

크랙과 이동질량을 가진 탄성지지 외팔보의 진동특성

Dynamic Behavior of Spring Supported Cantilever Beam with Crack and Moving Mass

안성진** · 손인수** · 윤한익*

Sung-Jin Ahn, In-Soo Son and Han-Ik Yoon

Key Words : Spring Supported(탄성지지), Moving Mass(이동질량), Open Crack(개구형 크랙) Flexibility Matrix(유연행렬)

ABSTRACT

In this paper, a dynamic behavior of spring supported cantilever beam with a crack and a moving mass is presented. Based on the Euler-Bernoulli beam theory, the equation of motion can be constructed by using the Lagrange's equation. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments i.e. the crack is modelled as a rotational spring. This flexibility matrix defines the relationship between the displacements and forces across the crack section and is derived by applying fundamental fracture mechanics theory. And the crack is assumed to be in the first mode of fracture. As the depth of the crack is increased, the tip displacement of the cantilever beam is increased.

1. 서 론

구조손상의 하나인 크랙은 발생과 성장과정을 거치면서 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시킨다. 따라서, 이동질량을 가진 외팔보에 크랙형태의 결함이 발생하게 되면 이동질량과 크랙의 연성관계에 의하여 외팔보의 동특성에 큰 영향을 미칠 것으로 생각된다. 크랙이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 초기에는 구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법이 시도되었고, 최근에는 유연행렬을 이용하여 크랙에 의해 부가되는 에너지를 고려하는 해석방법을 사용하고 있다.^(1,2) 최근 많은 연구자들은 보 형태 구조물의 동적특성에 미치는 크랙의 영향에 대하여 연구^(3,4)하고 있으며, Lee⁽⁵⁾는 오일러-베르누이 보 이론을 적용하여 탄성스프링으로 지지된 외팔보의 동적응답을 연구하였다.

이 연구에서는 교량이나 컨테이너 크레인과 같이 탄성지지를 받으며 이동질량을 가지는 외팔보 형태의 구조물에 크랙과 같은 결함을 갖는 경우를 고려하였다. 즉, 탄성스프링으로 지지된 위치와 이동질량의 및 크랙의 크기와 위치가 외팔보의 동적특성에 미치는 영향을 수치해석하였다. 외팔보의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며, 크랙은

개구형 크랙이라 가정하였다.

2. 시스템 모델링

Fig. 1 은 크랙과 일정한 속도로 이동하는 질량을 가지며, 보의 고정단으로부터 임의의 위치(s_k)에 병진탄성스프링에 의하여 지지된 외팔보를 나타내고 있다. 여기서 m_k 는 외팔보 위를 이동하는 이동질량, v 는 이동질량의 속도, 그리고 L 은 외팔보의 전체 길이를 나타낸다. 또, a_c , h , 그리고 $2b$ 는 각각 크랙의 깊이와 크랙이 존재하는 외팔보 단면의 지름, 그리고 크랙의 길이를 표현하고 있다. s_k 는 외팔보를 탄성지지하고 있는 스프링의 위치를, x_c 는 크랙이 존재하는 위치를 각각 나타내며, k ,는 스프링상수 값이다.

2.1 외팔보, 이동질량 및 탄성지지의 에너지

외팔보의 횡변위 $y(x, t)$ 는 이동질량이 없는 경우, 경계조건을 만족시키는 고유함수 $\phi_i(x)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \tag{1}$$

여기서 $q_i(t)$ 는 일반화 좌표, μ 는 일반화 좌표수이다. 크랙을 가진 탄성스프링으로 지지된 외팔보의 포텐셜 에너지

* 동의대학교 기계공학부
E-mail : hiyoon@deu.ac.kr
Tel : (051) 800-1645, Fax : (051) 800-2232

** 동의대학교 대학원 기계공학과

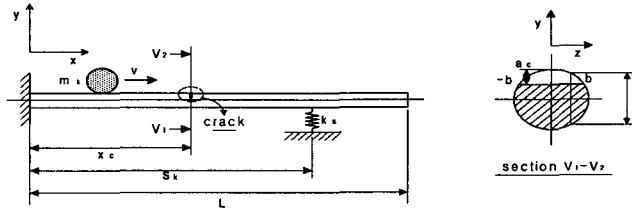


Fig. 1 Geometry of the cracked cantilever beam with the moving mass

지를 오일러-베르누이 보 이론을 적용하여 구하면 다음과 같다.

