

구조물의 결합 위치 변경을 통한 구조물 변경법 Structural Dynamics Modification via Reorientation of Modification Elements.

정의일*·박윤식**

Eui-Il Jung and Youn-Sik Park

Key Words : Substructure(부분구조물), Synthesis(합성), Non-matching(비부합), Eigenvalue(고유치), structural dynamics modification(구조물 변경법)

ABSTRACT

Substructures position is considered as design parameter to obtain optimal structural changes to raise its dynamic characteristics. In conventional SDM (structural dynamics modification) method, the layout of modifying substructures position is first fixed and at that condition the structural optimization is performed by using the substructures size and/or material property as design parameters. But in this paper as a design variable substructures global translational and rotational position is treated. For effective structural modification the eigenvalue sensitivity with respect to that design parameter is derived based on measured frequency response function. The optimal structural modification is calculated by combining eigenvalue sensitivities and eigenvalue reanalysis technique iteratively. Numerical examples are presented to the case of beam stiffener optimization to raise the natural frequency of plate.

1. 서론

구조물의 응답은 구조물의 고유 진동수에 영향을 많이 받기 때문에 구조물의 동적 응답을 개선하기 위해 부가 구조물을 첨가 삭제함으로써 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 하는 구조물 변경법이 널리 사용되어 왔다. 이제까지 구조물 변경법에 대한 연구는 많이 있어 왔다. 그들 대부분은 확정된 배치도 상에서 구조물의 물성치나 구조물의 크기변화를 통해서 이루어졌다[1~3]. 그러나 본 논문에서는 디자인 변수로서 구조물의 결합 위치를 사용하여 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 한다. 선행 연구로 구조물의 결합 형태를 디자인 변수로 사용한 연구가 Twu 와 Choi 에 의해 수행된 적이 있으며[4~5], 유한요소법에 의해 생성된 요소를 재생성함으로써 구조물을 변경하였다. 구조물의 결합을 효과적으로 다루기 위해, 부분 구조물 합성의 개념을 사용하여 합성된 구조물의 고유 진동수를 구하고자 한다. 구조물 합성의 개념을 사용하여 구조물의 일부분 또는 부분 구조물은 분리되어 모델링되고, 전체 구조물로 합성된다. 이 부분 구조물 합성법은 다른 많은 논문에서 사용되어 왔다. Simpson 은 이 부분 구조물 합성의 개념을 사용하여 구조물의 고유치를 구하는 연구를 하였다[6].

구조물을 변경하기 위한 변경 부분 구조물이 최적의 결합 위치를 찾기 위해 다른 부분 구조물 위치를 움직여 나갈 때, 결합 노드의 위치가 변경된다. 그러므로 자연스럽게 절점의 위치가 서로 불일치 되는 현상이 발생하므로 불일치 절점이 있는 구조물의 합성이 먼저 연구되어야 한다. Park, Felippa 그리고 Rebel 은 불일치 노드를 해결하기 위해 부분 구조물 사이에 경계 기준면을 만들고, 이 경계 기준면에 부분 구조물을 결합하는 방법을 제시하였다[7].

본 연구에서는 부분 구조물의 결합 위치를 디자인 변수로 하여 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 한다. 이를 위해 부분 구조물의 결합 위치인 병진 좌표 값과 회전 좌표 값에 대한 고유치의 민감도를 세우고, 이 민감도를 이용하여 가장 민감한 변경 방향을 설정하여 최적화 과정을 통해서 구조물을 변경하고자 한다.

