

면내력을 받는 변단면 후판의 진동해석 Vibration Analysis of Tapered Thick Plate Subjected to Static In-plane Stress

○ 정진택* · 이용수† · 오숙정**

Cheong, Jin Taek, Lee, Yong Soo and Oh, Soog Kyoung,

Key Words : Finite Element Method, Natural frequency, Tapered thick Plate, Taper ratio

ABSTRACT

This paper has the object of investigating natural frequencies of tapered thick plate on pasternak foundation by means of finite element method and providing kinetic design data for mat of building structures. vibration analysis that tapered thick plate subjected to In-plane stress is presented in this paper. Finite element analysis of rectangular plate is done by use of rectangular finite element with 8-nodes. In order to analysis tapered plate which is supported on pasternak foundation, The ratio of In-plane stress to critical load is varied with $0.2\sigma_{cr}$, $0.4\sigma_{cr}$, $0.6\sigma_{cr}$ and the Winkler parameter is 0, 10, 100, 1000 the shear foundation parameter 0, 10. The taper ratio is applied as 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 respectively. This paper is analyzed varying thickness by taper ratio with In-plane stress

기호설명

$\bar{a} \times \bar{b}$: 전체판의 크기
 D_0 : 판의 휨강성
 D : 판의 단위길이당 휨강성
 E : 탄성계수
 G : 전단탄성계수
 K_c : 판 요소의 휨 전단강성
 K_f : 판요소의 전단지반 강성
 k_w : Winkler 지반강성
 k_g : 전단지반강성
 M_e : 판의 요소질량
 P_x : 면내력
 SFP : 전단지반계수
 WFP : Winkler지반계수

ρ : 단위 체적당 질량
 ν : 포아송비
 w : 수직처짐
 θ_x : x방향 회전각
 θ_y : y방향 회전각
 ω : 판의 고유진동수
 σ : 면내응력
 h : 판의 두께 변화 함수

1. 서론

현대 건축물은 고층화, 대형화 되어가고 있으며 건축물이 요구하는 기능에 따라 다양한 기하학적 형태를 나타내고 있다. 건축물이 대규모화 되고 형태도 다양해짐에 따라 지하구조물의 형상도 다양해지고 있으며 지하구조물의 경제성과 역학적인 효율성을 높이기 위해 변단면으로 시공되기도 한다. 본 연구에서 다루는 건축구조물의 온통기초(mat foundation)는 본 연구에서 다루는 후판으로 이상화 할 수 있으며, 최근 우리나라에서 지진의 발생 빈도가 점차 증가됨에 따라 지진동등의 외력에 의한 진동을 방지 또는 억제하기 위한 연구의 필요성이 증대 되고 있다. 현재까지 변단면 후판에 관한 연구를 살펴보면 다음과 같

* 정회원, 석사과정 원광대학교 건축대학원
† 책임저자, 정회원, 원광대학교 건축학부 정교수
전화: 063-850-6709; Fax: 063-843-0782
E-mail: struct@wonkwang.ac.kr
** 정회원, 공학박사 원광대학교 건축학부 강의교수

다. 1950년대 D. Young(1), G. B Warburton(2), A. W. Leissa(3)에 의해 등방질 판의 자유진동에 대한 연구가 시작된 이후 1996년 A. R. Kukreti와 J. Farsa 와 C. W Bert(4)는 미분구적법 과 Rayleigh-Ritz Method를 이용하여단순지지된 변단면 후판의 진동에 관한 연구를 시행하였으며 Y. K. Cheung과 D. Zhou(5)는 2003년에 Timoshenko Beam Function을 이용한 변단면 후판의 진동해석을 시행하였다. 국내에서 아직 후판에 관한 연구는 활발하지 않은 상태이며 후판에 관한 연구를 살펴보면, 1997년 이용수(6) 등은 탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴해석을 하였으며, 1999년 이용수 등(7)은 탄성 스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석을 시행하였고, 2003년 이용수 등(8)은 비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 판의 자유진동해석을 수행하였다. 본 연구에서는 면내력을 받는 변단면 후판의 진동해석을 하였으며 이와 같은 변단면을 갖는 기초 구조물의 동적 거동 특성을 파악함으로써 변단면 구조물의 공진 현상을 방지 또는 억제할 수 있도록 하는데 그 목적이 있다. 변단면 후판의 진동해석 시 Mindlin판 이론을 적용하고, 8절점 Serendipity 요소계를 이용한 유한요소법을 이용하였다.

