

## 변단면 후판의 동적안정해석

### Dynamic Stability Analysis of Tapered Thick Plate

○ 김일중\* · 이용수† · 오숙경\*\*

Kim, Il Jung, Lee, Yong Soo and Oh, Soog Kyoung

Key Words : Finite Element Method, Dynamic Stability, Tapered Thick Plate, Pasternak Foundation

Abstract : This paper has the object of investigating dynamic stability of opening thick plates on Pasternak foundation by means of finite element method and providing Kinematic design data for mat of building structures. Finite element analysis of Tapered Thick plate is done by use of rectangular finite element with 8-nodes. In order to analysis plate which is supported on Pasternak foundation, the Winkler foundation parameter is varied with  $10^2$ ,  $10^3$  and the shear foundation parameter is 5, 10. The ratio of In-plane force to critical load is applied as 0.4, 0.6, respectively. This paper analyzed varying Tapered Ratio.

#### 1. 서 론

최근 지진이나 건설현장의 발파, 항타, 굴착 등에 의해 발생하는 지반진동은 인접 건축물의 기초를 통해 건물에 동적 영향을 끼친다. 지반을 통해 전달되는 동적영향은 지반-구조물 상호작용을 일으키므로 지반-구조물의 상호작용에 대한 해석은 진동 제어분야의 중요한 연구대상이 되고 있다. 건축 분야에서 사용되는 판부재는 평판(flat plate)이 일반적이나 시공성과 경제성 혹은 구조적인 이유에서 변단면판의 형태로 계획되기도 한다.

근래들어 J. A. G. Horenberg 등에 의해 Modal Constraint 법을 이용하여 판의 동적 해석<sup>1)</sup>, M. Celik 등에 의해 Two-Parameter 지반에 의해 지지된 판의 반복법을 이용한 해석<sup>2)</sup> 및 H. Matsunaga에 의해 면내응력을 받는 후판의 좌굴안정 해석<sup>3)</sup> 등이 이루어졌다. 또한 T.Yokoyama에 의해 탄성지반에 지지된 Timoshenko Beams의 Parametric 불안정에 대한 연구<sup>4)</sup>가 행해졌으며, A. R. Kukreti와 J. Farsa 와 C. W Bert는 미분구적법 과 Rayleigh-Ritz Method를 이용하여 단순지지된 변단면 후판의 진동에 관한 연구<sup>5)</sup>를 시행하였다. 국내에서는 이용수 등이 Timoshenko 보-기둥의 안정해석<sup>6)</sup> 및 비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진

동해석<sup>7)</sup>과 동적안정해석<sup>8)</sup>을 행하였다.

현재 Pasternak 지반에 의해 지지된 변단면 후판의 동적안정해석에 대한 연구는 이루어져 있지 않으므로 본 연구에서 유한요소법을 적용하여 이에 대해 해석하였다.

변단면 후판의 유한요소는 판8절점 Serendipity 요소계를 적용하여 판요소에 대한 강성행렬들을 전체 요소에 대해 조합하여 동적 안정해석 방정식을 얻는다. 구조물을 지지하는 지반은 Winkler 지반에 전단층을 추가하여 지반의 연속성을 고려한 Pasternak지반으로 모델링하였으며 판해석은 Mindlin 판 이론을 적용하였다.

#### 2. 변단면 후판의 유한요소해석

##### 2.1 변단면 후판

장방형 후판의 X축 두께만 선형으로 증가하는 변단면 후판을 고려하면 판의 두께는 다음과 같다.

$$h(X) = h_0 \left( \alpha \frac{X}{a} + 1 \right) \quad (1)$$

여기서,  $\alpha = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$  : 변단면률,  $a$  : 판의 X축 방향 길이,

$h_0$  :  $X=0$ 일 때 판두께,  $h_1$  :  $X=a$ 일 때 판두께

##### 2.2 후판의 진동해석

판요소와 보요소의 변형에너지, 운동에너지 및 외력이 한 일을 구하고 가상일의 원리를 이용하여 이들 변분을 췌으로 놓아 고유치 방정식을 얻는다.

판요소 해석을 위해 8절점 Serendipity 요소계를 사

† 책임저자, 정회원, 원광대학교 건축학부 정교수  
전화: 063-850-6709; Fax: 063-843-0782

E-mail: struct@wonkwang.ac.kr

\* 정회원, 전북과학대학 건축·토목 계열 조교수

\*\* 정회원, 원광대학교 건축학부 강의전담교수

용하며, 임의 점의 변위와 회전 변위의 관계를 행렬 형태로 나타내면

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [M] \{\delta_e\} \quad (2)$$

여기서,  $w$ : 판요소의 수직변위,

$\theta_x, \theta_y$ : 판요소의  $x, y$ 방향 회전변위,

$$\{\delta_e\} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8}]$$

$$[M] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (3)$$

판요소를 무차원 변수  $\xi, \eta$ 를 이용하여 8절점 Serendipity 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi \eta (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} \{ (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i)^2(1 - \xi^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi_i)^2(1 - \eta^2) \} \quad (4)$$

$(i=1, 2, \dots, 8)$

판요소의 운동 에너지 ( $T_e$ ), Winkler지반 강성과 전단 지반 강성을 포함한 판요소의 변형 에너지 ( $U_e$ ), 한 방향 압축만을 고려한 외력에 의한 일 ( $W_e$ )에 식(2)를 대입하여 행렬형태로 정리하면 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [M_e] \{\delta_e\} \\ U_e &= \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T ([K_e] + [K_f]) \{\delta_e\} \\ W_e &= \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_g] \{\delta_e\} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $[M_e]$ : 판요소의 질량 행렬

$[K_e]$ : 판요소의 휨 · 전단에 대한 강성행렬

$[K_f]$ : Winkler지반 · 전단지반에 대한 요소 강성행렬

$[K_g]$ : 판요소의 기하 강성행렬

가상일의 원리에 의한 Hamilton 방정식은 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} W dt = 0 \quad (6)$$

판요소 강성행렬을 포함한 에너지식 (5)를 전체 요소에 대해 조합하고 식(6)에 적용시키면 다음과 같다.

$$[K_M] \{\delta\} + [[K_E] - [K_G]] \{\delta\} = 0 \quad (7)$$

### 2.3 동적 안정 방정식 구성

동적안정문제에서 작용하는 하중  $\sigma$ 는 다음과 같다.

$$\sigma = \alpha \sigma_{cr} + \beta \sigma_{cr} \cos \bar{\omega} t \quad (8)$$

여기서,  $\alpha$ : 좌굴응력에 대한 정응력비,

$\beta$ : 좌굴응력에 대한 동응력비,

$\sigma_{cr}$ : 정적 좌굴응력,  $\bar{\omega}$ : 동적 응력의 진동수

식(8)을 식(7)에 대입하면 다음의 Mathieu-Hill 방정식을 얻는다.

$$[K_M] \{\delta\} + [[K_E] - \alpha \sigma_{cr} \bar{K}_G] - \beta \sigma_{cr} \cos \bar{\omega} t [\bar{K}_G] \{\delta\} = 0 \quad (9)$$

여기서,  $[\bar{K}_G]$ : 평균 응력  $\sigma_0$ 에 대한 기하강성 행렬

$[\bar{K}_G]$ : 주기 응력 진폭  $\sigma_1$ 에 대한 기하강성 행렬

위 Mathieu-Hill 방정식의 해를 다음과 같이 급수 형태로 가정된다.

$$\delta(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\bar{\omega}}{2} t + b_k \cos \frac{k\bar{\omega}}{2} t \right) \quad (10)$$

식(9)를 만족하기 위해서는 식(10)의 계수의 행렬식은 0이 되어야 한다.  $a_k$ 와  $b_k$ 에 대한  $k \times k$ 행렬식을 일차 근사화하면 다음식이 된다.

$$[[K_E] - \alpha \cdot \sigma_{cr} [\bar{K}_G] \pm \frac{1}{2} \beta \sigma_{cr} [\bar{K}_G] - \frac{\bar{\omega}^2}{4} [K_M]] = 0 \quad (11)$$

평균응력과 응력진폭의 영향을 동일하게 취하여  $[\bar{K}_G] = [\bar{K}_G] = [\bar{K}_G]$ 로 하면 식(11)은 다음과 같이 된다.

$$[[K_E] - (\alpha \pm \frac{1}{2} \beta) \sigma_{cr} [\bar{K}_G] - \frac{\bar{\omega}^2}{4} [K_M]] \{\delta\} = 0 \quad (12)$$

식(12)에서 정적응력 계수비  $\alpha$ 와  $\beta$ 값에 따른 판의 진동수비 ( $\bar{\omega}/\omega_e = \text{면내응력의 진동수}/\text{판의 고유진동수}$ )를 구하여 동적불안정 영역을 표시한다.

