

두께가 얇은 단면을 갖는 보의 진동특성 Vibration Characteristics of Thin-Walled Beams

오상진[†] · 이재영* · 모정만** · 박광규***

Sang Jin Oh, Jae Young Lee, Jeong Man Mo and Kwang Kyou Park

Key Words : monosymmetric cross-section(1 축 대칭단면), thin-walled beam(두께가 얇은 단면을 갖는 보), warping(워핑), free vibration(자유진동), natural frequency(고유진동수), mode shape(진동형)

ABSTRACT

A study of the coupled flexural-torsional vibrations of thin-walled beams with monosymmetric cross-section is presented. The governing differential equations for free vibration of such beams are solved numerically to obtain natural frequencies and their corresponding mode shapes. The beam model is based on the Bernoulli-Euler beam theory and the effect of warping is taken into consideration. Numerical results are given for two specific examples of beams with free-free, clamped-free, hinged-hinged, clamped-hinged and clamped-clamped end constraints both including and excluding the effect of warping stiffness. The effect of warping stiffness on the natural frequencies and mode shapes is discussed and it is concluded that substantial error can be incurred if the effect is ignored.

1. 서론

보는 기둥, 평판 등과 함께 많은 구조물에서 기본단위구조로 이용되고 있어 다양한 조건을 갖는 보의 동적거동, 특히 자유진동에 관한 활발한 연구가 이루어지고 있다. 단면도심과 전단중심이 일치하는 2 축 대칭단면을 갖는 보에서는 휨과 비틀림 진동이 독립적으로 발생한다. 그러나 단면도심과 전단중심이 일정거리를 가지고 있는 1 축 대칭 단면을 갖는 보에서는 대칭축에 수직인 방향으로 발생하는 휨과 비틀림의 연성진동이 발생하기 때문에 복잡한 거동특성을 보인다⁽¹⁻⁶⁾.

본 연구에서는 1 축 대칭의 두께가 얇은 단면을 갖는 보의 휨-비틀림 연성진동에 대한 고유진동수 및 진동형을 산출하고, 그 특성을 고찰하는데 목적이 있다. 대상 보의 진동특성을 지배하는 수학적 모형으로 회전관성과 전단변형의 영향을 무시한 Bernoulli-Euler 보이론을 채택하고 워핑의 영향을 고려하였으며, 대상보의 정확한 고유진동수 및 진동형을 산출하기 위하여 수치적분기법과 시행착오적 행렬값 탐사법이 결합된 해석 알고리즘으로 컴퓨터 프로그램을 작성하였다.

해석대상 보로서 이 분야의 연구에서 많이 채택되고 있는 두 가지 단면형상을 갖는 자유-자유, 고정-자유, 회전-회전, 고정-회전 및 고정-고정 보

에 대한 고유진동수 및 진동형을 산출하고 그 결과를 분석하였다.

2. 수학적 모형

Fig. 1 은 두께가 얇은 1 축 대칭단면을 갖는 지간길이 l 인 보를 나타낸 것이다. 이 그림에서 C 와 S 는 각각 단면도심과 전단중심이며, e 는 단면도심과 전단중심 사이의 거리이다. 그리고 Q , M 및 T 는 진동시 보단면에 발생하는 합응력들로서 각각 보축상 임의점 x 에서의 전단력, 휨모멘트 및 비틀림 모멘트를 나타낸다. 또한 $V = V(x,t)$ 와 $\Phi = \Phi(x,t)$ 는 각각 수직방향 변위 및 비틀림각이며, 여기서 t 는 시간이다.

워핑의 영향을 고려하는 경우 대상 보의 자유진동에 대한 거동 방정식은 다음과 같다⁽³⁾.

$$EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} + m \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$E\Gamma \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + I_s \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - m e \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

여기서 EI , GJ 및 $E\Gamma$ 는 각각 보 단면의 휨강성, 비틀림강성 및 워핑강성이며, m 은 재료의 단위길이당 질량, I_s 는 단위길이당 질량 극관성모멘트이다.