2. 유한요소해석

후판요소와 변형 에너지, 운동 에너지와 외력의 일을 구하고 가상일의 원리를 이용하여 이들 변분을 중심으로 놓아 고유치 방정식을 산정한다.

2.1 변단면 후판의 진동해석

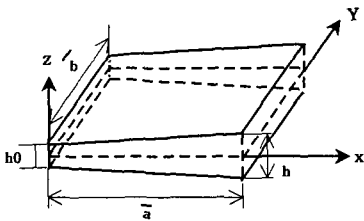


Fig. 1 Coordinate System of Tapered Thick Plate

2.1.1 후판요소

Fig 1 과 같이 변단면 후판의 두께 h 는 길이에 따라 변하므로 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$h = h_0 f(\xi) \quad (1)$$

여기서, h_0 는 $x=0$ 일 때 판의 두께, $\xi = \frac{x}{a}$

$$f(\xi) = 1 + \alpha \xi, \quad \alpha = (h - h_0)/h_0 : \text{Taper Ratio}$$

변단면 후판의 휨 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 f(\xi)^3 \quad (2)$$

$$\text{여기서, } D_0 = Eh_0^3/12(1-\nu)$$

Fig 2 와 같이 판 요소의 크기를 $a \times b$ 로 정의 할 때 무차원 좌표계는

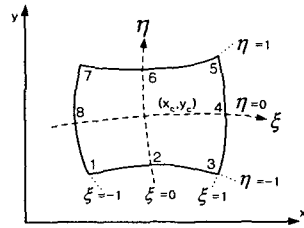


Fig. 2 8-nodes Serendipity Element System

$\xi = (x - x_c)/a$, $\eta = (y - y_c)/b$ 를 이용한 8절점 Serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내의 임의의 위치에 대한 변위를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \quad (3)$$

여기서, w : 판 요소의 수직변위
 θ_x : 판 요소의 x 방향 회전각
 θ_y : 판 요소의 y 방향 회전각

$$\{ \delta_e \} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8}]^T$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

이 경우 8절점 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi \eta (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} \{ (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta)^2 (1 - \xi^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi_i \xi)^2 (1 - \eta^2) \}$$

($i = 1, 2, \dots, 8$)

2.1.2 후판의 진동해석

후판의 진동을 해석하기 위해 8절점 Serendipity 요소계를 사용하였으며 판 요소의 운동에너지 T_e , 변형에너지 U_e 와 외력의 일 W_p 를 구하여 각 요소를 조합하고 이들의 변분을 썩으로 놓아 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

후판요소의 운동에너지 (T_e)는 정리하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho (h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dA \quad (4)$$

여기서, ρ : 단위 면적당 후판의 질량

식(5)에 식(3)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_e = \frac{1}{2} \delta^T [M_e] \delta_e$$

(5)

여기서, δ_e : 시간에 따른 판 요소의 절점변위 변화율
 $[M_e]$: 판 요소의 질량행렬

Winkler지반 강성과 전단지반 강성을 고려한 후판 요소의 변형에너지 U_e 는 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [M]^T \chi dA + \frac{1}{2} \int_A [Q]^T \phi dA + \frac{1}{2} \int_A k_w w^2 dA + \frac{1}{2} \int_A k_g [(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y})^2] dA \quad (6)$$

