

Dynamic Elastica에 의한 유연매체의 거동해석 Analysis of Flexible Media Behavior by Dynamic Elastica

홍성권* · 지중근** · 장용훈*** · 박노철**** · 박영필*****

Sung-Kwon Hong, Jung-Geun Jee, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park and Young-Pil Park

Key Words : Deformation Potential, Parametric Cubic Curve, FDM(Finite Difference Method), Stick, Forward Slip, Backward Slip, Separation.

ABSTRACT

In many machines handling lightweight and flexible media, such as magnetic tape drives, xerographic copiers and sewing machines, the media must transit an open space. It is important to predict the static and dynamic behavior of the sheets with a high degree of reliability. The nonlinear theory of the dynamic elastica has often been used to a nonlinear dynamic deflection model. In this paper, the governing equation is derived and simulated by the finite differential method. The parametric cubic curve is applied for defining the guide shape. The dynamic contact conditions suggested by Klarbring is used to predict the direction of the flexible media according to the initial velocity and the friction coefficient. The analysis is also compared to the conventional model, showing that after contacting a 45° wall, the directions of flexible media of two models are different.

1. 서 론

복사기, 팩시밀리, 프린터, 카메라, ATM등에는 매체 전송 시스템이 적용된다. 이러한 기기들의 소형화, 고속화에 따라서 매체의 정확한 거동해석이 필요하고 최적의 설계조건을 찾는 것이 피딩 시스템 설계에 있어 중요한 인자가 되고 있다. 기존의 거동해석 방법으로는 매체를 스프링-메스-빔으로 이산화하여 정·동적 거동을 해석하거나[1] Dynamic Elastica 이론을 적용하여 유연매체의 거동을 해석하고 있다.[2] 본 논문에서는 유연매체가 좁은 채널로부터 빠져나와 가이드와 충돌이 발생하는 경우 Dynamic

Elastica 이론을 통하여 시뮬레이션 해보고자 한다. 매체가 가이드와 충돌 시 Klarbring 모델[8]을 적용하여 매체가 가이드와 접촉이 발생할 경우 매체의 정확한 거동을 예측할 수 있는 방법을 제시한다.

2. sheet의 모델링

2.1 Dynamic Elastica

2.1.1 지배방정식

Fig. 2.1은 유연매체가 채널로부터 빠져 나올 때의 형상을 나타낸 그림이다. g 는 중력가속도를 나타내고 f_x, f_y 는 질점에 작용하는 관성력이다. F_N, F_T 는 매체가 가이드와 충돌할 때 가이드에서 받는 수직방향과 접선방향의 반력을 나타내고, α 는 채널 출구의 각도를 나타낸다. ϕ 는 매체질점이 x 축과 이루는 각도이다.

Nonlinear Elastica 이론[4]을 이용하여 매체를 평판이라 가정하고 굽힘 강성 D 를 정의하여 지배방정식을 세우면 식 (2.1.1) 과 같다.

* 연세대학교 기계공학과
E-mail : h11010@yonsei.ac.kr
Tel: (02)2123-4677, Fax: (02)353-8460

** 연세대학교 기계공학과

*** 연세대학교 기계공학부 조교수

**** 연세대학교 정보저장기기협동과정 조교수

***** 연세대학교 기계공학부 정교수

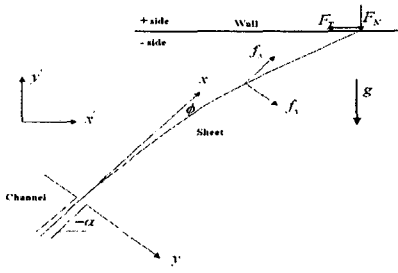


Fig. 2.1 Geometry

$$\begin{aligned}
 D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} &= mg(L-s)(\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) \\
 &- m \int_s^L \ddot{x} \sin \phi d\bar{s} + m \int_s^L \ddot{y} \cos \phi d\bar{s} \\
 &+ \sin \phi \int_s^L \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} \delta(\bar{s} - s_K) d\bar{s} \\
 &- \cos \phi \int_s^L \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} \delta(\bar{s} - s_K) d\bar{s}
 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

변형 포텐셜(Deformation potential)을 정의하면[5] 식 (2.1.2), (2.1.3)과 같다.