## 3. 비교 분석 및 적용

### 3.1 비교분석

본 연구에서 유한요소 해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 정확성을 검토하였다.

Table 1. Natural Frequency of plates on Pasternak Foundation ( $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_0}$ )

WFP	Reference <sup>9)</sup>	This Study	Error(%)
0	22.2117	22.25175	0.18
10	22.4104	22.46566	0.25
10 <sup>2</sup>	24.2698	24.30675	0.15
10 <sup>3</sup>	38.0638	38.09225	0.075
10 <sup>4</sup>	99.4473	99.6619	0.2

Table 2. Natural Frequency of Tapered Thick Plates

$$(\lambda^2 = \alpha a^2 \sqrt{\rho/D_0})$$

Taper Ratio	Reference <sup>5)</sup>	This Study	Error(%)
0.2	21.59051	21.58787	0.01
0.4	23.54861	23.45184	0.19
0.6	25.37844	25.29344	0.33
0.8	27.23463	27.08043	0.56

Table 1은 SFP가 10일 때 WFP의 변화에 따라 평판의 고유진동수를 산출하여 참고문헌해와 비교한 것으로 최대 0.28%이내의 오차를 보였다. Table 2는 지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 Taper Ratio의 변화에 따른 고유진동수를 유한요소 프로그램해와 참고 문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56%의 오차를 나타내어 본 연구를 위한 신뢰성을 확인 할 수 있었다.

### 3.2 변단면 후판의 동적안정해석 예제

본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 Pasternak 지반에 지지된 4변 단순지지 변단면 보강 후판의 동적 안정영역을 결정한다.

유한요소법을 적용한 해석을 위한 제원은 다음과 같다.

탄성계수(E) :  $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

포와송비( $\nu$ ) : 0.167, 판 지지상태 : 4변 단순지지

판의 체적당 질량( $\rho$ ) :  $2.448 \times 10^{-6} \text{ kgf/cm}^3$

판의 크기 : 600cm × 600cm

Taper ratio(TR) : 0.25, 0.5

면내응력의 변화 :  $0.4\sigma_{cr}$ ,  $0.6\sigma_{cr}$

Winkler 지반 파라미터 : 100, 1000

전단 지반 파라미터 : 5, 15

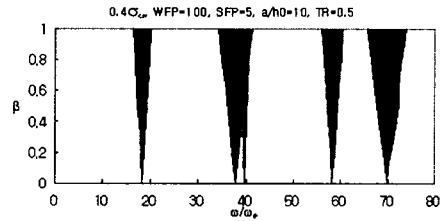
■ : 동적불안정영역 □ : 동적안정영역

판의 동적안정문제는 좌굴응력과 정응력계수  $\alpha$ , 동 응력계수  $\beta$ 를 적용하고 고유값문제를 풀므로써  $\alpha$ ,  $\beta$  및 후판의 고유진동수에 대한 비  $\bar{\omega}/\omega_e$ 의 관계를 곡선으로 표시하여 불안정영역의 경계를 나타내게 된다.

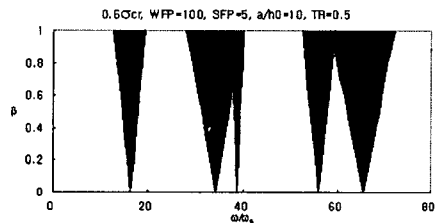
Fig.1은 면내응력을 받는 변단면 후판의 동적안정 해석을 한 것으로 그래프내 곡선은 동적안정과 불안정 영역의 경계를 나타낸다. 이 그래프들은  $\alpha$ 를 0.4, 0.6으로 하고 안정과 불안정영역의 경계에 해당되는 고유진동수에 대한 면내응력의 진동수비  $\bar{\omega}/\omega_e$ 와  $\beta$ 의 관계를 plot하여 각 점들 사이를 곡선으로 연결한 것이다. 각 그래프에는 5개로 분리된 곡선군을 볼 수 있는데 좌측 수직축으로부터 가까운 순서대로 1차 진

동 mode에서 5차 진동 mode를 나타낸 것이다. 판에 면내응력이 가해진 경우 해당되는 변수를 찾아 그래프상의 점의 위치로 후판의 안정상태 혹은 불안정상태를 규명할 수 있다.

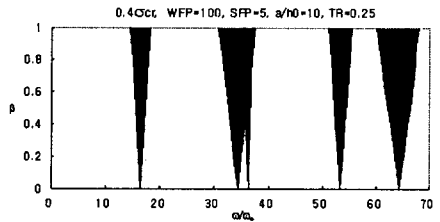
Fig.1(a)(b)에서 보듯 면내응력이 0.4에서 0.6으로 커질수록 각 mode에 대한 불안정영역이 확대되었으면 각 mode는 진동수비가 작아지는 방향으로 이동하는 것을 볼 수 있다. Fig.1(c)는 Taper Ratio 변화에 따른 변단면 후판의 불안정영역을 나타낸 것이다. Taper Ratio가 작아짐에 따라 각 불안정 mode는 진동수비가 작아지는 쪽으로 이동하는 것을 볼 수 있다.



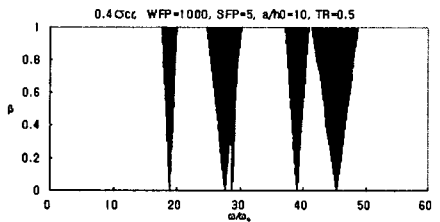
(a)  $0.4\sigma_{cr}$ , WFP=100, SFP=5, TR=0.5



(b)  $0.6\sigma_{cr}$ , WFP=100, SFP=5, TR=0.5



(c)  $0.4\sigma_{cr}$ , WFP=100, SFP=5, TR=0.25



(d)  $0.4\sigma_{cr}$ , WFP=1000, SFP=5, TR=0.5  
Fig. 1 Stability area of tapered plates

Fig.1(d)는 Winkler지반 계수변화에 따른 변단면후판의 불안정영역을 나타낸 것이다. 이 경우 Winkler 지반 계수가 커짐에 따라 각 불안정 모드가 중첩되어 나타나는 것을 볼 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구는 Pasternak 지반에 지지된 변단면 후판의 동적안정해석에 대한 것으로 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구에서 Pasternak 지반에 지지된 평판과 지반이 없는 변단면 후판의 고유진동수를 참고 문헌해와 비교하여 0.56%이내의 오차를 보여 참고해와 매우 근사하였다.
- 2) Pasternak 지반에 지지된 변단면 후판 동적안정문제에서 판에 작용하는 응력이 커질수록 각 mode에 대한 불안정영역이 확대되었고, 진동수비가 작은 방향으로 이동하였다.
- 3) 변단면 후판의 Taper Ratio가 작아질수록 각 불안정 mode는 진동수비가 작아지는 방향으로 이동하였다.
- 4) 변단면 후판을 지지하고 있는 지반계수가 커질수록 각 불안정 mode는 중첩되어 불안정영역이 감소함을 보였다.

#### 참 고 문 헌

1.J. A. G. Horenberg and J. G. M. Kerstens, "Transverse Vibrations of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part II: Modal Constraint Method," *J. Sound & Vibration*, Vol. 101, 1985, pp. 317-324

"Analysis of Plates on a Two-Parameter Foundation," *J. Computer & Structures*, Vol. 36, 1998, pp. 2891-2915

3.H. Matsunaga, "Buckling Instability of Thick Elastic Plates Subjected to In-Plane Stresses," *J. Computer & Structures*, Vol. 62, No. 1, 1997, pp. 205-214

4.T. Yokoyama, "Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation," *Computer & Structures*, Vol. 28, No. 2, 1988, pp.207-216

5. A. R. Kukreti, J. Farsa, C. W Bert, "Differential quadrature and Rayleigh-Ritz method to determine The fundamental frequencies of simply supported rectangular plates with linearly varying thickness." *J. sound & vibration* pp.103-122, 1996

6. 이용수, 이병구, 김선균, "Pasternak 지반위에 놓인 Timoshenko 보-기둥의 안정해석," *한국강구조학회논문집*, 제 13권, 제 1호, 2001, pp. 91-100

7. 이용수, 김일중, 오숙경, "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진동해석," *한국강구조학회논문집*, 제 15권, 제 3호, 2003, pp. 291-298

8. 이용수, 김일중, 오숙경, "비균질 Pasternak지반 위에 놓인 정방형 후판의 동적 안정해석," *대한건축학회논문집*, 제 19권, 제 4호, 2003, pp. 45-54

9. Hiratoki Matsunaga, "Vibration and Stability of thick plates in elastic foundations", *J. Engineering Mechanics*, pp27-34, 2004.

2.M. Celik and Ahmet Saygun, "A Method for the