

# 임의선형을 갖는 아치의 자유진동

## Free Vibration of Arbitrary Shaped Arches

이 태 은<sup>†</sup> · 신 성 철\* · 이 병 구\*\*

Tae Eun Lee, Seong Cheol Shin, Byoung Koo Lee

**Key Words** : arbitrary shape(임의선형), arch(아치), free vibration(자유진동), natural frequency(고유진동수)

### ABSTRACT

Arches are one of the most important basic structural units as well as the beams, columns and plates. Most complicated structures consist of only these basic units and therefore it is very attractive research subject to analysis both the static and dynamic behavior of such units including the arches.

This study deals with the free vibration of arbitrary shaped arches. In order to obtain the exactly arch shape, which surveyed  $(x, y)$  of neutral axis of arbitrary shaped arches are compared to various shape of arch: circular, parabolic, sinusoidal, elliptic, spiral and cartenary.

The differential equations governing free vibrations of arches are merely adopted in the open literature rather than deriving the equations in this study. The Taylor series method is used as the numerical differential scheme. The Runge-Kutta method and the Regula-Falsi method, respectively, are used to integrate the governing differential equations and to compute the natural frequencies.

It is expected that results obtained herein can be practically utilized in the fields of vibration control.

### 1. 서 론

아치는 구조적으로 이상적인 뿐만 아니라 미관이 아름답기 때문에 토목, 건축 등 각종 구조공학 관련분야에서 보, 기둥, 평판 등과 더불어 단위구조로 이용되고 있는 매우 중요한 구조형식이다.

일반적으로 아치는 진동에 대한 강성이 큰 구조로 알려져 왔으나, 하중계가 다양화되고 재료공학의 발달로 장기간의 세장한 아치가 등장함에 따라 아치의 동적 거동에 대한 종합적인 검토가 필수적으로 요망되고 있다.

구조물의 고유한 성질 중에 하나인 자유진동 특성은 차량하중과 같은 동하중이 작용하는 구조물의 동적 해석시에 매우 중요한 변수이다. 특히 공용 중인 구조의 진전성 평가 및 이를 바탕으로 하는 유지보수에 구조의 자유진동 특성을 파악하는 것은 다른 어떠한 평가지수보다 우선적으로 선행되어야 할 연구과제이다.

따라서 공용 중인 구조물의 노후화에 따른 진전성 평가에서 고유진동수의 측정을 필수 항목으로 채택하고 있다. 그러나 아치교량 등과 같이 거대한 구조물의 고유진동수를 측정

하는 것은 현실적으로 매우 어려운 실정이며, 측정이 가능한 경우에도 각종의 부구조물(substructures)로 인하여 국부적인 고유진동수 측정에 국한되는 경우가 대부분이어서 거대 구조의 자유진동 특성을 파악하는 것은 용이하지 못하다.

이러한 관점에서 이 연구는 공용 중인 임의선형을 갖는 아치 구조의 선형 특성을 현장 측량을 통하여 분석하고, 이를 바탕으로 정확한 아치의 선형을 파악하여 아치구조의 고유진동수와 진동형을 산정 하는데 연구목적이 있다.

### 2. 아치의 선형결정

아치구조는 시간길이 및 높이를 적당히 변화시킴으로서 그 선형이 매우 다양하여 이에 대한 정, 동적 해석이 매우 복잡하고 난해한 구조 중의 하나이다. 아치의 지점조건 및 재료의 성질 등은 비교적 간단하게 측정되므로 아치구조의 정확한 선형을 결정하는 것이 무엇보다 중요하다.

해당 구조물의 설계도면이 존재하는 경우에는 이를 이용할 수 있으나 우리나라의 실정으로 최근에 시공된 구조물을 제외하고는 설계 도면이 대부분 보관되어 있지 못하다. 따라서 현실적으로 아치의 선형을 파악하기 위해서는 측량에 의한 방법이 가장 현실적이다. 아치의 선형은 부재 중심선의  $(x, y)$ 좌표를 측량함으로써 확보할 수 있다.