$$u = \int_s^L x d\bar{s} \quad (2.1.2)$$

$$v = \int_s^L y d\bar{s} \quad (2.1.3)$$

식 (2.1.2), (2.1.3)을 시간에 관하여 두 번 미분하면 식 (2.1.4), (2.1.5)와 같이 된다.

$$\ddot{u} = \int_s^L \ddot{x} d\bar{s} \quad (2.1.4)$$

$$\ddot{v} = \int_s^L \ddot{y} d\bar{s} \quad (2.1.5)$$

(2.1.4), (2.1.5)식을 (2.1.1)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} &= -m \ddot{u} \sin \phi + m \ddot{v} \cos \phi \\
 &+ mg(L-s)(\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) \\
 &+ \sin \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} H(\bar{s} - s_K) \\
 &- \cos \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} H(\bar{s} - s_K)
 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

식 (2.1.6)에서 H 는 Heaviside function[6]을 나타낸다.

$$H(s - s_K) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < s_K \\ \frac{1}{2} & \text{if } s = s_K \\ 1 & \text{if } s > s_K \end{cases}$$

채널 밖에서의 매체의 절점의 위치를 s 에 관하여 두 번 편미분 하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = -\cos \phi \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = -\sin \phi \quad (2.1.8)$$

식 (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8)의 2차 편미분 방정식의 해는 각각의 시간에 대한 매체의 변형형을 결정할 수 있다. 미분 방정식의 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi(c) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial s}(c) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial s}(c) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(L) = K_0 \quad u(L) = 0 \quad v(L) = 0$$

K_0 는 매체의 곡률을 나타낸다.

2.1.2 가이드의 형상

Fig. 2.2 는 매체의 변형 형상과 가이드의 형상을 나타낸다. 이 가이드의 형상을 정의하는 과정과 가이드와 매체내의 절점 사이의 거리를 구하는 과정은 Mortenson[7] 에 의하여 알려져 있다.

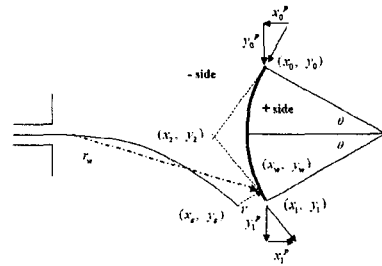


Fig. 2.2 매체와 가이드의 형상

(x_0, y_0) , (x_1, y_1) 는 가이드의 시작점과 끝점을 나타내고, 이 가이드의 형상은 파라메트릭 큐빅 커브(parametric cubic curve)로 정의된다. 이 커브에 대한 2차원에서의 파라미터 식은 (2.1.9)과 같다.

$$x(p) = a_{3x}p^3 + a_{2x}p^2 + a_{1x}p + a_{0x} \quad (2.1.9)$$

$$y(p) = a_{3y}p^3 + a_{2y}p^2 + a_{1y}p + a_{0y}$$

위 식에서 p 는 가이드의 시작점에서 0, 끝점에서 1이 된다. (x_2, y_2) 는 시작점과 끝점에서의 접선벡터의 교차점을 나타낸다. 시작점과 끝점의 접선좌표는 (x_0^p, y_0^p) , (x_1^p, y_1^p) 로 표현되고, 이것들은 (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 와 식 (2.1.10)의 관계가 있다.

$$\begin{aligned}
 x_0^p &= 4\rho(x_2 - x_0) & y_0^p &= 4\rho(y_2 - y_0) \\
 x_1^p &= 4\rho(x_1 - x_2) & y_1^p &= 4\rho(y_1 - y_2)
 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

식 (2.1.10)에서 ρ 는 다음 식으로 정의되고 그것에 의하여 커브의 타입이 결정된다.

$$\rho = \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$\rho < 0.5$: 타원형 곡선
 $\rho = 0.5$: 포물선
 $0.5 < \rho \leq 1$: 쌍곡선

(2.1.9)식에서의 계수들을 구하여 정리하면

$$\begin{aligned} a_{0x} &= x_0 \\ a_{1x} &= x_0^p \\ a_{2x} &= -3x_0 + 3x_1 - 2x_0^p - x_1^p \\ a_{3x} &= 2x_0 - 2x_1 + x_0^p + x_1^p \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

$y(p)$ 의 계수도 동일한 방법으로 구해진다.

p 에 관한 미분방정식은 커브의 접선을 나타낸다.

$$\begin{aligned} x^p &= \frac{dx}{dp} = 3a_{3x}p^2 + 2a_{2x}p + a_{1x} \\ y^p &= \frac{dy}{dp} = 3a_{3y}p^2 + 2a_{2y}p + a_{1y} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

매체의 절점과 가이드의 수직거리를 계산하는 순서는 다음과 같다. 우선 매체의 절점과 가장 가까운 가이드의 절점을 찾는다. 가이드의 가장 가까운 절점과 매체위의 점을 연결한 선은 가이드와 수직이 될 것이다. 만약 (x_s, y_s) 가 매체내의 한 절점을 표현하고 가이드의 절점을 (x_w, y_w) 로 나타낸다면 벡터 r 은 매체의 절점과 가이드의 미지 절점 사이의 거리로 정의된다.

가이드에서 가장 짧은 거리를 찾기 위해서는 벡터 r 과 그것의 p 에 관한 미분인 식(2.1.12)의 내적의 값이 0이 됨을 이용한다. 이것을 p 에 관하여 정리하면 5차식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} &3(s_{3x}^2 + a_{3y}^2)p^5 + 5(a_{3x}a_{2x} + a_{3y}a_{2y})p^4 + \\ &2(2a_{3x}a_{1x} + 2a_{3y}a_{1y} + a_{2x}^2 + a_{2y}^2)p^3 \\ &+ 3(a_{3x}(a_{0x} - x_s) + a_{3y}(a_{0y} - y_s) \\ &+ a_{2x}a_{1x} + a_{2y}a_{1y})p^2 + \\ &(2a_{2x}(a_{0x} - x_s) + 2a_{2y}(a_{0y} - y_s) + a_{1x}^2 + a_{1y}^2)p \\ &+ a_{1x}(a_{0x} - x_s) + a_{1y}(a_{0y} - y_s) = 0 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

만약 선형 가이드라고 간주하면 (2.1.9)식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} x(p) &= (x_1 - x_0)p + x_0 \\ y(p) &= (y_1 - y_0)p + y_0 \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

그리고 식 (2.1.14)를 만족하는 p 의 값은 다음과 같다.

$$p = \frac{(x_1 - x_0)(x_s - x_0) + (y_1 - y_0)(y_s - y_0)}{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (2.1.15)$$

이때 2개의 벡터가 정의된다. 하나는 매체와 가장 가까운 가이드 위의 한 점과 원점과의 거리를 나타내는 $r_w = (x_w, y_w)$ 이고 또 다른 하나는 매체의 절점과 가이드의 절점 사이를 나타내는 $r = (x_w - x_s, y_w - y_s)$ 이다. 만약 내적 $r \cdot r_w$ 이 0 보다 작다면 매체는 가이드를 침투하게 되고 침투한 절점에 따른 반력이 반복적으로 구해지게 된다. 수직력과 그것에 대응하는 마찰력이 더해져서 새로운 변형형상이 만들어진다.

2.1.3. 유한차분 모델

지배방정식을 유한 차분한 결과는 다음의 식과 같다.

$$\begin{aligned} u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} - \Delta s^2 \phi_{i,j}^* \sin \phi_{i,j}^* \\ = \Delta s^2 (-\cos \phi_{i,j}^* - \phi_{i,j}^* \sin \phi_{i,j}^*) \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

$$\begin{aligned} v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j} - \Delta s^2 \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^* \\ = \Delta s^2 (-\sin \phi_{i,j}^* + \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^*) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$$\begin{aligned} \phi_{i-1,j} - \frac{\Delta s^2}{D} mg(L-s) (\sin \alpha \cos \phi_{i,j}^* \\ + \cos \alpha \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} - 2\phi_{i,j} \\ + \frac{\Delta s^2}{D} m(\ddot{u}^* \cos \phi_{i,j}^* + \ddot{v}^* \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} \\ + \phi_{i,j} + \frac{\Delta s^2}{D \Delta t^2} m(\sin \phi_{i,j}^* u_{i,j} - \cos \phi_{i,j}^* v_{i,j}) \\ = \frac{\Delta s^2}{D} mg(L-s) (\sin \alpha (\sin \phi_{i,j}^* - \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^*) \\ - \cos \alpha (\cos \phi_{i,j}^* + \phi_{i,j}^* \sin \phi_{i,j}^*)) \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

$$\begin{aligned} + \frac{\Delta s^2}{D} m(\ddot{u}^* \cos \phi_{i,j}^* + \ddot{v}^* \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} + \\ + \frac{\Delta s^2}{D \Delta t^2} m[(2u_{i,j-1} - u_{i,j-2}) \sin \phi_{i,j}^* \\ - (2v_{i,j-1} - v_{i,j-2}) \cos \phi_{i,j}^*] \end{aligned}$$