$$V_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[EI \int_0^{L_i} \{\phi_{ij}''(x) q_i(t)\}^2 dx \right] \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{2} K_R (\Delta y'_c)^2 + \frac{1}{2} k_s \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\phi_{ij}(s_k) q_i(t)]^2$$

여기서 K_R 은 크랙으로 인하여 부가되는 회전스프링 상수를 의미하며, j 는 크랙을 가진 외팔보의 분할구간의 수이다. 외팔보의 운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$T_c = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{L_i} \{\phi_{ij}(x) \dot{q}_i(t)\}^2 dx \quad (3)$$

여기서 m 은 외팔보의 단위길이당 질량이다. 또, 이동질량의 운동에너지는 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$T_m = \frac{1}{2} \left[m_k \sum_{i=1}^n \left\{ v^2 \sum_{j=1}^n q_i^2(t) \phi_{ij}^2[f_k(t)] \right. \right. \quad (4)$$

$$+ 2v \sum_{j=1}^n q_i(t) \dot{q}_i(t) \phi_{ij}[f_k(t)] \phi_{ij}'[f_k(t)]$$

$$\left. \left. + \sum_{j=1}^n \dot{q}_i^2(t) \phi_{ij}^2[f_k(t)] \right\} + v^2 m_k \right]$$

2.2 계의 운동방정식

계의 운동방정식은 Lagrange 방정식에 대입하여 구할 수 있으며, 구해진 계의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 매개변수를 정의하였다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_j^* = \frac{L_j}{L} \quad (j=1,2),$$

$$\xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad d = \frac{a_c}{L}, \quad \beta_k = \frac{m_k L}{m EI} \bar{v},$$

$$\tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \gamma_k = \frac{m_k L^3}{EI} \bar{v}^2,$$

$$M_k = \frac{m_k}{m L}, \quad S_k = \frac{s_k}{L}, \quad (5)$$

$$K_R^* = \frac{K_R L}{EI}, \quad K_S^* = \frac{k_s L^3}{EI}$$

여기서 \bar{v} 는 v/L 이다. 식 (5) 의 무차원 매개변수를 이용하여 계의 무차원화된 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^n \left[\left\{ \sum_{j=1}^n \int_0^{\xi_j} \phi_{ij}^2(\xi) d\xi + M_k \phi_{ij}^2(\bar{x}_k) \right\} \ddot{d}_i(\tau) \right. \quad (6)$$

$$+ \left\{ M_k \frac{d}{d\tau} [\phi_{ij}^2(\bar{x}_k)] \right\} \dot{d}_i(\tau)$$

$$+ \left\{ \sum_{j=1}^n \int_0^{\xi_j} [\phi_{ij}''(\xi)]^2 d\xi + \sum_{j=1}^n \left\{ \beta_k \frac{d}{d\tau} [\phi_{ij}'(\bar{x}_k)] \phi_{ij}(\bar{x}_k) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \gamma_k \{\phi_{ij}'(\bar{x}_k)\}^2 + \beta_k \frac{d}{d\tau} [\phi_{ij}(\bar{x}_k)] \phi_{ij}'(\bar{x}_k) \right\} \right.$$

$$+ K_R^* \{\phi_{ij}'(\xi_2=0) - \phi_{ij}'(\xi_1=\xi_c)\}^2$$

$$\left. + \sum_{j=1}^n K_S^* \phi_{ij}^2(S_k) \right\} d_i(\tau) \Big] = 0$$

여기서 (\cdot) 는 무차원화된 시간 τ 에 대한 미분을 나타내고, (\prime) 는 무차원 축방향 좌표인 ξ 에 대한 미분을 표현한 것이다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

이 연구에서는 이론해석에서 유도된 무차원 운동방정식을 이용하여 탄성지지원 스프링의 위치가 크랙과 이동질량을 가지는 외팔보의 진동특성에 미치는 영향을 수치해석을

통해 비교, 고찰하였다. 수치해석 예제에 사용한 외팔보의 파라미터는 Table 1에 나타내었다.