그림 1은 시간길이  $L$ , 아치높이  $h$  및 원길이  $l$ 인 아치를 좌측지점을 원점으로 직교좌표계에 나타낸 것이다. 이

† 정희원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정

E-mail : telee@wonkwang.ac.kr

Tel : (063) 850-6718 Fax : (063) 850-6718

\* 정희원, 원광대학교 환경건설연구소 연구원

\*\* 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 교수

그림에 표시된 점들은 측량을 통해 측정된 아치부재 중심선의  $(x_i, y_i)$  좌표를 나타내며 곡선은 측정된 좌표를 이용하여 결정된 아치의 선형을 나타낸다. 본 연구에서 대상아치는 연구결과와 실용성을 높이고자 비대칭 아치로 채택하였다. 비대칭 아치의 경우 아치의 지점고가 낮은 지점의 좌표를 좌측지점 즉, 원점으로 측량함으로써 우측지점이 항상 아치의 현길이(chord length)보다 작아지도록 하며, 따라서  $y$  좌표는 반드시 "0"이거나 양수이다. 이렇게 측량함으로써 미분방정식의 수치적분에서 수치적분 구간이 현길이보다 작은 범위에서 이루어지는 이점을 확보할 수 있다.

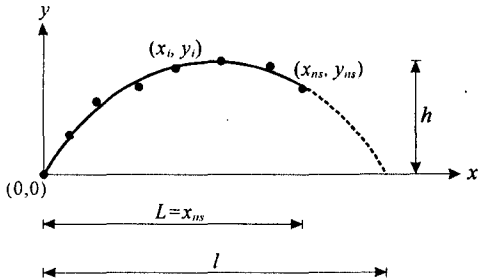


그림 1. 측량된 아치의 좌표 및 선형

아치의 단면은 대부분 상자형 단면이고 단면의 높이가 매우 높기 때문에 중심선을 따라서 좌표를 측량하는 것은 비교적 용이한 일이다. 측량 좌표수는, 예로서 포물선 부재의 경우에 선형식은  $f(x) = ax^2 + bx + c$ 로 표현되므로 계수  $a, b, c$ 를 결정하기 위해서는 최소한 3개의 측량 좌표수가 필요하다. 측정수가 많을수록 더 정확한 부재의 선형식을 얻을 수 있으며 대부분 아치구조 선형식의 계수는 5개 미만이므로 약 20개 정도의 측량수이면 충분히 정확한 선형식을 산출할 수 있다.

측량에 의해 계측된 자료를 이용하여 이미 구분된 여러 종류의 선형 중에서 실측 선형과 이론 선형사이의 오차의 합이 가장 작은 하나의 선형을 대상아치의 선형으로 확정한다. 한편 아치의 선형 측량시에 지점조건, 단면 치수 등을 동시에 조사하여 고유진동수 및 진동형 산정에서 기초자료로 활용한다.

## 2.1 선형결정방법(타원아치를 중심으로)

본 연구에서는 측정된 아치좌표를 이용하여 대상아치의 정확한 선형을 결정하기 위해 원호, 포물선, 타원, 정현, 나선, 현수형 등의 다양한 선형식을 채택하였다. 이 중 타원아치의 선형을 결정하는 과정을 간략히 설명하면 다음과 같다.

그림 2는 타원아치의 선형을 나타낸 것으로 타원의  $x$  축 기준길이는  $(l + 2\beta l)$ 이며,  $\beta$ 는 기준길이를 정의하기 위한 무차원 계수이다.

그림 2에 보인 타원아치의 선형식은 다음 식 (1)과 같다.

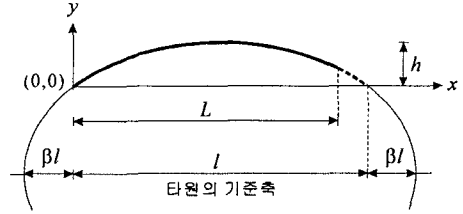


그림 2. 타원아치의 선형

$$y = h \left\{ a \left[ b - \left( \frac{x}{l} - 0.5 \right) \right]^{2 \cdot 0.5} + c \right\}, 0 \leq x \leq L \quad (1)$$

식 (1)에 포함된 무차원 계수  $a, b, c$ 는 다음의 식들과 같다.

$$a = \frac{1}{[\beta + 0.5 - (\beta + \beta^2)^{0.5}]} \quad (2)$$

$$b = \frac{1}{(\beta + 0.5)^2} \quad (3)$$

$$c = \frac{1}{[1 - (\beta + 0.5)(\beta + \beta^2)^{-0.5}]} \quad (4)$$

식 (1)은 현길이  $l$ 와 아치높이  $h$ 로 계산되나 이 값이 미지수이므로 이를  $L \leq l \leq 2L$ ,  $0.8y_{\max} \leq h \leq 1.5y_{\max}$ 의 범위 내에서 시행착오법에 의해 최적의  $l, h$ 를 결정한다. 즉, 계측된  $(x_i, y_i)$ 좌표와 선형식에 의해 계산된  $(x_i, y_i)$ 좌표의 차이를 이용하여 오차제곱의 합이 최소가 되는 최적의  $l, h$ 를 결정하여 타원아치의 선형식으로 이용한다. 이때  $\beta$ 값이 크면 타원아치는 낮은 아치가 되므로 원호아치와 비교하여 상대적으로 최적의  $l, h$ 값을 찾지 못한다.  $\beta$ 의 범위를 0.01~10으로 지정해주면 최적의  $\beta, l, h$ 를 찾을 수 있다.

