한국소음진동공학회 2004년도 추계학술대회논문집, pp. 717~720.

# 고유모드 계산을 위한 초기 반복벡터의 수렴성 연구

## Investigation of Convergence of Starting Iteration Vectors for Calculating Natural Modes

김병완*·경조현**·홍사영**·조석규**·이인원***

**Byoung-Wan Kim, Jo-Hyun Kyoung, Sa-Young Hong, Seok-Kyu Cho and In-Won Lee**

**Key Words :** natural mode(고유모드), subspace iteration method(부분공간반복법), starting iteration vector(초기 반복벡터)

ABSTRACT

Two modified versions of subspace iteration method using accelerated starting vectors are proposed to efficiently calculate free vibration modes of structures. Proposed methods employ accelerated Lanczos vectors as starting iteration vectors in the subspace iteration method. To investigate the efficiency of proposed methods, two numerical examples are presented.

## 1. 서 론

구조물의 동응답 평가 및 설계에 있어서 고유진동수 및 모드형상 등의 자유진동모드 해석은 필수적으로 선행되어야 할 중요한 과정이다. 고유진동수와 모드형상은 구조물의 강성과 질량 분포에 따라 수학적으로 구성할 수 있는 고유치문제를 해석함으로써 결정된다. 고유치해법으로는 부분공간반복법[1]과 Lanczos 방법[2] 등이 있으며 그 중 부분공간반복법은 구조물의 고유치해법으로 널리 이용되고 있다. 부분공간반복법은 Bathe 와 Wilson 이 최초로 제안한 방법으로서 많은 연구자들에 의해 연구되었으며 개선된 방법들이 다양하게 제시되어 왔다. Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 부분공간반복법[3]도 그 중 하나로서 고유치 해석에 있어서 반복회수를 줄이는데 매우 유용하여 ADINA, NASTRAN 등의 범용 유한요소해석 프로그램에서 고유치 해석 알고리즘으로서 사용되고 있다. 본 연구의 목적은, 양자해석분야[4] 및 수정된 부분공간반복법[5],[6] 등에서 수렴의 가속화를 위해 도입된 바 있는 행렬의 거듭제곱 기법을 Lanczos 벡터를 초기벡터로 사용하는 부분공간반복법의 초기벡터 구성 과정에 적용해보고 그 효율성을 고찰하는 데에 있다.

## 2. 수정된 부분공간반복법

Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 부분공간반복법은 식 (1)과 같은 Lanczos 알고리즘으로부터 초기벡터를 생성한다.

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{x}}_i - \alpha_i \mathbf{x}_i - \beta_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}, \quad \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{x}_i \tag{1}$$

식 (1)에서 $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ 및 $\mathbf{x}_i$는 강성행렬, 질량행렬, $i$ 번째 Lanczos 벡터를 각각 나타내며 행렬 $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$은 동적행렬이라 불리운다. $\alpha_i$와 $\beta_i$는 스칼라 계수로서 식 (2)와 같이 산출한다.

$$\alpha_i = \bar{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M}\mathbf{x}_i, \quad \beta_i = (\tilde{\mathbf{x}}_i^T \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}_i)^{1/2} \tag{2}$$

다음 단계의 Lanczos 벡터는 식 (3)으로부터 구성한다.

$$\mathbf{x}_{i+1} = \tilde{\mathbf{x}}_i / \beta_i \tag{3}$$

구하고자 하는 고유모드의 수가 $p$이면 일반적으로 $2p$ 혹은 $3p$ 개의 Lanczos 벡터를 생성하여 초기벡터로 사용한다. 본 논문에서는 $2p$ 개의 Lanczos 벡터를 생성하는 방법을 기준으로 연구를 수행하였다.

본 연구에서는 부분공간반복법의 효율성을 높이기 위해 가속화된 초기 Lanczos 벡터를 생성할 수 있는 수정된 Lanczos 알고리즘을 제시하였다. 수정된 Lanczos 알고리즘은 식 (4)와 같이 거듭제곱된 동적행렬을 Lanzos 점화식에 도입한다.