대상 보가 조화진동을 한다고 가정하면 V 와 Φ 는 식 (3), (4)와 같이 표현할 수 있다.

$$V(x,t) = v \sin(\omega, t), \quad \Phi(x,t) = \phi \sin(\omega, t) \quad (3,4)$$

[†] 남도대학 토목환경과
E-mail : sjoh@namdo.ac.kr
Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679
* 호원대학교 토목공학과
** 전주농림고등학교 농업토목과
*** 대전대학교 토목공학과

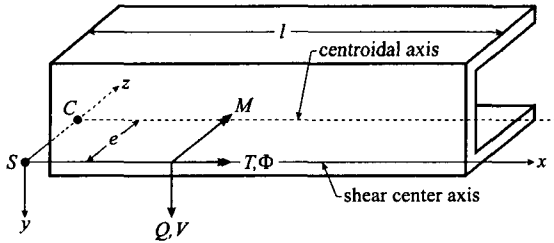


Fig. 1 Geometry and variables of thin-walled beam with monosymmetric cross-section

위의 식에서 v 와 ϕ 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 i 번째 고유각진동수(rad/s)이다. 식 (3), (4)를 식 (1), (2)에 대입하고 정리하면 다음 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{m\omega_i^2}{EI} v - \frac{me\omega_i^2}{EI} \phi \quad (5)$$

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} = \frac{GJ}{E\Gamma} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{I_s \omega_i^2}{E\Gamma} \phi - \frac{me\omega_i^2}{E\Gamma} v \quad (6)$$

고정단에서는 수직방향변위, 단면회전각, 비틀림각 및 워핑이 발생하지 않으므로 식 (7), 회전단에서는 수직방향변위, 휨모멘트, 비틀림각 및 bimoment가 발생하지 않으므로 식 (8), 자유단인 경우에는 휨모멘트, 전단력, 비틀림모멘트 및 bimoment가 발생하지 않으므로 식 (9)와 같이 경계조건식을 쓸 수 있다⁽⁷⁾.

$$v = \frac{dv}{dx} = \phi = \frac{d\phi}{dx} = 0 \quad (7a-d)$$

$$v = \frac{d^2 v}{dx^2} = \phi = \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (8a-d)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^3 v}{dx^3} = E\Gamma \frac{d^3 \phi}{dx^3} - GJ \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \quad (9a-d)$$

워핑을 고려하지 않는 경우 식 (6)은 다음 식 (10)으로 변환되며, 각 단부조건별 경계조건식은 식 (7)-(9)에서 마지막 경계조건식을 제외시키면 된다.

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{I_s \omega_i^2}{GJ} \phi + \frac{me\omega_i^2}{GJ} v \quad (10)$$

본 연구에서는 식 (5), (6)의 상미분방정식을 8개의 1계 연립미분방정식으로 변환하여 초기치 문제로 형성한 후 식 (7)-(9)의 경계조건식을 이용하여 Runge-Kutta 법으로 수치적분하였으며, 대상

Table 1 Structural properties of example beams

	ST1*	ST2**
EI (N·m ²)	9.74×10^4	5.80×10^4
GJ (N·m ²)	11.21	78.3
$E\Gamma$ (N·m ⁴)	35.4	191.0
I_s (kg·m)	7.25×10^{-3}	2.0×10^{-2}
m (kg/m)	2.095	2.45
e (m)	0.03771	0.08

* ST1: channel section

** ST2: box section with an axial slit

보의 고유진동수를 결정하기 위해서는 시행착오적 행렬값 탐사법을 이용하였다. 해석결과로서 대상 보에 대한 최저차 4개의 고유진동수 및 진동형을 산출하였다.

3. 수치해석 예 및 고찰

수치해석 예로서 이 분야의 연구^(3,6)에서 많이 채택되고 있는 두 가지 형상의 단면을 갖는 보를 택하였으며, 단부조건으로는 자유-자유, 고정-자유, 회전-회전, 고정-회전 및 고정-고정의 단부조건을 고려하였다. Table 1은 해석 예에서 택한 보 단면의 구조적 특성값을 나타낸 것이다.