여기서, k_w : Winkler 지반강성, k_g : 전단지반강성

w : 판의 수직처짐 dA : $dx \cdot dy$

$\{\chi\} = [\frac{-\partial \theta_y}{\partial x}, \frac{-\partial \theta_x}{\partial y}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y}]$ (곡률)

$\{\phi\} = [-\psi_y + \partial w / \partial x, -\psi_x + \partial w / \partial y]$ (전단변형)

$[M] = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^T$ (모멘트)

$[Q] = [Q_x \ Q_y]^T$ (전단력)

식(6)에 모멘트, 곡률, 절점변위와의 관계, 전단력과 전단변형과의 관계 및 식(3)의 변위 형상함수를 대입하여 정

리하면 다음과 같이 된다.

$$U_e = \frac{1}{2} \delta^T [K_e] \delta_e + \frac{1}{2} w_e^T [K_f] w_e \quad (7)$$

여기서, $[K_e]$: 판 요소의 휨·전단 강성행렬

$[K_f]$: 판 요소의 지반강성 행렬

외력에 의한 일은 1방향 압축만 고려하면 다음과 같다.

$$W_p = \frac{1}{2} \int_A P_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dA \quad (8)$$

식(3)과 면내력 $P_x = \sigma h$ 를 식(8)에 대입하면 다음과 같다.

$$W_p = \frac{1}{2} \{w_e\}^T [K_g] \{w_e\} \quad (9)$$

여기서, $[K_g]$: 판 요소의 기하강성 행렬

σ : 면내응력

h : 판의 두께

판 요소의 운동에너지와 변형에너지를 전체 판에 대한 것으로 조합하고 식(4)에 대입하면 식(10)과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[K_E] - \sigma [K_G] - \omega_e^2 [K_M] = 0 \quad (10)$$

여기서, $[K_E]$: $[K_e]$, $[K_f]$ 를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 요소강성행렬

$[K_M]$: $[M_e]$ 를 판요소 전체에 대해 조합한 전체 질량 매트릭스

$[K_G]$: 면내응력이 1인 경우 전체 판요소의 기하강성 행렬

ω_e : 후판의 고유진동수

이 식에서 $\sigma = 0$ 인 경우 후판의 Pasternak지반에 지지된 후판의 자유진동 문제를 다루는 식이 되며, $\omega = 0$ 로 놓으면 Pasternak 지반에 지지된 후판의 정적 안정문제를 다루는 식이 된다.

식(10)은 좌굴응력보다 작은 면내응력을 가지값으로 하면 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$[[K_E] - \sigma [K_G]] - \omega_e^2 [K_M] = 0 \quad (11)$$

식(11)에서 좌굴응력 이하의 면내력을 받는 후판의 고유진동수 ω 를 구할 수 있다.

3. 비교 분석 및 적용

3.1 검증

본 연구에서 유한요소 해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 정확성을 검토 하였다. 비교분석을 위해 판의 제 계수들은 기존해의 조건과 동일하게 하였다.

Table1은 전단지반계수 ($SFP = k_g \bar{a}^2/D$) SFP 가 10 일 때 탄성(Winkler)지반계수 ($WFP = k_w \bar{a}^4/D$) WFP 의 변화에 따라 유한요소 프로그램으로 평판의 고유진동수를 산출하여 참고문헌의 참고해와 비교한 것으로 최대 0.25%이내의 오차를 보였다. Table2는 면내력이 작용할 때의 진동수와 작용하지 않을 때의 진동수 비를 나타낸 것으로 최대 0.089%의 오차를 보였고, Table3은 지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 α (Taper ratio) 변화에 따른 고유진동수를 산출해와 참고 문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56%의 오차를 나타내어 본 연구를 위한 신뢰성을 확인할 수 있었다.