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{y}}_i - \gamma_i \mathbf{y}_i - \delta_{i-1}\mathbf{y}_{i-1}, \quad \bar{\mathbf{y}}_i = (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^2 \mathbf{y}_i \tag{4}$$

여기에서 $\mathbf{y}_i$는 수정된 Lanczos 벡터를 나타내며 계수 $\gamma_i$와 $\delta_i$는 다음 식으로부터 계산한다.

$$\gamma_i = \bar{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{M}\mathbf{y}_i, \quad \delta_i = (\tilde{\mathbf{y}}_i^T \mathbf{M}\tilde{\mathbf{y}}_i)^{1/2} \tag{5}$$

다음 단계의 Lanczos 벡터는 식 (6)에 의해 계산한다.

$$\mathbf{y}_{i+1} = \tilde{\mathbf{y}}_i / \delta_i \tag{6}$$

식 (4)의 거듭제곱된 동적행렬은 식 (1)의 동적행렬에 비해 고유치의 근사값들을 더욱 빠르게 분리한다. 따라서, 수정된 알고리즘으로부터 생성된 초기벡터가 기존의 초기벡터보다 참값의 고유벡터 공간에 더욱 가깝게 된다. 물론, 동적행렬의 거듭제곱 값의 계산을 위해서는 전방향 및 역방향 치

* 한국해양연구원 해양시스템안전연구소
E-mail : kimbw@kriso.re.kr
Tel : (042) 868-7524, Fax : (042) 868-7519
** 한국해양연구원 해양시스템안전연구소
*** 한국과학기술원

환(forward reduction and back substitution)의 연산과정이 1 회 추가된다. 그러나, 수렴이 향상된 초기벡터로 인해 반복회수가 줄어들 경우 반복회수 감소에 따른 계산시간의 감소 정도가 추가된 전방향 및 역방향 치환에 따른 계산시간의 증가 정도를 압도하여 제안방법이 기존의 방법보다 해석시간이 감소될 수 있다. 실제로, 1 회 추가된 전방향 및 역방향 치환과정에 소요되는 연산은 전체 연산회수에 비해 무시할 정도다. 이 후의 과정, 즉 역방향 반복과정과 축소시스템의 고유치해석은 기존방법과 동일한 절차를 갖는다.

표 1. 기존방법과 제안방법의 수치 알고리즘

| 연산 | 기존방법 | 제안방법 |
|---|---|---|
| 행렬분해 | $\mathbf{K}=\mathbf{LDL}^T$ | |
| 초기벡터 구성 | 식 (1) ~ (3)<br>$\mathbf{\Phi}_1=[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\cdots\mathbf{x}_q]$<br>$q=2p$ | 식 (4) ~ (6)<br>$\mathbf{\Phi}_1=[\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2\cdots\mathbf{y}_q]$<br>$q=2p$(제안방법 1)<br>$q=1.5p$(제안방법 2) |
| 반복 | $k=1,2,\cdots$ | |
| 역방향 반복 | $\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_k$ | |
| 축소시스템 구성 | $\mathbf{K}_{k+1}=\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}^T\mathbf{K}\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}$<br>$\mathbf{M}_{k+1}=\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}^T\mathbf{M}\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}$ | |
| 축소고유치 문제 해석 | $\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}=\mathbf{M}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}\mathbf{\Lambda}_{k+1}$ | |
| 향상된 고유벡터 구성 | $\mathbf{\Phi}_{k+1}=\overline{\mathbf{\Phi}}_{k+1}\mathbf{Q}_{k+1}$ | |
| 수렴여부 판단 | $\varepsilon_i \le$ Tolerance ? | |