Table 2는 $l=1.28\text{m}$ 와 6.4m 인 채널단면(ST1)을 갖는 보의 고유진동수를 수록한 것이다. 이 표에서 워핑을 고려하는 경우 무시하는 경우에 비해

Table 2 Natural frequencies (in Hz) of channel beams

End condition	i	$l=1.28\text{m}$		$l=6.4\text{m}$	
		W/**	W/O	W/	W/O
Free*	1	22.04	19.90	4.309	3.981
	2	152.1	30.69	8.644	6.009
	3	412.2	46.28	18.99	9.201
	4	625.2	61.43	25.72	12.21
Clamped	1	25.37	7.664	1.881	1.451
	2	98.57	22.99	4.315	3.758
	3	148.6	38.38	7.818	4.924
	4	411.6	53.74	18.26	7.616
Hinged	1	67.13	15.34	3.861	2.982
	2	263.7	30.71	11.37	6.100
	3	275.8	46.07	25.16	9.187
	4	591.2	61.44	43.53	11.10
Clamped	1	103.6	15.35	5.137	3.037
	2	333.0	30.71	14.59	6.106
	3	430.6	46.07	17.47	9.188
	4	693.4	61.44	29.11	12.27
Clamped	1	149.4	15.36	6.765	3.055
	2	410.6	31.72	17.54	6.127
	3	624.6	46.07	25.16	9.188
	4	803.8	61.44	33.41	12.27

* Rigid-body mode in free-free ends is discounted.

** W/: with warping, W/O: without warping

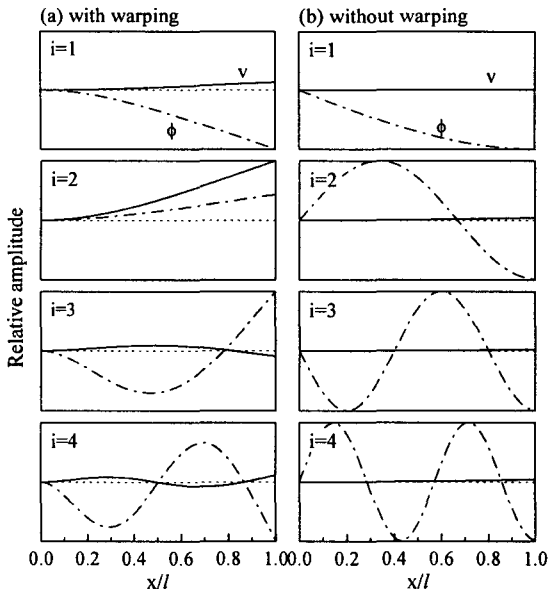


Fig. 2 The mode shapes of the channel beam with clamped-free ends ($l=1.28\text{m}$)

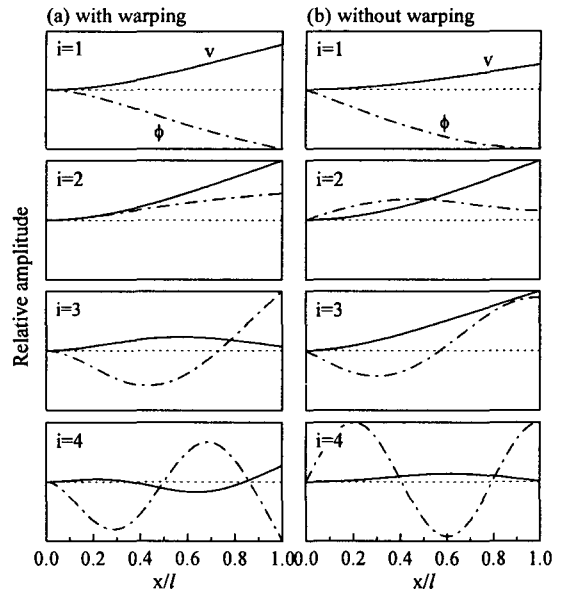


Fig. 3 The mode shapes of the channel beam with clamped-free ends ($l=6.40\text{m}$)

