

# 유도 초음파 신호 분석을 위한 적응 단시간 푸리에 변환 Adaptive Short-time Fourier Transform for Guided-wave Analysis

선경호\* · 홍진철\* · 김윤영\*\*

Kyung Ho Sun, Jin-Chul Hong, Yoon Young Kim

**Key Words :** Guided-wave(유도 초음파), Dispersion(분산), Time-frequency analysis(시간-주파수 해석)  
Adaptive short-time Fourier transform(적응 단시간 푸리에 변환)

## ABSTRACT

Although time-frequency analysis is useful for dispersive wave analysis, conventional methods such as the short-time Fourier transform do not take the dispersion phenomenon into consideration in the tiling of the time-frequency domain. The objective of this paper is to develop an adaptive time-frequency analysis method whose time-frequency tiling is determined with the consideration of signal dispersion characteristics. To achieve the adaptive time-frequency tiling, each of time-frequency atoms is rotated in the time-frequency plane depending on the local wave dispersion. To carry out this adaptive time-frequency transform, dispersion characteristics hidden in a signal are first estimated by an iterative scheme. To examine the effectiveness of the proposed method, the flexural wave signals measured in a plate were analyzed.

## 1. 서론

유도 초음파(guided-wave)의 독특한 물리적 특성 중 하나는 파의 속도가 주파수에 따라 변화하는 분산(dispersion) 특성을 갖고 있다는 것이다.<sup>(1,2)</sup> 이와 같은 분산현상은 시간-주파수 해석(time-frequency analysis)을 통해 효과적으로 분석할 수 있는데, 지금까지는 주로 단시간 푸리에 변환(STFT)<sup>(3)</sup>과 연속 웨이블릿 변환(CWT)<sup>(4,5)</sup>이 사용되어 왔다. Fig. 1은 시간-주파수 영역에서의 격자구조(tiling)를 나타낸 것으로, 단시간 푸리에 변환(Fig. 1(a))의 격자구조는 시간-주파수 평면 내에서 일률적으로 고정되어 있기 때문에 시간에 따라 빠르게 변화하는 주파수 성분을 갖는 파의 해석에는 적절하지 않을 수 있다. 그에 비해서 연속 웨이블릿 변환(Fig. 1(b))에서는 주파수 성분에 따른 적응적인 격자구조를 갖기 때문에, 보다 정확한 분산 파의 해석이 가능하다.

비록 기존의 시간-주파수 해석기법들이 분산 파의 해석에 유용하긴 하지만<sup>(6-9)</sup>, 그들의 시간-주파수 격자구조는 신호의 분산현상을 고려하여 만들어진 것이 아니다. 즉, 분산파는 전형적으로 주파수 성분들이 시간에 따라 급격히 변화하는 신호이지만, 기존 해석 방법의 격자구조는 시간에 따른

신호의 시간-주파수 특성변화를 반영하지 않는다. 그러므로, 단시간 푸리에 변환이나 연속 웨이블릿 변환만으로는 분산파를 정확히 해석하는데 구조적 한계를 지니고 있다.

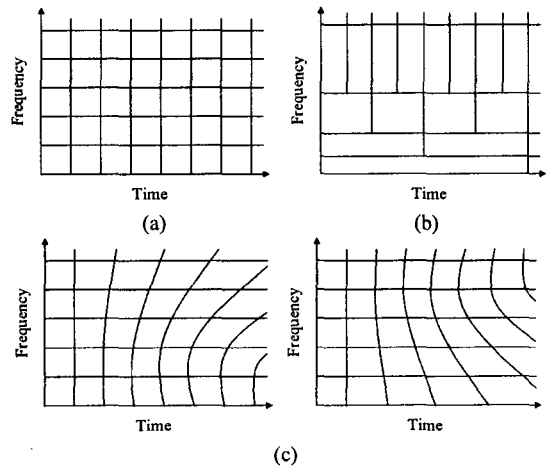


Figure 1. The comparison of the time-frequency tilings for  
(a) Short-time Fourier transform  
(b) continuous wavelet transform  
(c) adaptive short-time Fourier transform

따라서, 본 논문에서는 해석하고자 하는 신호의 분산특성에 적합한 시간-주파수 격자구조를 갖는 적응적인 시간-주파수 해석기법을 제안하고자 한다. Fig. 1(c)는 제안하는 방법의 시간-주파수 격자구조로써, 시간-주파수 박스(time-frequency box)가 국소적으로 파의 분산특성에 따라서 각각 적응적

\* 서울대학교 기계항공공학부 대학원

\*\* 서울대학교 기계항공공학부, 교수

E-mail : [yykim@snu.ac.kr](mailto:yykim@snu.ac.kr)

Tel : (02)880-7130, Fax : (02)872-5431

으로 회전하는 격자형태를 갖고 있다. 이러한 변환의 기본 개념이 문헌<sup>(10,11)</sup>을 통해 보고된 바 있지만, 현재까지 상세한 이론적 배경과 함께 실제 분산파의 해석에 적용된 예는 없었다.