이러한 방법으로 본 연구에서 채택한 다양한 선형의  $l, h$ 를 결정할 수 있으며, 이미 설명한 타원아치를 제외한 아치구조의 선형식을 표 1에 나타내었다.

각 선형식에 포함된 미지수인  $l, h, r, a, b, c$ 는 최소자승법에 의하여 산출할 수 있으며 본 연구에서 최소자승법의 실행은 앞에서 언급한 시행착오법을 이용하였다. 즉, 오차의 제곱의 합을 다음의 식 (5)와 같이 산정한다.

표 1. 각 선형별 선형식

선형	방정식*
원호	$f(x) = r \sin[\cos^{-1}\{r^{-1}(x-0.5l)\}] + h - r$
포물선	$f(x) = -4hl^{-1}x(x-l)$
정현형	$f(x) = h[a \sin(bl^{-1}x - c) + 1 - a]$
나선형	$f(x) = r \log_e[\cos\{r^{-1}(x-0.5l)\}] + h$
현수형	$f(x) = -r \cos h[r^{-1}(x-0.5l)] + h + r$

\*  $l$ : 현길이,  $h$ : 아치높이,  $r$ : 부재정점에서의 반경,  $a, b, c$ : 계수

$$E_r^2 = \sum (f(x_i) - y_i)^2 \quad (5)$$

각 선형별로 위의 식 (5)의  $E_r^2$ 이 최소가 되도록 미지수  $l, h, r, a, b, c$ 를 산출하고, 산출된 각각의 선형식들 중  $E_r^2$ 이 가장 작은 선형을 대상아치의 선형으로 결정한다.

### 3. 자유진동이론

그림 3은  $(x, y)$  평면 위에 놓인 일반적인 선형을 갖는 아치의 기하학적 형상을 나타낸 것이다. 이 그림에서  $\rho, \phi$ 는 각각 아치축상 임의좌표  $(x, y)$ 에서의 곡률반경, 곡률 중심방향과 수평축이 이루는 각도를 의미한다. 또한  $v, w$  및  $\psi$ 는 각각 접선방향 변위, 곡률방향 변위 및 단면회전각이다. 본 연구에서는 단부조건으로 회전 및 고정지점을 적용하였다.

그림 3에 나타낸 일반적인 선형을 갖는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식은 다음 식들과 같다.<sup>[1]</sup>

$$\delta'''' = a_1 \delta'''' + (a_2 + a_3 c_i^2) \delta'' + (a_1 + a_4 c_i^2) \delta + (a_5 + a_6 c_i^2) \delta + (a_7 - a_3 c_i^2) \lambda' - a_4 c_i^2 \lambda \quad (6)$$

$$\lambda' = a_8 \delta'' + (a_9 c_i^2 - 1) \delta' + a_{10} \delta + a_{11} \lambda' + a_{12} c_i^2 \lambda \quad (7)$$

위의 식들에서  $(\prime) = d/d\phi$ 의 미분연산자이며, 미분방정식들에 사용한 무차원 변수들은 다음과 같다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \eta = \frac{y}{l}, \delta = \frac{w}{l}, \lambda = \frac{v}{l}, \zeta = \frac{\rho}{l} \quad (8-12)$$

$$f = \frac{h}{l}, e = \frac{L}{l}, s = \frac{l}{r}, c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{rA}{EI}} \quad (13-16)$$

여기서,  $(\xi, \eta)$ 는 무차원 직교좌표계,  $\delta, \lambda$  및  $\zeta$ 는  $w, v$  및  $\rho$ 를 현길이  $l$ 로 정규화 한 것이며,  $f$ 는 현길이에 대한 아치높이비,  $e$ 는 현길이에 대한 지간길이비,  $s$ 는 세장비,  $c_i$ 는 무차원 고유진동수이다. 또한 앞의 미분방정식에 포함된 계수  $a_1 \sim a_{12}$ 는 다음의 식 (17~28)과 같다.

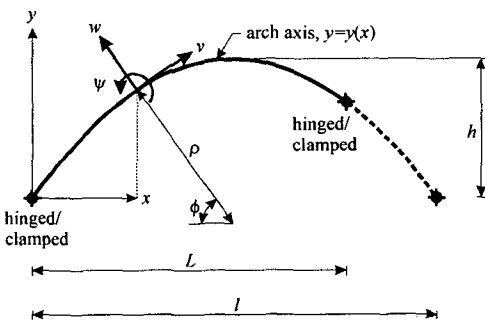


그림 3. 아치의 기하학적 형상 및 제 변수

$$a_1 = \frac{5\zeta'}{\zeta}, a_2 = \frac{2\zeta''}{\zeta} - \frac{8\zeta'^2}{\zeta^2} - 2 \quad (17,18)$$

$$a_3 = -\frac{R\zeta'^2}{s^2}, a_4 = \frac{R\zeta\zeta'}{s^2} \quad (19,20)$$

$$a_5 = \frac{2\zeta''}{\zeta} - \frac{8\zeta'^2}{\zeta^2} - s^2\zeta'^2 - 1, a_6 = \zeta^4 \quad (21,22)$$

$$a_7 = -s^2\zeta'^2, a_8 = \frac{\zeta'}{s^2\zeta^3} \quad (23,24)$$

$$a_9 = \frac{R}{s^4}, a_{10} = \frac{\zeta'}{\zeta} \left(1 + \frac{1}{s^2\zeta'^2}\right) \quad (25,26)$$

$$a_{11} = \frac{\zeta'}{\zeta}, a_{12} = -\frac{s^2\zeta'^2 + 1}{s^4} \quad (27,28)$$

미분방정식 식 (6), (7)을 수치해석하기 위해서는 경계조건이 필요하며, 먼저 회전단에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \delta'' = 0 \quad (29-31)$$

고정단에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \delta' = 0 \quad (32-34)$$

### 4. 수치해석 방법 및 결과

#### 4.1 수치미분기법

식 (6), (7)과 같이 표현된 미분방정식을 풀기 위해서는 먼저 미분방정식의 계수에 포함된 곡률항과 그 미분값을 산출하여야 한다. 이 연구에서는 전진 5차 다항식을 이용한 수치미분기법<sup>[2,3]</sup>으로 임의선형 아치의 지배미분방정식에 포함된 미분값을 산출하였다.

일반적으로 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식의 계수 중 4계 이상의 미분값을 포함하는 경우 4계 이상의 미분값을 미지수로 Taylor 급수로 표현된 연립방정식을 풀어 고계미분값들을 산정할 수 있다.<sup>[3]</sup> 아래의 표 2는 본 연구에서 채택한 수치미분기법에 의해 원호, 포물선 및 타원아치의 미분값을 계산한 결과를 대수적인 방법<sup>[4]</sup>에 의한 결과와 비교하여 수록한 것이며, 이 결과로부터 매우 정확한 미분값들

표 2. 본 연구와 대수적 방법에 의한 미분값의 비교\*

선형	비교	$\zeta$	$\zeta'$	$\zeta''$
원 호	본 연구	0.5374	0.0000	0.0000
	대수적 방법	0.5374	0.0000	0.0000
	오차(%)**	0.0000	0.0000	0.0000
포물선	본 연구	0.7828	-1.9740	8.9856
	대수적 방법	0.7826	-1.9735	8.9832
	오차(%)**	0.0256	0.0253	0.0267
타 원	본 연구	0.7828	-0.9662	2.1949
	대수적 방법	0.7826	-0.9665	2.1953
	오차(%)**	0.0256	0.0310	0.0182

\*  $f=0.3, e=0.8, \beta=0.5, \xi=0.15$

\*\* 오차(%) = |1 - 본 연구/대수적 방법| × 100

을 수치미분법에 의하여 산정할 수 있음을 확인할 수 있다. 따라서 본 연구와 같이 임의선형을 갖는 아치구조의 자유진동을 해석하는 경우 수치미분법을 매우 강력한 도구로 사용할 수 있다.

#### 4.2 수치적분 및 고유값 산정

본 연구에서 임의선형을 갖는 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식 식 (6), (7)의 수치적분은 이미 다수의 논문들에서 그 적합성이 입증된 Runge-Kutta법<sup>[5]</sup>을 이용하였으며, 미분방정식의 고유치인 고유진동수의 산정은 행렬값 탐사법 및 비선형방정식의 해법인 Regula-Falsi법<sup>[6]</sup>을 이용하였다.