본 연구에서는 생성하는 초기벡터의 수에 따라 제안방법을 두 가지 형태로 제시하였다. 제안방법 1은 구하고자 하는 고유모드의 수가 $p$일 경우 $2p$ 개의 초기벡터를 구성하는 방법이고 제안방법 2는 $1.5p$ 개의 초기벡터를 구성하는 방법이다. 제안방법 1은 기존방법과 동일한 개수의 초기벡터를 사용하면서 가속화된 벡터를 이용하므로 반복회수가 현격히 줄어들 가능성이 크다. 단, 반복회수가 동일할 경우 효율성이 증대되지 않는 단점이 있다. 제안방법 2는 가속화된 벡터를 사용하면서 기존방법보다 작은 개수의 초기벡터를 사용한다. 반복벡터의 수가 작으므로 역방향 반복 및 축소시스템 고유치해석 등의 과정에서 해석시간을 줄일 수 있다. 그러나, 반복벡터의 수가 작으므로 그만큼 수렴성이 감소될 수 있는 단점이 있다. 기존방법과 두 제안방법의 수치 알고리즘을 표 1에 요약하였다. 본 연구에서 수렴 여부는 식 (7)과 같은 오차식[7]으로부터 판단하였으며 허용오차는 $10^{-6}$으로 하였다.

$$\varepsilon_i=\frac{\|\mathbf{K}\phi_i-\lambda_i\mathbf{M}\phi_i\|_2}{\|\mathbf{K}\phi_i\|_2} \tag{7}$$

## 3. 수치예제

제안방법의 검증을 위해 그림 1 및 그림 2와 같은 두 개의 빌딩 구조물에 대해 수치해석을 수행하였다. 제안방법 1 및 제안방법 2와 기존 방법의 비교를 위해 세 방법의 반복회수 및 해석시간을 고찰하였다. 예제구조물의 탄성계수는 $2.1\times10^{11}$ Pa이고 밀도는 7850 kg/m$^3$이다. 단면 2차 모멘트와 단면적은 각각 $8.3\times10^{-6}$ m$^4$, 0.01 m$^2$ 이다. 예제구조물 1은 400개의 보요소와 180 개의 절점으로 구성된 구조물로서 총 자유도는 1008이다. 예제구조물 2는 2170 개의 보요소와 864 개의 절점으로 구성되어 있으며 총 자유도는 5040이다. 수치예제에 대한 해석 결과를 표 2와 3 그리고 그림 3과 4에 제시하였다. 표 2와 3은 기존방법, 제안방법 1 및 제안방법 2의 반복회수를 비교하고 있고 그림 3과 4는 세 방법의 고유치해석 소요 시간을 비교하고 있다.