따라서, 본 논문에서는 제안하는 방법의 이론적 배경과 파의 정확한 분산관계를 결정하기 위한 알고리즘을 제시한다. 수치 예제와 평판에서의 굽힘파(flexural wave)를 이용한 실험적 검증을 통해 제안된 시간-주파수 해석 기법의 효용성을 확인하였다.

## 2. 이론적 배경

### 2.1 적응 단시간 푸리에 변환(Adaptive STFT)

적응 단시간 푸리에 변환은 기본적으로 단시간 푸리에 변환(STFT)에 기초한다. 해석하고자 하는 신호  $f(t)$ 에 대해서 STFT는,

$$Sf(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_{(s,u,\xi)}^*(t)dt \quad (1a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\xi t}$$

$$g_{(s,u,\xi)}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) e^{i\xi t} \quad (1b)$$

로 표시된다.<sup>(3)</sup> 여기서,  $g(t) = \pi^{-1/4} e^{-t^2/2}$ 는 가우시안 창(Gaussian window)을 나타내고 변수  $s$ 는 가우시안 창의 시간폭을 조정한다. STFT는 그 기저함수  $g_{(s,u,\xi)}(t)$ 가 시간-주파수 평면에서의 위치  $(u, \xi)$ 에 관계없이 동일한 창의 크기를 갖기 때문에, 전 영역에 걸쳐서 동일한 분해능을 갖는다.

이에 반해서 적응 단시간 푸리에 변환(A-STFT)에서는 일반적인 STFT와 달리 새로운 변수  $d$ 를 포함하는 기저함수가 사용된다.

$$Df(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_{(s,u,\xi,d)}^*(t)dt \quad (2a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) * (-id)^{-1/2} e^{i(t^2/2d)} \right] e^{i\xi t}$$

$$g_{(s,u,\xi,d)}(t) = \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} g\left(\frac{t-u}{s}\right) * (-id)^{-1/2} e^{i(t^2/2d)} \right] e^{i\xi t} \quad (2b)$$

식 (2b)에서 (\*)은 합성곱(convolution)을 의미한다. 여기서, 변수  $d$ 값은 다음과 같이 정의되는데 임의의 위치  $(u, \xi)$ 에서 시간-주파수 박스의 회전량을 결정한다.

$$d = d(u, \xi) = \frac{\Delta u}{\Delta \xi} \quad (3)$$

식 (2b)의 물리적 의미는 주파수 영역에서 보다 분명하게 파악할 수 있는데, 주파수 영역에서 식

(2b)는 다음과 같이 표현된다.

$$G_{(u,s,\xi,d)}(\omega) = \sqrt{s}G[s(\omega-\xi)]e^{-iu(\omega-\xi)} \cdot e^{-i\frac{d}{2}(\omega-\xi)^2} \quad (4)$$

$$= \sqrt{s}G[s(\omega-\xi)]e^{-i\left[u(\omega-\xi) + \frac{d}{2}(\omega-\xi)^2\right]}$$

여기서,  $G(\omega)$ 는 가우시안 창  $g(t)$ 의 푸리에 변환이다. 이때, 식 (4)로 표현된 기저함수의 군지연(group-delay)  $\tau(\omega)$ 는 시간-주파수 평면에서

$$\tau(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[ u(\omega-\xi) + \frac{d}{2}(\omega-\xi)^2 \right] = u + d(\omega-\xi) \quad (5)$$

로 주어진다. 이는 A-STFT의 시간-주파수 박스는 변수  $d(u, \xi)$ 에 의해 일반적인 STFT의 시간-주파수 박스를 회전시킴으로써 얻어진다는 것을 의미한다.