다음 표 3은 본 연구에서 이용한 수치적분기법과 비선형방정식의 해법에 의한 실제 해석 예를 나타낸 것으로 이 해석에서 사용한 좌표값은 아치의 선형에 유사하도록 임의로 작성한 좌표이다. 표 3을 살펴보면 굵은 글씨로 나타낸 나선형의 경우가 오차제곱의 합( $E_s^2$ )이 가장 작게 나타나 나선형이 임의로 제시한 좌표를 갖는 아치에 가장 유사한 선형임을 알 수 있다. 각 선형별로 계산된 변수들을 살펴보면 아치의 제원을 나타내는  $f$ ,  $e$ ,  $s$ 값의 차이는 그리 크지 않으나 무차원 고유진동수( $c_1 \sim c_4$ )의 차이는 선형별로 크게 나타났으며, 특히 고차모드로 갈수록 그 차이가 증가하였다. 따라서 아치구조의 자유진동해석에서 정확한 선형을 결정하는 것이 매우 중요한 과제임을 확인할 수 있다.

그림 5는 표 3의 수치해석에 이용한 계측 좌표점과 해석 결과 결정된 해당 아치의 선형을 나타낸 것이다. 이 그림에 표시된 점들이 아치의 측량좌표들이며 그 결과 가장 유사한 선형으로 결정된 나선아치를 실선으로 나타내었다. 해석결과 산정된 아치제원을 상단에 기재하였으며, 해당 아치를 수치 해석하여 산출된 진동형을 나타내었다. 이 진동형으로부터

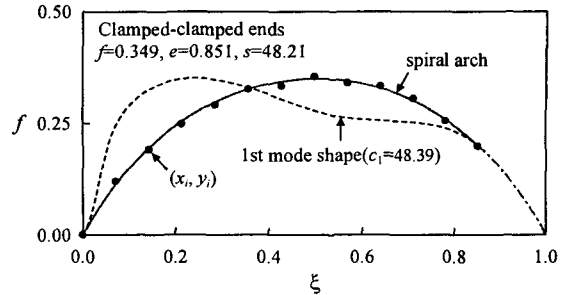


그림 5. 결정된 아치의 선형 및 진동형의 예

최대전폭 및 무변위 위치 등을 파악할 수 있어 이를 적절히 이용하면 임의선형을 갖는 비대칭 아치의 진동을 효율적으로 제어할 수 있을 것으로 사료된다.

#### 5. 결론

이 논문은 임의선형을 갖는 아치의 자유진동해석에 관한 연구이다. 본 연구에서는 선형이 알려지지 않은 아치의 자유진동해석을 위하여 아치의 선형자료를 측량을 통해 확보하고, 계측된 아치의 좌표로부터 최적의 선형을 찾기 위해 다양한 선형식을 채택하였으며, 각 선형식에 대한 오차를 비교하여 해당아치의 선형을 결정하였다.

지배미분방정식에 포함된 미분값은 전진 5차다항식을 이용하여 산출하였고, 지배미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였으며, 미분방정식의 고유치인 고유진동수의 산정은 행렬값 탐사법을 결합한 Regula-Falsi법을 이용하였다.

본 연구의 결과는 공용중인 아치구조의 건전성 평가 및 유지보수에 동적자료를 제공할 수 있을 것으로 사료된다.

#### 참고문헌

1. S.J. Oh, B.K. Lee and I.W. Lee, "Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, No. 1, 1999, pp. 23-33.
2. A.W. Al-Khafaji and J.R. Tooley, "Numerical Methods in Engineering Practice" Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1986, pp. 335-370.
3. S.C. Chapra and R.P. Canale, "Numerical Methods for Engineers" McGraw-Hill Companies, Inc., 1998, pp. 79-102.
4. 오상진, 변단면 아치의 자유진동에 관한 연구, 원광대학교 대학원, 박사학위논문, 1996.
5. B. Carnahan, H.A. Luther and J.O. Wilkes, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, 1969.

표 3. 선형별 변수 및 무차원 고유진동수 비교

변수	원호	포물선	정현	타원	현수	나선
$E_s^2$	17.46	34.06	34.29	10.06	15.12	<b>6.740</b>
$f$	0.340	0.356	0.356	0.346	0.349	<b>0.349</b>
$e$	0.851	0.842	0.842	0.843	0.843	<b>0.851</b>
$s$	48.21	48.74	48.74	48.69	48.69	<b>48.21</b>
$a$	1.907	1.730	1.730	1.782	1.763	<b>1.841</b>
$\beta$	-	-	6.011	0.192	-	-
$c_1$	49.97	48.11	48.11	49.81	49.11	<b>48.39</b>
$c_2$	69.94	81.32	81.35	76.25	77.81	<b>73.55</b>
$c_3$	116.4	108.6	108.5	113.7	117.8	<b>112.1</b>
$c_4$	152.2	160.3	160.3	158.3	158.7	<b>153.3</b>