식 (2.1.16), (2.1.17), (2.1.18)을 다음과 같이 행렬 형태로 정리한다.

$$Az = b \quad (2.1.19)$$

2.2 Klarbring 모델

본 논문에서 적용한 Klarbring 모델은 Fig. 2.3에 나타내었다. 강체 M 이 일반화된 스프링에 의해서

지지되고 있으며, x 방향과 y 방향의 변위를 각각 u_1, u_2 로 나타내었고, 접촉면에서의 마찰계수를 f , x 방향과 y 방향의 반력을 각각 R_1, R_2 로 나타내었다.

x 방향과 y 방향의 외력인 F_1 과 F_2 를 시간에 따라서 단조 증가하도록 $F_1 = C_1 t, F_2 = C_2 t$ 로 설정하였다. 그림 2.3에 대한 지배방정식은 식 2.2.1과 같다.

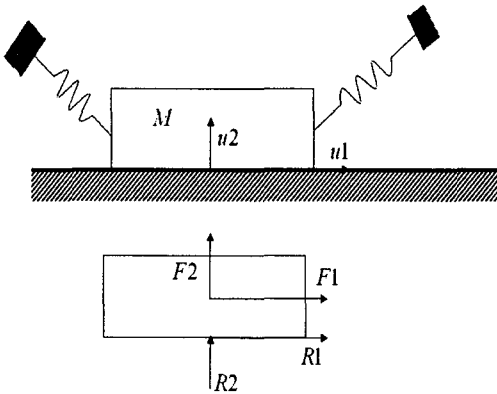


Fig. 2.3 Klarbring 모델

$$\begin{aligned} C_1 t + R_1 - k_{11} u_1 - k_{12} u_2 &= M \ddot{u}_1 \\ C_2 + R_2 - k_{21} u_1 - k_{22} u_2 &= M \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

4가지 접촉 현상에 따라 위의 지배방정식은 변형된다. 우선 Stick일 경우는 조건은 위 식에서 $u_2 = 0, \dot{u}_1 = \ddot{u}_1 = \dot{u}_2 = \ddot{u}_2 = 0$ 이며 다음과 같은 조건을 얻는다.

$$C_2 < 0 \quad |C_1| < -f C_2$$

Forward slip일 경우는 $u_2 = \dot{u}_2 = \ddot{u}_2 = 0$ 가 되며 그에 따른 조건인 $\dot{u}_1 > 0, R_2 > 0$ 를 만족하기 위한 조건은 식 (2.2.2)와 같다.

$$-C_1 < f C_2 < 0 \quad (2.2.2)$$

Backward slip의 경우 forward slip에서 마찰력을 반대로 고려하여 정리하면 조건은 식 (2.2.3)와 같다.

$$C_1 < f C_2 < 0 \quad (2.2.3)$$

Separation의 경우 반력 R_1, R_2 는 0이 되며, $u_2 > 0$ 를 만족하여야 하므로 다음의 조건식을 얻는다.

$$C_2 > 0 \quad (2.2.4)$$

각각 4가지의 접촉상태에 따른 조건식들을 도표로 나타내면 Fig. 2.4와 같다.

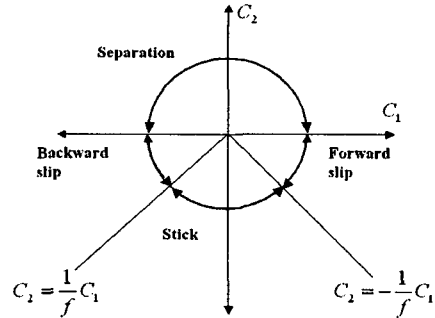


Fig. 2.4 Dynamic diagram

x 방향과 y 방향에 가해지는 힘과 마찰계수의 크기에 따라서 여러 가지의 접촉 현상이 나타나게 됨을 알 수 있다.

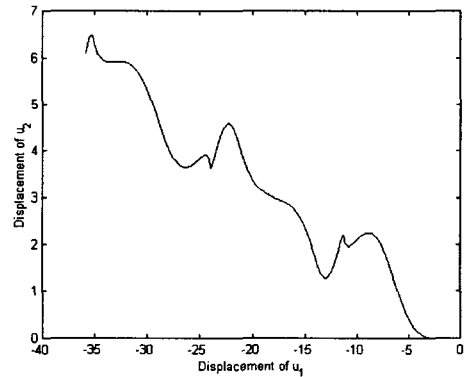


Fig. 2.5 Dynamic response from backward slip to separation

Fig. 2.5은 $M=1, k_{11}=k_{12}=k_{13}=1, k_{22}=2$ 인 시스템에 대해서 $C_1 = -1.0, C_2 = -0.8, f = 0.25$ 로 하여 30초까지 시뮬레이션한 그림으로 Fig. 2.4에서 예측한 것과 같이 초기에 backward slip 현상을 보이고 있다.

3. 시뮬레이션

2.1.3절에서 차분된 식을 가지고 여러 가지 조건들에 대해서 시뮬레이션을 수행하였다. 여기서 사용한 매체는 두께 0.11 mm, 탄성계수는 1.03 GPa, 굽힘강성 139 μNm , 길이는 216 mm인 종이이다.

Fig. 3.1 은 초기속도가 25mm/s 일 때 매체의 변형형상을 그리는 것이다.

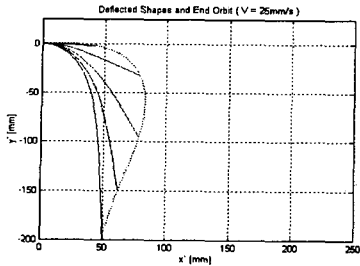


Fig. 3.1 초기속도가 250mm/s 일 때의 변형형상

Fig. 3.2 는 45° 의 각도가 있는 가이드에 초기속도를 달리 하여 시뮬레이션한 결과이다. 그림에서 알 수 있듯이 초기속도가 250mm/s 일 때는 매체가 아래방향으로 향하고 750mm/s 일 때는 가이드의 위로 향하는 것을 볼 수 있다.

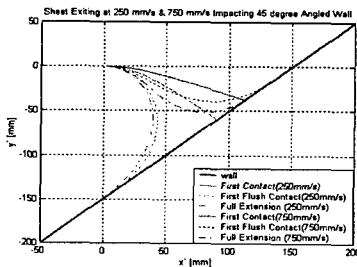


Fig. 3.2 초기속도에 따른 변형형상

Fig. 3.3 는 반지름이 100mm 인 원형 가이드에 매체가 접촉할 때를 시뮬레이션한 결과이다.

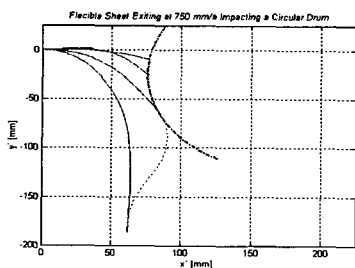


Fig. 3.3 매체가 원형가이드와 접촉할 때의 변형형상

4. 고찰

Dynamic Elastica 이론에 의하여 시뮬레이션 한 결과 매체가 가이드와 접촉시의 마찰력 방향이 Forward slip으로만 고려되어있기 때문에 매체가

앞으로 전진 하게 된다. Fig. 4.1은 직선 가이드가 45° 기울어진 경우 마찰계수를 0.0 부터 1.0 까지 변화시키고, 초기속도를 0 부터 1000mm/s 로 변화시켜 가면서 시뮬레이션 한 결과를 나타낸다. 여기서 (+)는 매체가 가이드와 충돌 후 위 방향으로 전진하는 것을 나타내고 (-)는 매체가 아래방향으로 전진하는 것을 나타낸다. 마찰계수를 주어졌을 때는 초기속도에 관계없이 모두 가이드를 타고 올라간 것을 볼 수 있다.

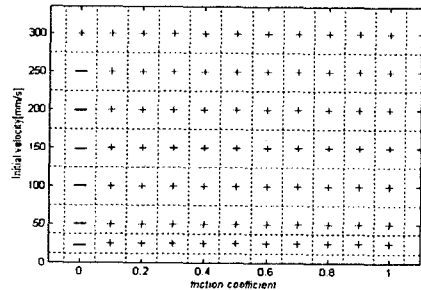


Fig. 4.1 속도, 마찰력 변화에 따른 매체의 진행방향

하지만 Klarbring 이론을 적용하면 접촉 시 끝단의 속도가 양이면 Forward slip, 음이면 Backward slip이 되며, backward slip 일 경우 마찰력이 앞쪽으로 작용하고, forward slip일 때는 마찰력이 뒤쪽으로 작용하게 된다. Klarbring 이론에 의하여 충돌 후의 매체의 진행방향을 예측해보면 Fig. 4.2와 같다.

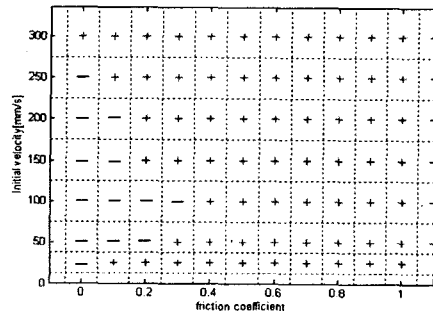


Fig. 4.2 Klarbring 이론을 적용 하였을 경우의 속도, 마찰력 변화에 따른 매체의 진행방향

Fig. 4.1, 4.2를 비교해보면 서로 다른 결과를 보이는 경우가 있다. 이것은 Dynamic Elastica에서는 정확한 접촉이론을 적용하지 않았기 때문이며, 진행속도 50

mm/s, 마찰계수 0.2인 경우에 대해서 결과를 비교해 보면 Fig. 4.3과 같다.

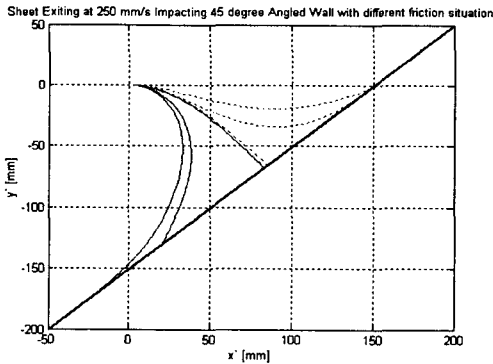


Fig. 4.3 Klarbring 모델을 적용 하였을 경우 시물레이션

그림을 보면 실선은 Klarbring 이론을 적용하여 마찰력의 방향을 결정해준 결과이며, 점선은 Dynamic Elastica 이론에 의해 얻어진 것이다. 그러므로 매체가 가이드와 충돌 시 정확한 거동해석을 위해서는 정확한 마찰이론을 적용하여야만 한다.

5. 결론

Dynamic Elastica이론을 적용하여 종이가 가이드에 충돌하는 경우에 대한 지배방정식을 유도해 보았고, 유연매체가 접촉하는 가이드를 파라메트릭 큐빅 커브로 정의하였다. 그리고 지배방정식을 유한 차분법을 이용한 시물레이션을 통해 매체의 거동을 예측해 보았다. 그 결과 가이드와의 접촉이 발생할 때 정확한 거동을 예측하기 위해서는 정확한 마찰이론을 적용해야 함을 확인 하였다.

후 기

본 연구는 산업자원부 부품소재 개발사업단의 “환류식 지폐 입출금 장치 개발”(10012150) 과제를 맡은 (주)노틸러스효성의 위탁과제인 “유연 매체의 거동 해석 및 제어”를 수행하면서 얻어진 결과이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Kazushi Yoshida. 1992, "The Analysis of Deformation and Behavior of Flexible Materials." JSME-section A. 58(552). pp 1474~1480.
- (2) J. Stolte, R. C Benson, 1992, "Dynamic Deflection of Paper Emerging from a Channel", Journal of Vibration and Acoustics. pp. 187~193.
- (3) H. Cho and J.R. Barber, 1998, "Dynamic Behavior and Stability of Simple Frictional Systems", Mathl. Comput. Modelling, Vol. 28, No. 4-8, pp. 37~53.
- (4) Frisch-Fay, R. 1962. "Flexible Bars", Butterworth and Co., Ltd., Washington
- (5) Mansfield, L. Simmonds, J.G, 1987, "The Reverse Spaghetti Problem : Drooping Motion of an Elastica Issuing from a Horizontal Guide.", Journal of Applied Mechanics. Vol. 54, pp 147~150.
- (6) Bender, C.M and Orszag, S.A, 1978, "Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers." McGraw-Hill, Inc.
- (7) Mortenson, M.E, 1985, "Geometry Modeling", John Wiley & Sons, Inc., New York
- (8) Anders Klarbring, 1984, "Contact Problems with Friction", Doctoral Dissertation, Linöping University, Sweden