Table 1 Specifications of the cracked spring supported cantilever beam

Property	Data
Total length of beam (L)	1.0 (m)
Radius of beam (R)	0.04 (m)
Young's modulus (E)	2.0×10^{11} (N/m ²)
Density	7860 (kg/m ³)
Poisson ratio (ν)	0.3

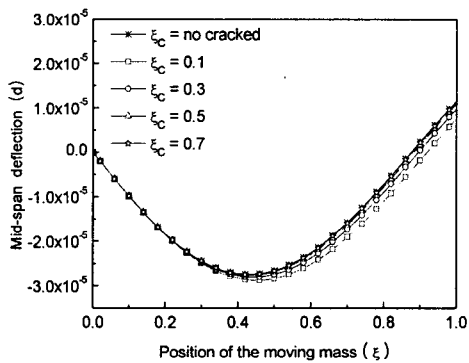


Fig. 2 Mid-span deflection of the cracked spring supported cantilever with moving mass ($C_a = 0.2$, $S_k = 0.4$)

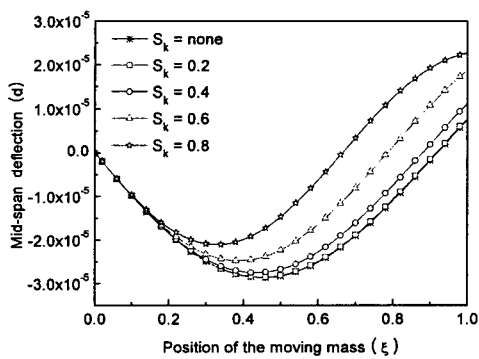


Fig. 3 Mid-span deflection of the cracked spring supported cantilever with moving mass ($C_a = 0.2$, $\xi_c = 0.3$)

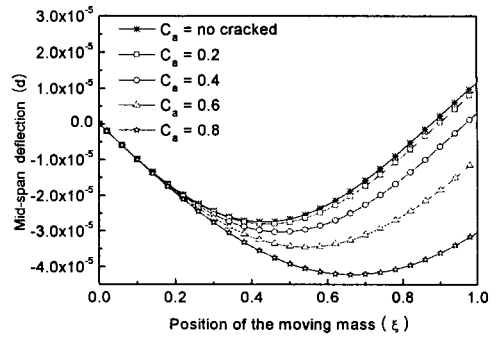


Fig. 4 Mid-span deflection of the cracked spring supported cantilever with moving mass ($\xi_c = 0.3$, $S_k = 0.4$)

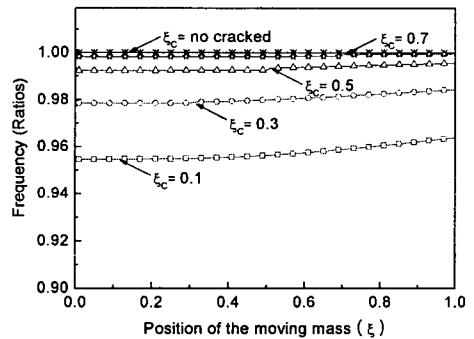


Fig. 5 Frequency of the cracked spring supported cantilever with the moving mass ($C_a = 0.2$, $S_k = 0.4$)

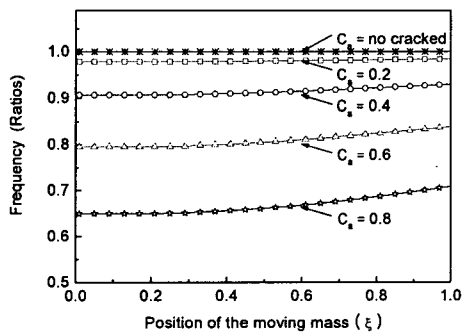


Fig. 6 Frequency of the cracked spring supported cantilever with the moving mass ($S_k = 0.4$, $\xi_c = 0.3$)

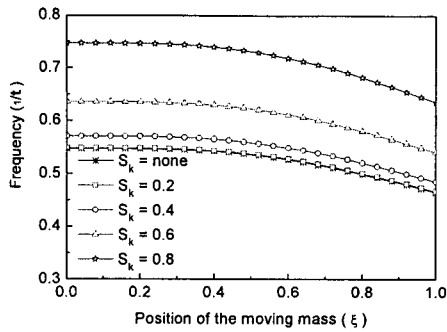


Fig. 7 Frequency of the cracked spring supported cantilever with the moving mass ($\xi=0.3$, $C_a=0.2$)

Fig. 2는 크랙의 크기 $c_a (= a_c/R)$ 가 0.2이고 탄성스프링으로 지지된 무차원 위치가 보의 0.4 지점일 때, 크랙의 위치에 따른 외팔보의 횡변위를 표현한 것이다. 크랙의 위치가 보의 끝단으로 갈수록 횡변위는 감소하며, 크랙이 보의 0.1인 지점에 존재할 때 보다 0.7인 지점에 존재할 때가 약 33.03% 정도 감소하였다.