2. 합성된 구조물의 모달 해석

2.1 지배 방정식

그림 1 과 같은 구조물을 살펴보자. 부분 구조물의 합성은 구조물의 경계 사이에 경계 기준면(interface frame)을 만들고 이 경계 기준면에 부분 구조물의 경계 변위를 일치시키므로 해서 구조물을 합성할 수 있다. 전체 구조물의 지배 방정식을 세우기 위해 해밀턴의 원리와 경계 결합 조건식을 함께 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

* 한국과학기술원 대학원 기계공학과
E-mail : jungeuil@kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3060, Fax : (042) 869-8220

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

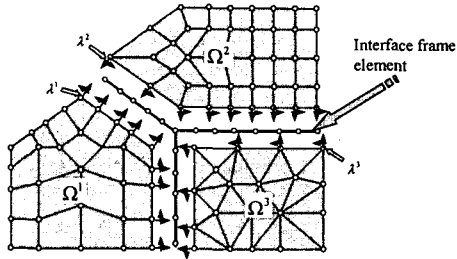


Figure 1. Discretization of structure

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + \Pi_\lambda) dt = 0 \quad (1)$$

여기서

$$\Pi_\lambda = \sum_{s=1}^{s=n_s} \int_{\Gamma^{(s)}} \bar{\lambda}^{(s)T} (\bar{u}^{(s)} - \bar{u}^f) d\Gamma \quad (2)$$

을 나타낸다. n_s 는 부분 구조물의 개수를 나타내며, \bar{u}^f 는 가상의 경계 기준면의 변위를 나타낸다. $\bar{\lambda}^{(s)}$ 는 라그랑지 승수를 나타낸다. 변위를 적당한 형상 함수로 이산화하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{u}^{(s)} = N_u^{(s)} u^{(s)}, \bar{\lambda}^{(s)} = N_\lambda^{(s)} \lambda^{(s)}, \bar{u}_f = N_f u_f \quad (3)$$

여기서 $N_u^{(s)}$, $N_\lambda^{(s)}$, N_f 은 각각 부분 구조물의 변위 함수, 라그랑지 승수의 형상 함수, 경계 기준면의 형상 함수이다.

위의 이산화 과정을 통해서 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{s=N} \left(\frac{1}{2} \dot{u}^{(s)T} M^{(s)} \dot{u}^{(s)} - \frac{1}{2} u^{(s)T} K^{(s)} u^{(s)} + f^{(s)T} u^{(s)} + \lambda^{(s)T} C^{(s)} u^{(s)} - \lambda^{(s)T} C_f^{(s)} u_f^{(s)} \right) dt = 0$$

$$C^{(s)} = \int_{\Omega^s} N_\lambda^T N_u d\Gamma, C_f = \int_{\Gamma^{(s)}} N_\lambda^T N_f d\Gamma \quad (4)$$

여기서 C_f 을 보간 행렬이라 부른다. 보간 행렬은 경계 기준면을 근사화함으로써 계산되는 양인데, 경계 접점에서 경계 기준 형상 함수를 계산함으로써 얻어진다. 식(4)로부터 적분항의 미소 변화량을 영으로 취하면 다음과 같이 이산화된 지배 방정식을 세울 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\lambda} \\ \ddot{\mathbf{u}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서 M , K 와 C 는 전체 구조물의 질량 행렬, 강성 행렬, 연결 행렬로써 각 부분 구조물의 행렬 값이 대각 성분에 위치한다. C_f 는 $C_f^{(s)}$ 을 열 방향으로 쌓아서 만들 수 있다.

2.2 합성된 구조물의 고유진동수

만약 주파수 ω 로 가진되는 조화 가진의 경우에 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ 라 가정함으로써 식(5)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}(\omega) & -\mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 $\mathbf{D}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \mathbf{H}^{-1}(\omega)$ 는 동적 강성을 말하며, 식(6)의 첫번째 행으로부터

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}(\omega)^{-1} \mathbf{C}^T \lambda = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{C}^T \lambda \quad (7)$$

위 식(7)을 식(6)에 넣고 정리하면 다음과 같이 축소된 특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{bb}(\omega) & \mathbf{C}_b \\ \mathbf{C}_f^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = E(\omega) \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 밑 첨자 bb는 구조물의 경계 자유도를 이야기 하며, $\mathbf{H}_{bb}(\omega) = \mathbf{C} \mathbf{H}(\omega) \mathbf{C}^T$ 는 부분 구조물의 경계 자유도에 대한 주파수 응답 함수를 대각 성분으로 하는 대각 행렬이다. 합성된 구조물의 자유 진동에 대한 고유 진동수 ω_r 는 다음과 같이 식(8)의 행렬식이 영이 되어야 함을 이용한다.

$$\det E(\omega) \Pi_{s=1}^{n_s} \Pi_{m=1}^{n_m} (\omega_{sm}^2 - \omega^2) = 0 \quad (9)$$

3. 고유치 민감도 해석

구조물의 고유치를 변경하기 위해서 디자인 변수에 대한 고유치의 민감도를 계산할 필요가 있다. 위의 지배 방정식 식(8)로부터 r 번째 고유 진동수 ω_r 을 구한 다음, 식(8)에 $[\lambda^T, \mathbf{u}_b^T]$ 을 앞 뒤로 곱하면 다음과 같은 스칼라 함수를 얻을 수 있다.

$$-\lambda^T \mathbf{H}_{bb}(\omega_r) \lambda + 2\lambda^T \mathbf{C}_b \mathbf{u}_b = 0 \quad (11)$$

위 식을 디자인 변수 g_i 에 대해 미분을 취하면

$$-\lambda^T \frac{d\mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{dg_i} \lambda + 2\lambda^T \frac{d\mathbf{C}_f}{dg_i} \mathbf{u}_f = 0 \quad (12)$$

그리고 디자인 변수는 고유 진동수와 주파수 응답 함수에 영향을 미치므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{dg_i} = \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial g_i} + \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial g_i} \quad (13)$$

그러므로 위 식을 식(12)에 넣으면 다음과 같은 고유치에 대한 디자인 변수의 민감도 식을 구할 수 있다.

$$\frac{d\omega_r}{dg_i} = \frac{-\lambda^T \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial g_i} \lambda + 2\lambda^T \frac{d\mathbf{C}_f}{dg_i} \mathbf{u}_f}{\lambda^T \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial \omega_r} \lambda} \quad (14)$$

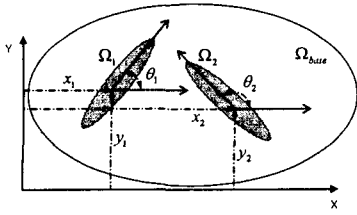


Figure 2. Positional design variables

본 연구에서 디자인 변수로 고려되는 것은, 그림 2 와 같이 변경 구조물의 결합 위치인 g 벡터가 된다. $g = [x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2]^T$.

회전 변경량 θ_i 이 바뀌는 경우는 경계 주파수 응답 함수는 좌표 변환을 겪게 되므로 주파수 응답 함수의 미분값은 다음과 같이 계산되어 진다. (병진 변화량이 고려될 때는 영).

$$\frac{dH_{bb}^{(s)}(\omega_r, \theta_s)}{d\theta_s} = \frac{dT(\theta_s)^T}{d\theta_s} H_{bb}^0(\omega_r, 0) T(\theta_s) + T(\theta_s)^T H_{bb}^0(\omega_r, 0) \frac{dT(\theta_s)}{d\theta_s} \quad (15)$$

한편 보간 행렬에 대한 미분에 대해 살펴보자. 먼저 병진 방향의 병진 이동량 x_s, y_s 에 대한 경우를 살펴보면, 경계 기준면에 대한 형상 함수 N_f 는 보통 자연 좌표 ξ 와 η 로 표현되므로 체인 룰을 사용하여 N_f 에 대한 미분을 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{dC_f^{(s)}}{dx^{(s)}} \\ \frac{dC_f^{(s)}}{dy^{(s)}} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_f(\xi_s, \eta_s)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_f(\xi_s, \eta_s)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

그림 3 과 같이 회전 방향의 이동량 θ_s 에 대한 형상 함수의 미분을 살펴보자. 병진 이동량에 대한 기술과 유사하게 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial C_f}{\partial \theta_s} = [-l \sin \theta_s, l \cos \theta_s] \left[\mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_f(\xi_s, \eta_s)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_f(\xi_s, \eta_s)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \right] \quad (17)$$

여기서 l 는 회전 중심으로부터의 거리를 의미한다. 식 (15), (16) 그리고 (17) 을 식 (14) 에 넣어 서 결합 위치에 대한 민감도를 얻을 수 있다.

4. 평판에 빔 보강재를 이용한 구조물 변경에

앞에서 설명한 동특성 변경법을 그림 4 와 같은 평판과 빔 보강재 로 이루어진 구조물에 적용하여 보았다.

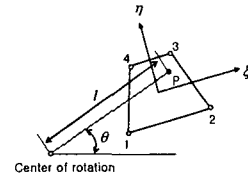


Figure 3. Rotation of p nodal point and natural coordinates for four-node interface frame element

구조물의 고유 진동수를 높이기 위해서 평판 구조물 위에 결합되는 빔 보강재의 결합 위치를 디자인 변수로 하여 최적화 과정을 수행한다. 한 쪽이 고정된 평판은 넓이 600mm*450mm, 두께 2mm 의 치수를 갖는다. 평판의 물성치는 탄성강도 200Gpa 와 밀도 7860 kg/m³ 이다. 이 평판은 유한 요소법을 사용하여 48 개의 판 요소로 나누어 질량 행렬과 강성 행렬을 만들었다. 판 요소는 절점 당 한 개의 병진 자유도와 두개의 회전 자유도를 갖는다. 이 평판 위에 부착되는 빔 보강재는 길이 150mm, 높이 5mm 의 치수를 가지며, 물성치는 평판과 같다. 한 개의 빔은 유한 요소 법으로 4 개의 빔 요소로 모델링했으며, 빔 보강재의 결합 위치를 나타내는 x, y 좌표값과 회전량 θ 가 디자인 변수가 되겠다.

이 예제의 목적은 이 평판의 첫번째 고유 진동수를 빔 보강재의 위치로 최대 높이고자 한다. 제한 조건은 빔 보강재가 평판 영역을 벗어나지 않고 질량이 0.3kg 이하에서 최적 위치를 찾으려고 하였다. 최적 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{objective : } \max(-\omega_1)$$

$$\text{subject to : } 0 \leq x_s \leq 0.6$$

$$0 \leq y_s \leq 0.45$$

$$\sum_{s=1}^{n_b} \rho_s L_s w_s t_s = \sum_{s=1}^{n_b} m_s \leq 0.3$$

그림 5 에 각각 초기위치에 출발하여 벽쪽으로 최적 빔의 위치가 이동하면서 고유 진동수를 높이기 위해 빔이 회전함을 알 수 있다. 그림 6 과 7 은 빔의 폭을 디자인 변수로 하였을 때, 평판의 고유치를 최대 높이기 위한 체적화 과정이다.

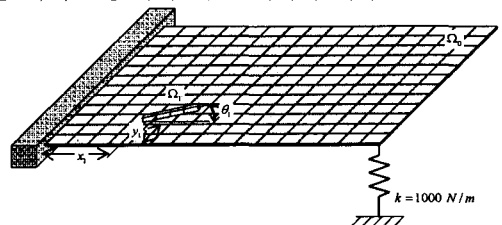


Figure 4. Layout reorientation design variables

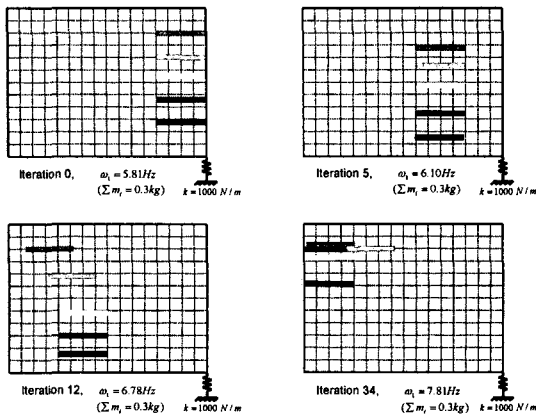


Figure 5. Locus of five beams during optimization

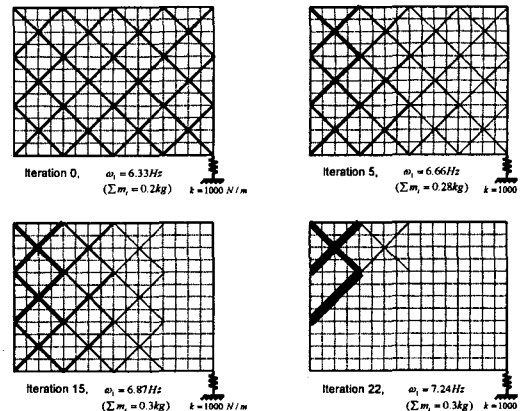


Figure 7. Cross fixed layout pattern and beam width changes during optimization process

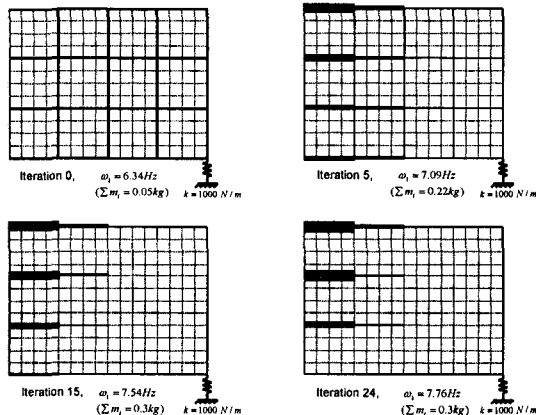


Figure 6. Rectangular fixed layout pattern and beam width changes during optimization process

Baseline plate	Size optimization	Position optimization				
		1 beams	2 beams	3 beams	4 beams	5 beams
6.21Hz	7.78Hz	7.60Hz	7.67Hz	7.68Hz	7.80Hz	7.81Hz

-Maximum adding mass: 0.3kg

Table 1. Comparison of fixed layout pattern vs. present layout orientation methods

5. 결론

본 연구에서는 부분 구조물의 결합 위치를 디자인 변수로 하여 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 하였다. 이를 위해 부분 구조물의 결합 위치인 병진 좌표 값과 회전 좌표 값에 대한 고유치의 민감도를 세우고, 이 민감도를 이용하여 가장 민감한 변경 방향을 설정하여 최적화 과정을 통해서 구조물을 변경하였다. 적용 예로 평판이라는 부분 구조물위에 빔 보강재라는 부분 구조물의 결합 위치를 디자인 변수로 한 구조물 변경을 묘사해 보았다.

후 기

본 연구는 국가지정연구사업 "진동 저감을 위한 동특성 변경기술(2000-N-NL-01-C-148)과 두뇌한국사업(BK21)의 지원에 의한 것입니다.

참고문헌

- (1) Curtis J. Hoff, Michael M. Bernitsas, Robert E. Sandström, and William J. Anderson, Inverse Perturbation Method for Structural Redesign with Frequency and Mode Shape Constraints, AIAA Journal, Vol. 22, No. 9, pp.1304-1309, July 1984.
- (2) Malcolm J. Smith and Stanley G. Hutton, Frequency Modification Using Newton's method and Inverse Iteration Eigenvector Updating, AIAA Journal, Vol. 30, No. 7, pp.1886-1891, July 1992.
- (3) Malcolm J. Smith and Stanley G. Hutton, A Perturbation Method for Inverse Frequency Modification of Discrete, Undamped Systems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 61, No. 7, pp. 887-892, December 1994.
- (4) Sung-Ling Twu and Kyung K. Choi, Configuration Design Sensitivity Analysis of Built-Up Structures Part I: Theory, International Journal for numerical methods in engineering, vol 35, pp.1127-1150, 1992.
- (5) Sung-Ling Twu and Kyung K. Choi, Configuration Design Sensitivity Analysis of Built-Up Structures Part II: Numerical Method, International Journal for numerical methods in engineering, vol 36, pp.4201-4222, 1993.
- (6) A. Simpson, The Kron's methodology and Practical Algorithms for eigenvalue, sensitivity and response analysis of large scale structural systems. , Aeronautical Journal 84, pp. 417-433, 1980.
- (7) K. C. Park, C. A. Felippa and Rebel, A Simple Algorithm for Localized Construction of Non-matching Structural Interface. International Journal for Numerical Methods in Engineering 53, pp. 2117-2142, 2002.