Table 1 Comparison of natural frequency according to variation of foundation parameter

$$(\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_0})$$

| WFP | Reference 9) | This solution | Error(%)* |
|-----------------|--------------|---------------|-----------|
| 0 | 22.2117 | 22.25175 | 0.18 |
| 10 | 22.4104 | 22.46566 | 0.25 |
| 10 ² | 24.2698 | 24.30675 | 0.15 |
| 10 ³ | 38.0638 | 38.09225 | 0.08 |
| 10 ⁴ | 99.4473 | 99.6619 | 0.20 |

Table 2 Natural frequency ratios of plate subjected to In-plane stress

| | Reference 10) | This solution (\bar{w}/w_e) | Error(%)* |
|-------------------|---------------|---------------------------------|-----------|
| 0 | 1 | 1 | - |
| 0.2 σ_{cr} | 0.8944 | 0.8952 | 0.089 |
| 0.4 σ_{cr} | 0.7746 | 0.775 | 0.052 |
| 0.6 σ_{cr} | 0.6325 | 0.6326 | 0.016 |

\bar{w} : Frequency of In-plane stress

w_e : Natural frequency

Table 3 Natural frequency of tapered thick plate which has no foundation ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_0}$)

| α | Reference 4) | This solution | Error(%) |
|----------|--------------|---------------|----------|
| 0.2 | 21.59051 | 21.58787 | 0.01 |
| 0.4 | 23.54861 | 23.45184 | 0.19 |
| 0.6 | 25.37844 | 25.29344 | 0.33 |
| 0.8 | 27.23463 | 27.08043 | 0.56 |

$$\text{Error(%)=} | \text{This solution- Reference} | \times 100 / \text{Reference}$$

3.2 면내력을 받는 변단면 후판의 진동해석

본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 변단면 후판의 자유진동해석을 시행하였다.

해석을 위한 판의 제 계수들은 다음과 같다

탄성계수 (E) : $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

포와송비 (ν) : 0.3

판의 크기 : $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$

판의 폭 두께비 : 10, 20

면내력 : $0.2\sigma_{cr}$, $0.4\sigma_{cr}$, $0.6\sigma_{cr}$

판 지지상태 : 4변 단송지지

전단지반계수 (SFP) : 0, 10

Winkler지반계수 (WFP) : 0, 10, 10^2 , 10^3

Fig3는 $SFP=0$ $WFP=0$ 인 상태에서 α 와 σ_{cr} 의 변화에 따른 변단면 후판의 고유진동수를 그래프로 나타낸 것이다. 이 경우 α 가 증가하고 σ_{cr} 의 변화에 따라 변단면 후판의 고유진동수가 일정하게 증가하다가 α 가 0.8일 때 고유진동수의 증가율이 소폭 상승하는 것을 볼 수 있다. Fig4와 Fig5는 SFP 는 모두 10이고 WFP 가 Fig4는 10, Fig5는 100일 때 변단면 후판의 고유진동수를 나타낸 것이다. 이 경우 α , σ_{cr} 의 변화와 지반의 강성이 증가할수록 고유진동수가 증가하는 것을 볼 수 있다.

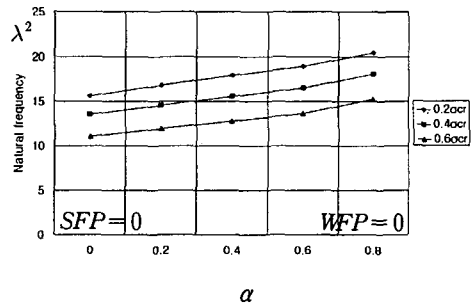


Fig 3 Variation natural frequency versus variation of In-plane stress and α

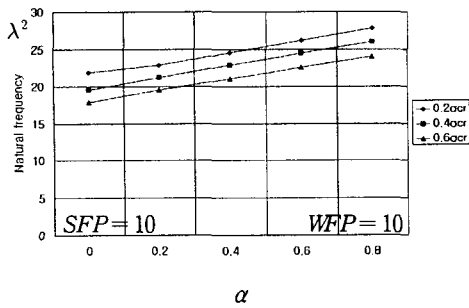


Fig 4 Variation natural frequency versus variation of In-plane stress, α and foundation parameters