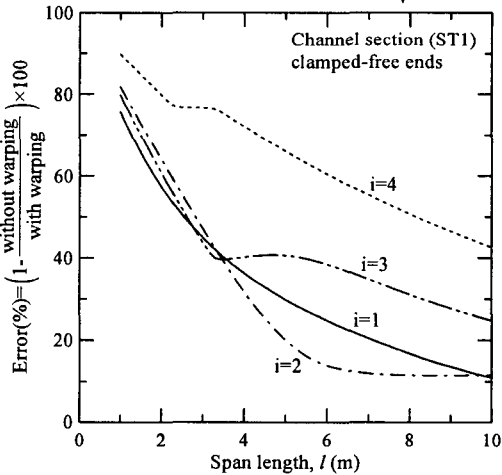


Fig. 4 Percentage errors of frequencies of the channel beams due to omission of the warping effect

고유진동수가 항상 큼을 알 수 있다. 그리고 $l=1.28\text{m}$ 인 경우 $l=6.4\text{m}$ 인 경우보다 워핑이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 알 수 있다.

Fig. 2 와 3 은 각각 $l=1.28\text{m}$ 와 6.4m 인 고정-자유 보의 진동형의 예를 나타낸 것이며, Fig. 4 는 고정-자유 보의 지간길이 변화에 따른 워핑의 영향을 나타낸 것이다.

Table 3 은 $l=2.5\text{m}$ 와 5.0m 인 상자형 단면(ST2) 을 갖는 보의 고유진동수를 수록한 것이다.

Table 3 Natural frequencies (in Hz) of box beams with an axial slit

End condition	i	$l=2.5\text{m}$		$l=5.0\text{m}$	
		W/**	W/O	W/	W/O
Free* - free	1	29.52	24.28	14.53	11.13
	2	52.12	25.84	15.06	12.89
	3	136.1	38.59	36.36	18.84
	4	225.4	49.67	61.19	24.29
Clamped - free	1	9.352	5.817	2.812	2.406
	2	38.10	17.37	11.33	7.159
	3	50.40	30.54	14.74	11.83
	4	135.2	34.06	35.38	14.95
Hinged - hinged	1	23.04	12.02	6.686	5.381
	2	86.89	24.77	23.04	12.02
	3	99.55	37.37	27.27	18.43
	4	193.1	49.93	49.69	24.19
Clamped - hinged	1	34.59	12.32	9.516	5.876
	2	109.2	24.81	28.46	12.10
	3	152.8	37.38	40.03	18.45
	4	226.1	49.93	57.82	24.77
Clamped - clamped	1	49.21	12.42	13.02	6.068
	2	134.2	24.93	34.59	12.32
	3	220.0	37.39	56.33	18.45
	4	261.7	49.95	66.64	24.81

* Rigid-body mode in free-free ends is discounted.

** W: with warping, W/O: without warping

Fig. 5 와 6 은 각각 $l=2.5\text{m}$ 와 5.0m 인 자유-자유 보의 진동형의 예를 나타낸 것이며, Fig. 7 은 자유-자유 보의 지간길이 변화에 따른 워핑의 영향을 나타낸 것이다.

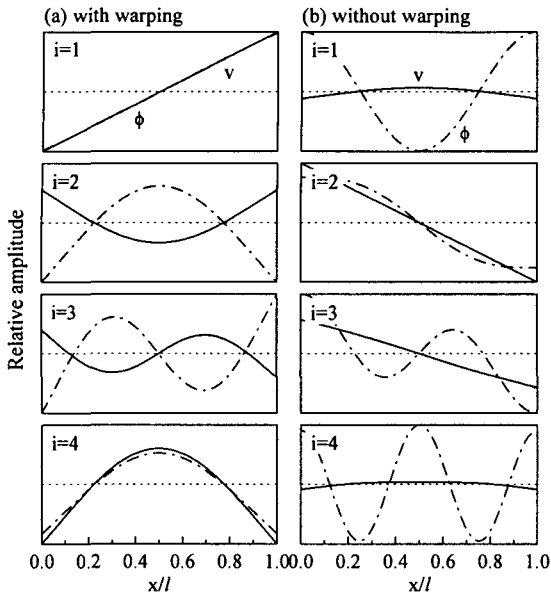


Fig. 5 The mode shapes of the box beam with free-free ends ($l=2.5\text{m}$)

