 수평높이대 지간길이비, 접촉비, 지반변수 등이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하고 이를 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과들은 기초공학 설계분야에서 그 활용성이 기대된다.

참 고 문 헌

- (1) M.S. Issa, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 127, No. 2, 1988, pp. 291~301.
- (2) J.M. Snyder and J.F. Wilson, "Free Vibrations of Continuous Horizontally Curved Beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 157, No. 2, 1992, pp. 345~355.
- (3) D.E. Panayotounakos and P.S. Theocaris, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation." Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 47, 1980, pp. 139~144.
- (4) T.M. Wang and W.F. Brannen, "Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Curved Beams on Elastic Foundations," Journal of Sound and Vibration, Vol. 84, 1982, pp. 241~246.
- (5) M.S. Issa, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 127, 1988, pp. 291~301.
- (6) A.P.A. Selvadurai, Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, Elsevier, 1979.
- (7) E. Volterra and J.H. Gaines, Advanced Strength of Materials, Prentice-Hall, 1971, pp. 356~358.