Fig. 3은 크랙의 크기가 0.2이며, 크랙의 위치가 보의 0.3인 지점에 존재할 때 탄성스프링으로 지지된 위치에 따른 횡변위를 나타낸 것이다. 외팔보의 최대 횡변위는 탄성스프링으로 지지된 위치가 후반부로 이동할수록 최대 횡변위는 감소하며, S_k 가 0.2인 경우 0.8인 경우에 비해 약 35.83% 정도의 감소를 보인다.

Fig. 4는 크랙의 위치가 보의 0.3지점에 존재하고 탄성스프링으로 지지된 위치가 외팔보의 0.4인 지점에 존재할 때 크랙의 크기에 따른 외팔보의 끝단 횡변위를 나타내고 있다. 횡변위의 크기는 크랙의 크기에 비례하며, 크랙의 크기가 커질수록 최대 횡변위를 일으키는 이동질량의 위치가 보의 후반부로 이동되어짐을 알 수 있다.

Fig. 5와 Fig. 6은 각각 탄성스프링으로 지지된 위치가 외팔보의 0.4지점에 동일하게 존재하고 크랙의 크기가 0.2인 경우와 크랙의 위치가 보의 0.3인 지점에 존재하는 경우일 때, 크랙의 위치(ξ_c), 그리고 크랙의 크기에 따른 외팔보의 1차 모드 진동수 변화를 각각 도시한 것이다. Fig. 5는 크랙의 위치가 후반부로 갈수록 진동수가 증가하고, Fig. 6은 크랙의 크기가 커질수록 진동수가 감소하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 7은 크랙의 위치가 보의 0.3지점에 존재하고 크랙의 크기가 0.2일 때, 탄성스프링으로 지지된 위치의 변화에 따른 1차 모드 진동수 변화를 도시한 것이다. 탄성스프링으로 지지된 위치가 후반부로 갈수록 진동수가 증가하고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

이동질량과 크랙을 가진 탄성스프링으로 지지된 외팔보의 진동특성에 미치는 탄성스프링으로 지지된 위치, 크랙의 크기 및 위치의 영향을 수치해석 하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 크랙의 크기와 외팔보의 횡변위는 서로 비례적이며, 크랙의 크기가 클수록 최대 굽힘 변위가 발생하는 이동질량의 위치가 조금씩 후반부로 이동되어진다.
- 2) 크랙의 위치에 따른 외팔보의 끝단 횡변위의 변화는 크게 나타나지 않았으나, 진동수에서는 크랙의 위치가 탄성스프링으로 지지된 위치보다 이전에 존재할 때 보다 이후에 존재하는 경우에 더 큰 진동수 변화를 갖는다.
- 3) 탄성스프링으로 지지된 위치가 보의 후반부로 이동될수록 외팔보의 끝단 횡변위는 감소하며, 외팔보의 진동수는 탄성스프링으로 지지된 위치가 후반부로 갈수록 증가한다.
- 4) 크랙의 위치 및 탄성스프링으로 지지된 위치가 외팔보의 끝단 횡변위에 미치는 영향보다 크랙의 크기에 의한 영향이 더 큼을 알 수 있다.
- 5) 탄성스프링의 지지와 관계없이 크랙의 크기와 외팔보의 진동수는 서로 반비례적이며, 탄성스프링으로 지지된 위치 이후에서는 더 큰 진동수변화를 확인할 수 있다.

참고 문헌

- (1) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam With a Closing Crack," *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1057~1074.
- (2) Ghondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao, J., 1998, "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1, pp. 17~34.
- (3) Bannios, Y., Douka, E. and Trochidis, A., 2002, "Crack Identification in Beam Structures Using Mechanical Impedance," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 2, pp. 287~297.
- (4) H. I. Yoon, C. S. Chio, I. S. Son, 2003, "Dynamic Behavior of Simply Supported Fluid Flow Pipe with Crack," *Transaction of KSNVE*, Vol. 13, No. 7, pp. 562~569.
- (5) H. P. Lee, 1996, "Effects of Damping on the Dynamic Stability of a Rod with an Intermediate Spring Support Subjected to Follower Forces," *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 1, pp. 31~39.