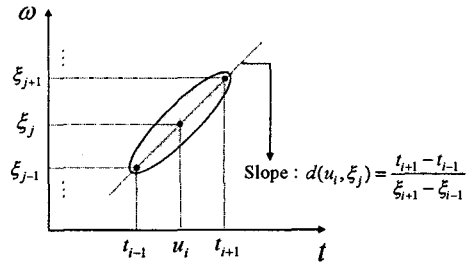


Figure 2. The determination of the rotating parameter  $d(u, \xi_j)$  by the dispersion relation.

A-STFT를 구현하기 위해서는 임의의 시간-주파수 위치에서 주어진 분산관계에 따른 회전변수  $d(u, \xi)$ 값을 결정해 주어야 하는데, 그 세부 과정을 Fig. 2에 도시하였다. 우선 특정 위치  $(u, \xi)$ 에서의 회전량  $d(u, \xi)$ 를 결정하기 위해서 균일하게 이산화된 시간-주파수 평면  $(u_i, \xi_j)$  ( $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n$ )를 고려하였다. 이때, 해석하고자 하는 파의 군속도(group velocity)를  $C_g(\omega)$ 라고 하면, 파의  $\xi_j$ 에 해당하는 주파수 성분이 특정시간  $t=u_i$ 에서 측정된다고 할 때, 그 성분의 이동거리는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$D = C_g(\xi_j) \cdot u_i \quad (6)$$

이때, 파의 인접한 주파수 성분의 도착 시간은

$$t_{i-1} = \frac{D}{C_g(\xi_{j-1})}, \quad t_{i+1} = \frac{D}{C_g(\xi_{j+1})} \quad (7)$$

으로 표현된다. 따라서, 식 (3)과 (7)을 이용하게 되면 임의의 위치  $(u_i, \xi_j)$ 에서의 회전변수  $d(u, \xi_j)$ 를 식(8)과 같이 계산할 수 있다.

$$d(u_i, \xi_j) = \frac{\Delta t}{\Delta \omega} = \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{\xi_{j+1} - \xi_{j-1}} = \left( \frac{D}{C_g(\xi_{j+1})} - \frac{D}{C_g(\xi_{j-1})} \right) \quad (8)$$

식 (8)의 회전변수  $d(u_i, \xi_j)$ 는 시간-주파수 평면에서 특정위치  $(u_i, \xi_j)$ 에서의 국부적인 분산과 연관되어 있기 때문에, 전체평면을 고려하게 되면 Fig. 1(c)와 같이 전체 분산관계를 표현하는 격자구조를 구성하게 된다. Fig. 3은 고정된 임의의 주파수에 대해, 특정 시간대에서의 STFT의 기저함수와 A-STFT의 기저함수를 개념적으로 비교하고 있다. 제안하는 변환의 기저함수는 시간의 경과함에 따라 분산하는 특징을 갖기 때문에, 분석하고자 하는 분산파의 해석에 보다 적합하게 된다.

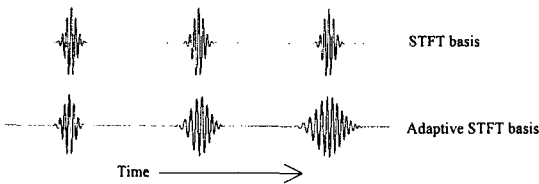


Figure 3. The basis function of STFT and Adaptive STFT

## 2.2 적응 단시간 푸리에 변환을 이용한 분산관계 추정

회전변수  $d$  값을 결정하기 위해서는 임의의 웨이브가이드에서 전파되는 파의 분산관계 혹은 군속도를 미리 알고 있어야 한다. 하지만, 대부분의 실제 문제에 있어서 매질내의 분산관계는 알려져 있지 않다. 따라서, 본 절에서는 실험적으로 파의 정확한 분산관계를 추정하기 위한 과정을 제안한다.

분산관계 추정을 위해 먼저 STFT를 이용하여 분산관계를 근사적으로 추정한다. 다음, 추정된 관계를 A-STFT에 반복적으로 적용하여 최종적으로 분산관계를 결정한다. 최초의 개략적인 분산관계를 추정하기 위해 STFT를 수행하고, 변환 결과로부터 능선(ridge) 해석을 통해 추출된 파의 전파 시간 및 이미 알고 있는 이동거리를 이용하여 분산관계를 추정한다. 일반적으로 STFT에서 시간-주파수 에너지 국소성은 기저함수의 창 크기인  $s$  값에 크게 의존하기 때문에 최적의 창 크기  $s_{op}$  값을 결정하는 것이 중요하다.<sup>(9)</sup> 여기서는  $s_{op}$  값의 결정을 위해 시간-주파수 평면에서 에너지 집중도를 측정하는 엔트로피(entropy)<sup>(12)</sup>에 기반한 기법<sup>(9)</sup>을 이용하였다. 그 다음 단계로 STFT에 의해 초기 추정된 분산관계를 이용하여 A-STFT를 반복적으로 수행한다. 이때 적응 A-STFT는 추

출된 분산관계 즉 군속도  $C_g(\omega)$ 가 다음의 수렴조건을 만족시킬 때까지 반복적으로 수행된다.

$$R(j) = \frac{\sum_i |C_g(\omega_i)_{j+1} - C_g(\omega_i)_j|}{\sum_i |C_g(\omega_i)_j|} < \varepsilon \quad (9)$$

$\omega_i$ 는 샘플링된 주파수를,  $j$ 는 반복 횟수를 나타내며,  $\varepsilon$ 는 미리 지정된 오차한계를 의미한다.

결국 최종적으로 수렴한 군속도  $C_g(\omega)$ 을 이용하여 A-STFT를 수행할 경우, 파의 분산 거동을 정확하게 파악할 수 있다. 보다 상세한 내용은 수치예제를 통해 논의될 것이다. 여기서 중요한 점은 이러한 추정기법을 이용하면 분산관계가 알려지지 않은 임의의 웨이브가이드에서도 정확한 분산관계의 추정이 가능하다는 점이다.

## 3. 수치적 결과

분산관계 추정을 위해 제안된 방법의 타당성을 검증하기 위해 수치적 시뮬레이션을 수행하였다. Fig. 4는 봉에서의 수치적인 종파(longitudinal wave) 신호로서<sup>(13,14)</sup>, 중심 주파수가 150 kHz인 각각 1m 및 3m를 이동한 두 개의 펄스로 구성되어 있다.

분산관계를 추정하기 위한 첫 단계로 Fig. 4의 신호에 대해 STFT를 수행하였고, 엔트로피에 근거하여 최적의 창 크기  $s_{op}$ 를 계산하였다.

( $s_{op} = 24 \cdot \Delta t$ ,  $\Delta t = 2 \times 10^{-7}$  sec: 샘플링 시간) Fig. 5는 최적의 창 크기를 갖는 STFT에 의해 얻어진 신호의 변환 결과이다. Fig. 5에서 계산된 STFT로부터 능선 해석을 통해 파의 도달시간  $\tau(\omega)$ 를 추출하면, 다음의 식으로부터 군속도  $C_g(\omega)$ 를 추정할 수 있다.

$$C_g(\omega) = \frac{D_{pulse2} - D_{pulse1}}{\tau_{pulse2}(\omega) - \tau_{pulse1}(\omega)} \quad (10)$$

여기서,  $D$ 는 펄스의 이동거리를 나타낸다.

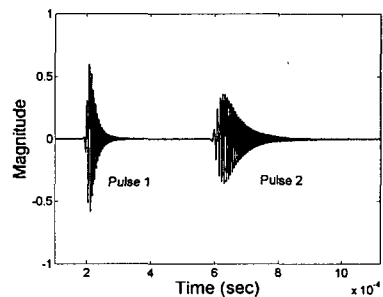


Figure 4. The simulated pulse signal

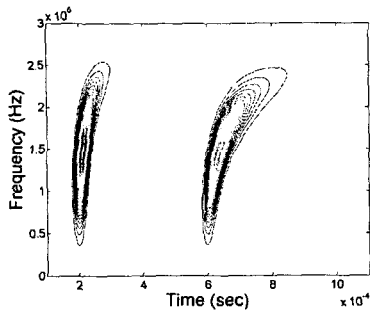


Figure 5. STFT of the simulated pulse signal

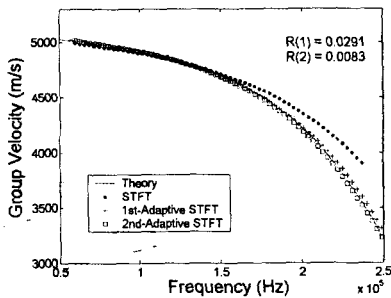


Figure 6. The estimation of the group velocity

다음 단계로 식 (10)으로부터 계산된 군속도 값을 이용하여 식 (9)에 의해  $\epsilon = 0.01$  인 수렴기준을 만족시킬 때까지 반복적으로 A-STFT 를 수행하면, 최종적으로 Fig. 6 과 같은 정확한 군속도를 계산할 수 있다. Fig. 6 로부터 알 수 있듯이, 적응 STFT 의 반복횟수가 증가함에 따라 실제의 분산 곡선에 정확하게 수렴해간다. 최종적으로 얻어진 군속도에 의한 A-STFT 의 결과를 Fig. 7 에 도시하였는데, Fig. 5 의 결과에 비해 시간-주파수 평면 내에서 매우 높은 해상도를 갖고 파의 분산 거동을 정확하게 기술하고 있음을 확인할 수 있다.

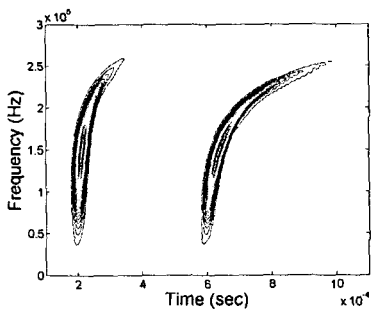


Figure 7. A-STFT of the simulated pulse signal

본 연구에서 제안한 A-STFT 에서는 시간-주파수 격자구조가 파의 분산특성에 따라 결정되기 때문에, 기존의 STFT 나 CWT 등의 해석 방법에 비해

시간 - 주파수 평면에서의 국소화가 이루어지며 따라서 높은 분해능을 가지게 된다.

#### 4. 실험 결과

본 절에서는 평판에서의 유도초음파 중 굽힘파 (flexural wave)의 첫 번째 모드인 A0 모드<sup>(13,14)</sup>에 대해 제안된 기법을 이용하여 실험적으로 파의 분산관계를 추정해 보고자 한다. Fig. 8 은 평판에서 굽힘파를 측정하기 위한 실험장치로서, 굽힘파는 두께가 3 mm 인 단순 지지된 알루미늄 평판에 강철공을 A 위치에 낙하하여 발생시켰다. 발생한 굽힘파는 B 위치에서 평판형 자기변형 트랜스듀서<sup>(15)</sup>를 이용하여 2.5 MHz 의 샘플링 주파수로 측정하였다.

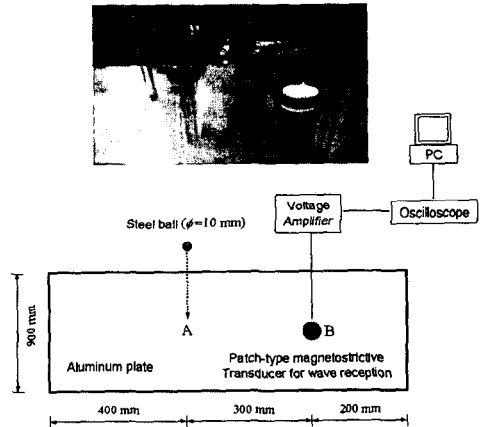


Figure 8. The experimental setup for the generation and measurement of the flexural wave in a plate

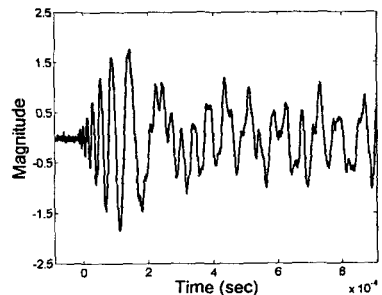


Figure 9. The measured flexural wave signal

측정된 굽힘파 신호를 Fig. 9 에 도시하였으며, 최적의 창 크기를 적용한 STFT 에 의해 변환된 결과는 Fig. 10 과 같다. Fig. 10 로부터 입사되는 파와 평판의 양 끝단에서 연속적으로 반사되는 파를 확인할 수 있는데, 초기 군속도를 추정하기 위해 이

중 최초 두 개의 능선(ridge)을 이용하였다.  $\epsilon = 0.01$  를 갖는 식 (9)의 수렴기준으로부터 추정된 분산관계를 Fig. 11에 도시하였으며, Fig. 12에서 최종 수렴한 군속도를 이용한 A-STFT의 변환결과를 나타내었다. Fig. 10와 Fig. 12의 비교를 통해서 확인할 수 있는 것처럼 A-STFT를 이용할 경우 높은 시간-주파수 해상도 때문에 연속적인 파의 분산 거동이 명확하게 구분된다.

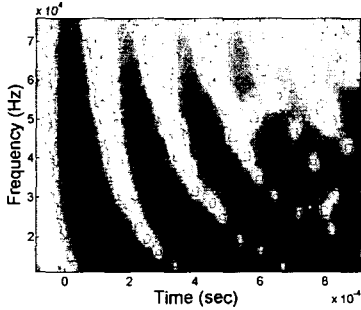


Figure 10. STFT of the measured flexural wave signal

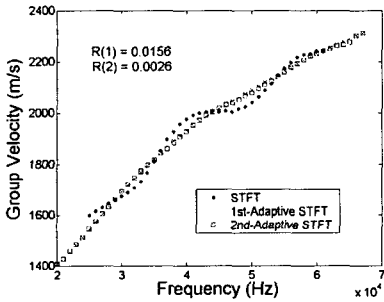


Figure 11. The estimation of the dispersion relation

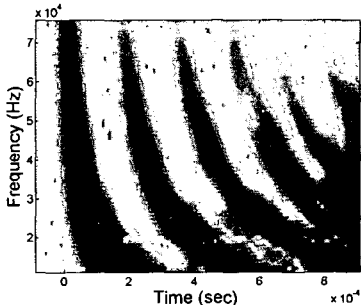


Figure 12. A-STFT of the measured flexural wave signal

## 5. 결론

본 연구에서는 분산 특성과 관련된 시간-주파수 격자구조를 갖는 적응 단시간 푸리에 변환을 분산 파의 해석에 적용하였다. 또한, 이 변환을 수행하

기 위해 정확한 분산관계 추정을 위한 알고리즘을 개발하였다. 적응 단시간 푸리에 변환(A-STFT)에서는 시간-주파수 격자구조가 파의 분산관계에 따라 적응적으로 결정되기 때문에, 기존의 방법에 비해 높은 분해능을 가질 수 있음을 확인하였다. 실제 A-STFT를 분산현상이 있는 신호, 즉 유도초음파 신호에 적용하여 제안된 A-STFT 방법의 효율성을 검증하였다.

## 참고문헌

- (1) P. Cawley and D. Alleyne, 1996, "The use of Lamb waves for the long range inspection of large structures," *Ultrasonics*, **34**, 287-290.
- (2) T. Ghosh, T. Kundu, and P. Karpur, 1998, "Efficient use of Lamb modes for detecting defects in large plates," *Ultrasonics*, **36**, 791-801.
- (3) D. Gabor, 1946, "Theory of communication," *J. IEE*, **93**, 429-457.
- (4) Daubechies, 1992, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia.
- (5) S. Mallat, 1998, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic, New York.
- (6) Y. Y. Kim and E. H. Kim, 2001, "Effectiveness of the continuous wavelet transform in the analysis of some dispersive elastic waves," *J. Acoust. Soc. Am.*, **110**, 86-94.
- (7) H. Jeong and Y.-S. Jang, 2002, "Fracture source location in thin plates using the wavelet transform of dispersive waves," *IEEE Trans. Ultra., Ferro., Freq. Contr.*, **47**, 612-619.
- (8) M. Niethammer, L. J. Jacobs, J. Qu, and J. Jarzynski, 2001, "Time-frequency representations of Lamb waves," *J. Acoust. Soc. Am.*, **109**, 1841-1847.
- (9) J.-C. Hong and Y. Y. Kim, 2004, "The determination of the optimal Gabor wavelet shape for the best time-frequency localization using the entropy concept," *Exp. Mech.*, **44**, 387-395.
- (10) S. Mann and S. Haykin, 1995, "The chirplet transform: physical considerations," *IEEE Trans. Signal Process.*, **43**, 2745-2761.
- (11) R. G. Baraniuk and D. L. Jones, 1996, "Wigner-based formulation of the chirplet transform," *IEEE Trans. Signal Process.*, **44**, 3129-3135.
- (12) C. Shannon, 1948, "A mathematical theory of communication," *Bell Syst. Tech. J.*, **27**, 379-656.
- (13) J. Miklowitz, 1978, *Elastic Waves and Waveguides*, North-Holland, New York.
- (14) K. F. Graff, 1999, *Wave Motion in Elastic Solids* Ohio-State Univ. Press.
- (15) Y. Y. Kim, S. H. Cho, K. H. Sun, J. S. Lee, 2004, "Orientation-adjustable patch-type magnetostrictive ultrasonic transducer for plates", *Proceedings of the 5<sup>th</sup> European Magnetic Sensors and Actuators Conference*, T-O.6