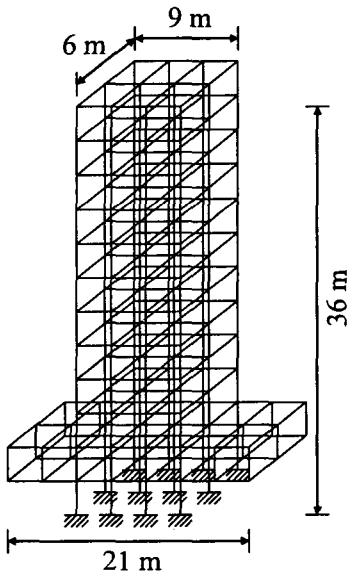

그림 1. 예제구조물 1

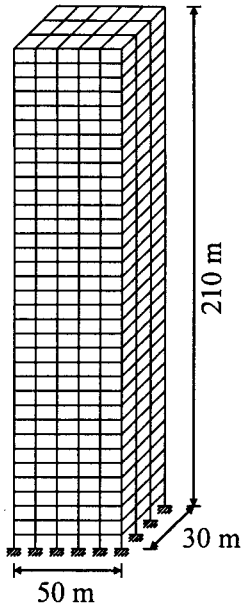

그림 2. 예제 구조물 2

표 2와 3 그리고 그림 3과 4로부터 제안방법 1이 반복회수가 가장 작으며 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 작을 경우 기존방법 및 제안방법 2보다 해석시간이 상당히 작음을 알 수 있다. 그러나, 구하고자 하는 고유모드의 수가 커짐에 따라 반복회수가 1이 되면서 기존방법의 반복회수와 동일하여 효율성이 증대되지 않음을 알 수 있는데 그것은 구하고자 하는 고유쌍의 수가 많을 경우 초기벡터의 수 즉 부분공간의 크기가 충분히 크게 설정되므로 가속화되지 않은 초기벡터를 사용하더라도 1회의 반복으로 수렴하기 때문이다. 한편, 제안방법 2는 반복벡터의 수가 다른 두 방법보다 작아 수렴성이 우수하지 못하여 반복회수가 많이 소요됨을 알 수 있다. 그러나, 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 클 경우 세 방법의 반복회수는 모두 1로서 동일하며 그 경우 제안방법 2의 반복벡터의 수 즉 부분공간의 크기가 작으므로 역방향 반복 및 축소고유치 해석에 소요되는 연산이 현격히 감소되어 해석시간이 가장 작음을 알 수 있다. 요약하면, 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 작을 경우 제안방법 1이 가장 효율적이며 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 클 경우에는 제안방법 2가 가장 효율적이다.

## 4. 결 론

가속화된 Lanczos 벡터를 초기 반복벡터로 사용하는 수정된 부분공간반복법을 두 가지 형태로 제안하였다. 제안방법 1은 구하고자 하는 고유모드의 수가 $p$일 경우 $2p$ 개의 초기벡터를 구성하는 방법이고 제안방법 2는 $1.5p$ 개의 초기벡터를 구성하는 방법이다. 제안방법의 검증을 위해 두 개의 예제구조물에 대한 수치해석을 수행하였다. 이론적인 고찰과 수치해석 결과로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 작을 경우 제안방법 1의 수렴성이 가장 우수하여 반복회수 및 해석시간이 작아서 가장 효율적이다. 그러나, 구하고자 하는 고유모드의 수가 클 경우 기존방법과 수렴성이 동일하여 효율성이 증가하지 않는다.

(2) 제안방법 2는 수렴성이 우수하지 못하여 전반적으로 반복회수가 많다. 그러나, 구하고자 하는 고유모드의 수가 비교적 클 경우 세 방법의 반복회수가 모두 1로서 동일한 반면 반복벡터의 수는 제안방법 2가 작으므로 역방향 반복 및 축소고유치 해석에 소요되는 시간이 감소되어 제안방법 2가 가장 효율적이다.

## 후 기

본 논문은 해양수산부가 지원하는 해양수산 연구개발과제인 '초대형 부유식 해상구조물 기술개발'과 한국해양연구원에서 기본연구사업으로 수행중인 '해양개발을 위한 설계 엔지니어링 기술고도화' 사업의 일부로 수행되었음을 밝혀 둔다.

표 2. 예제구조물 1의 반복회수

| 고유모드 수 | 기존방법 | 제안방법 1 | 제안방법 2 |
|---|---|---|---|
| 5 | 13 | 13 | 18 |
| 10 | 12 | 8 | 30 |
| 15 | 10 | 2 | 17 |
| 20 | 5 | 1 | 13 |
| 25 | 9 | 1 | 22 |
| 30 | 14 | 1 | 27 |
| 35 | 7 | 1 | 18 |
| 40 | 3 | 1 | 13 |
| 45 | 21 | 1 | 42 |
| 50 | 14 | 1 | 33 |
| 55 | 16 | 1 | 42 |
| 60 | 15 | 1 | 36 |
| 65 | 10 | 1 | 26 |
| 70 | 4 | 1 | 22 |
| 75 | 1 | 1 | 13 |
| 80 | 1 | 1 | 4 |
| 85 | 1 | 1 | 1 |
| 90 | 1 | 1 | 1 |
| 95 | 1 | 1 | 1 |
| 100 | 1 | 1 | 1 |