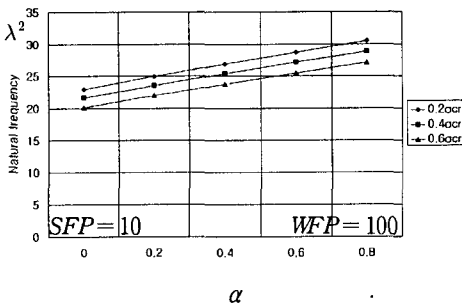


Fig 5 Variation natural frequency versus variation of In-plane stress, α and foundation parameters

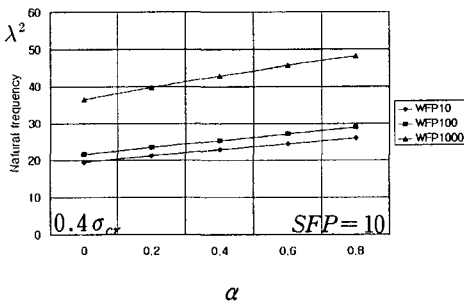


Fig 6 Variation natural frequency versus variation of α and foundation parameters

Fig6은 $0.4\sigma_{cr}$ 의 면내력이 작용할 때 $SFP=10$, WFP 를 10, 10^2 , 10^3 로 변화를 주었을 경우 α 의 변화에 따른 변단면 후판의 고유진동수를 나타낸 것이다 이 경우 지반강성이 높아지고 α 가 커질수록 고유진동수가 증가하는 것을 알 수 있다.

4. 결론

이 연구는 Pasternak지반위에 놓인 면내력을 받는 변단면 후판의 진동에 관한 것이다. 변단면 후판의 지

반은 지반의 연속성을 고려한 Pasternak 지반으로 모형화 하였다. 판의 해석은 Mindlin 판 이론을 적용하였다. 이 연구의 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다

(1) 본 연구에서 산출한 지반이 없는 변단면 후판의 고유진동수는 참고 문헌해와 최대 0.56%의 오차를 보여 참고해와 매우 근사하였다.

(2) Pasternak 지반에 지지된 변단면 후판의 고유진동수는 SFP , WFP , α 가 증가할수록 고유진동수가 일정하게 증가하며, 지반이 없는 경우 α 에 따라 일정하게 증가하다가 α 가 0.8일 때 고유진동수가 비례하게 상승하지 않고 고유진동수의 증가율이 다소 급격히 상승하는 것을 알 수 있었다.

참고 문헌

- (1) D. Young, "vibration of rectangular plates by the Rayleigh-Ritz method: J. appl. Mech. 17 pp. 448-453, 1950.
- (2) G. B. Warburton, "The vibration of rectangular plates ", Proc . Institute of Mechanical Engineers, pp. 371-384, 1953.
- (3) A.W .Leissa, "vibration of plates" NASA SP-160, 1969.
- (4) Differential quadrature and Rayleigh-Ritz method to determine The fundamental frequencies of simply supported rectangular plates with linearly varying thickness. J. sound and vibration pp.103-122, 1996.
- (5) Vibration of tapered Mindlin plates terms of statics Timoshenko beam functions. J. sound and vibration pp. 693-709, 2003.
- (6) 이용수, 김일중, 오숙경, 김성용(1997). "탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴 해석," 대한건축학회 춘계학술발표회 논문집 17(1).
- (7) 이용수 외, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표 논문집, 제 12권 2집 통권 제23호,pp 35-42, 1999.54.
- (8) 이용수, 김일중, 오숙경(2003). "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진동해석," 한국강구조학회 논문집.
- (9) Hiratoki Matsunaga, "Vibration and Stability of thick plates in elastic foundations", J. Eng. Mech, pp27-34, 2004.
- (10) R. F. S. Hearmon, "The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or supported edge", J. appl. Mech. Trans ASME, 1959, pp. 537-540.