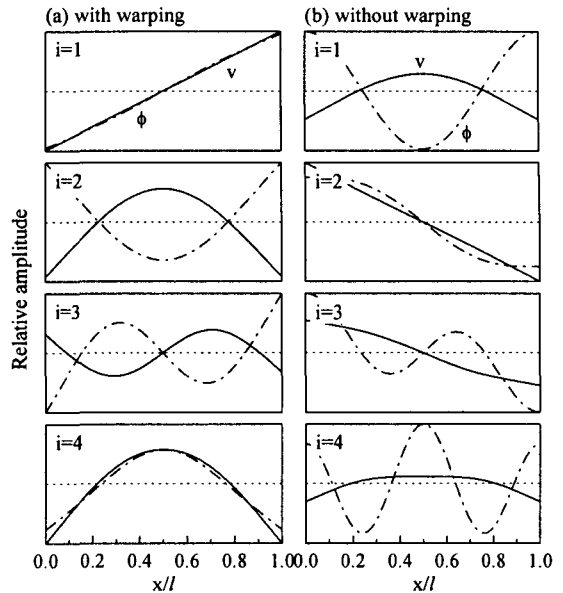


Fig. 6 The mode shapes of the box beam with free-free ends ($l=5.0\text{m}$)

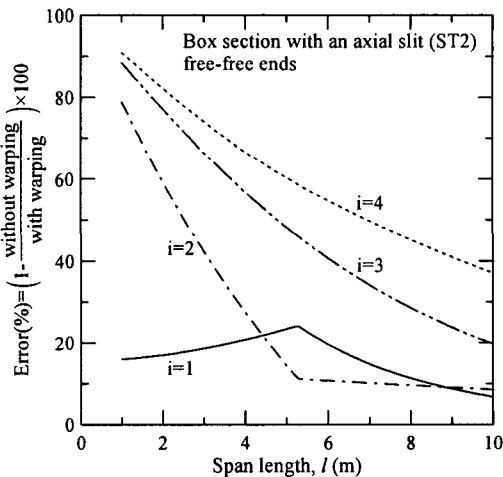


Fig. 7 Percentage errors of frequencies of the box beams due to omission of the warping effect

4. 요약

본 연구에서는 워핑을 고려한 Bernoulli-Euler 보 이론을 적용하여 1 축 대칭단면을 갖는 보의 고유 진동수 및 진동형을 산출하였다. 해석 예에서는 채널단면 및 작은 틈이 있는 상자형 단면을 갖는 자유-자유, 고정-자유, 회전-회전, 고정-회전 및 고정-고정 보에 대한 최저차 4 모드까지의 결과를 산출하여, 단부조건 및 지간길이 변화에 따른 워핑의 영향을 고찰하였다.

참고문헌

- (1) Documaci, E., 1987, "An Exact Solution for Coupled Bending and Torsion Vibrations of Uniform Beams having Single Cross-Sectional Symmetry," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 119, pp.443-449.
- (2) 김상환, 1995, "휨과 비틀림이 연계된 채널보의 진동", *한국소음진동공학회지*, 제 5 권 제 3 호, pp.327-335.
- (3) Banerjee, J.R., Guo, S. and Howson, W.P., 1996, "Exact Dynamic Stiffness Matrix of a Bending-Torsion Coupled Beam including Warping," *Computers and Structures*, Vol. 59, pp.613-621.
- (4) 이병구, 오상진, 진태기, 이종국, 1999, "워핑을 고려한 일축 대칭단면을 갖는 Timoshenko 보의 휨-비틀림 연성진동", *한국소음진동공학회지*, 제 9 권 제 5 호, pp.1012-1018.
- (5) Tanaka, M. and Bercin, A.N., 1999, "Free Vibration Solution for Uniform Beams of Non-symmetrical Cross Section using Mathematica," *Computers and Structures*, Vol. 71, pp.1-8.
- (6) Eslimy-Isfahany, S.H.R. and Banerjee, J.R., 2000, "Use of Generalized Mass in the Interpretation of Dynamic Response of Bending-Torsion Coupled Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 238, pp.295-308.
- (7) Heins, C.P., 1975, *Bending and Torsional Design in Structural Members*. D.C. Heath and Company, Lexington.