표 3. 예제구조물 2의 반복회수

| 고유모드 수 | 기존방법 | 제안방법 1 | 제안방법 2 |
|---|---|---|---|
| 10 | 8 | 4 | 15 |
| 20 | 16 | 5 | 33 |
| 30 | 12 | 1 | 24 |
| 40 | 5 | 1 | 16 |
| 50 | 23 | 1 | 44 |
| 60 | 13 | 1 | 25 |
| 70 | 7 | 1 | 24 |
| 80 | 12 | 1 | 28 |
| 90 | 13 | 1 | 34 |
| 100 | 13 | 1 | 33 |
| 110 | 7 | 1 | 29 |
| 120 | 15 | 1 | 33 |
| 130 | 3 | 1 | 20 |
| 140 | 1 | 1 | 19 |
| 150 | 1 | 1 | 6 |
| 160 | 1 | 1 | 2 |
| 170 | 1 | 1 | 1 |
| 180 | 1 | 1 | 1 |
| 190 | 1 | 1 | 1 |
| 200 | 1 | 1 | 1 |

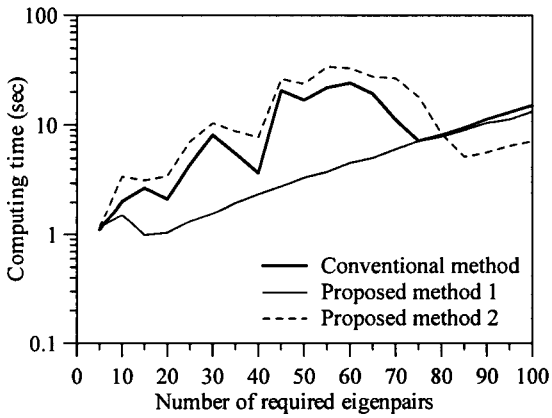

그림 3. 예제구조물 1의 해석시간

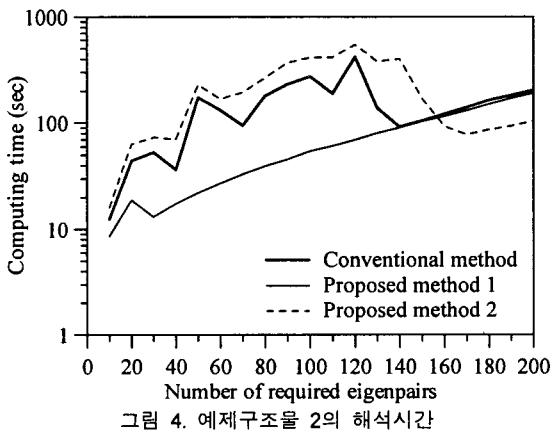

그림 4. 예제구조물 2의 해석시간

## 참고문헌


(1) Bathe, K.J. and Wilson, E.L., 1972, "Large Eigenvalue Problems in Dynamic Analysis," *ASCE J. Engrg. Mech.*, Vol.98, pp.1471~1485.

(2) Lanczos, C., 1950, "An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators," *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, Vol.45, No.4, pp.255~282.

(3) Bathe, K.J. and Ramaswamy, S., 1980, "An Accelerated Subspace Iteration Method," *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.23, pp.313~331.

(4) Grosso, G., Martinelli, L. and Parravicini, G.P., 1993, "A New Method for Determining Excited States of Quantum Systems," *Nuovo Cimento D*, Vol.15, No.2-3, pp.269~277.

(5) Lam, Y.C. and Bertolini, A.F., 1994, "Acceleration of the Subspace Iteration Method by Selective Repeated Inverse Iteration," *FE Anal. Design*, Vol.18, pp.309~317.

(6) Qian, Y.Y. and Dhatt, G., 1995, "An Accelerated Subspace Method for Generalized Eigenproblems," *Comp. and Struct.*, Vol.54, No.6, pp.1127~1134

(7) Bathe, K.J., 1996, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall.