

# 가속을 갖는 이동질량에 의한 외팔보의 동적응답에 관한 실험적 검증 Experimental Verification on Dynamic Responses of a Cantilevered Beam under a Moving Mass with Accelerations

김희중\* · 류봉조\*\* · 김효준\*\*\* · 윤충섭\*\*\*\*

H. J. Kim, B. J. Ryu, H. J. Kim and C. S. Yoon

**Key Words** : Dynamic response(동적응답), Cantilevered beam(외팔보), Moving mass with accelerations(가속 이동질량), Experimental verification(실험적 검증)

## ABSTRACT

The paper presents the numerical and experimental results for the dynamic response vibration of a cantilevered beam subjected to a moving mass with variable speeds. Governing equations of motion under a moving mass were derived by Galerkin's mode summation method taking into account the effects of all forces due to moving mass, and the numerical results were calculated by Runge-Kutta integration method. The effects of the speed, acceleration and the magnitude of the moving mass on the response of the beam are fully investigated. In order to verify numerical results, some experiments were conducted, and the numerical results have a little difference with the experimental ones.

## 1. 서 론

이동물체에 의한 구조물의 진동과 동적응답에 관한 연구는 철도가 건설되기 시작한 이래 많은 연구자들의 관심이 되어 왔다<sup>(1~2)</sup>. 이러한 이동물체가 지나가는 구조물의 동적거동 예들은 탄환의 발사에 의한 포신의 거동문제, 가공과정의 기계 구조물, 거더 위를 움직이는 천정크레인, 철도 차량에 의한 교량구조물 등을 들 수 있다. 구조물 위를 이동하는 이동물체의 동적응답을 이동 탄환 질량에 의한 총신의 구조응답연구로의 접근은 Simkins와 그의 공동연구자들<sup>(3)</sup>의 유한요소해석에 의해 이루어졌다. 그후 Simkins<sup>(4)</sup>는 이동하중을 받는 단순지지보의 처짐과 이동질량을 받는 단순지지 보 처짐을 유한요소법으로 연구하였다. Esmailzadeh와 Ghorashi<sup>(5)</sup>는 이동질량의 관성력항을 추가하여 이동질량에 의한 보의 진동해석을 하였고, Ghorashi<sup>(6)</sup>는 이동질량에 의해 야기되는 보의 동적해석과 진동해석을 하였다. Lee<sup>(7)</sup>는 일정

속도의 이동질량에 의한 보 구조물과 이동질량 사이의 순간적인 분리문제를 다루었다. 구조물 위를 이동하는 이동물체에 의한 동적응답 및 진동에 관해 이제까지 주류를 이룬 연구들은 해석적 연구들이 대부분이었고, 실험적 검증 연구들은 극소수에 불과한 실정이다. 특히, 이동질량의 가속도를 고려한 연구에 있어서도 해석적인 연구조차 극소수에 불과하고 실험적 연구는 거의 없는 것으로 사료된다. 따라서 본 연구의 목적은 속도변화를 갖는 이동질량에 의한 외팔보 구조물의 동적응답을 수치해석과 실험을 통하여 검증하는데 있다.

## 2. 이론

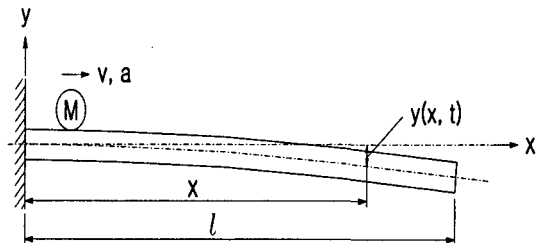


Fig. 1 Mathematical model of a cantilevered beam under a moving mass with variable speeds.

변동속도로 이동하는 이동질량에 의한 외팔보의 수학적

\* 정회원, 국방과학연구소

E-mail : 244165@naver.com

Tel : (042)821-3584, Fax: (042)821-2390

\*\* 정회원, 한밭대학교 기계공학부

\*\*\* 정회원, 삼척대학교 기계공학부

\*\*\*\* 한밭대학교 신소재공학부

모델은 Fig. 1과 같고, 운동 지배방정식은 식 (1)과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = mg + Mg\delta(x-vt) - M \left[ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} v + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} a + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \right] \delta(x-vt) \quad (1)$$

여기서,  $E$ 는 보의 탄성계수,  $I$ 는 보 단면의 2차모멘트,  $m$ 은 보의 단위길이 당 질량,  $l$ 은 보의 길이,  $M$ 은 이동질량 크기,  $g$ 는 중력가속도,  $v$ 와  $a$ 는 각각 이동질량의 속도와 가속도,  $\delta(x-vt)$ 는 Dirac 델타함수를 의미한다. 또한,  $\frac{\partial}{\partial t}$ 와  $\frac{\partial}{\partial x}$ 는 각각 시간과 축 방향 좌표에 대한 미분 연산자를 나타낸다.

식 (1)에서 보의 전체응답  $y(x,t)$ 는 초기 정적 처짐  $y_s(x)$ 와 이동질량에 의한 동적 처짐  $y_d(x,t)$  합으로 다음과 같다.

$$y(x,t) = y_s(x) + y_d(x,t) \quad (2)$$

계산의 편리상 다음의 변수와 무차원 좌표들을 이용한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad v^* = \frac{v}{l}, \quad a^* = \frac{a}{l} \quad (3)$$

식 (2)의 해를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 운동 지배방정식을 얻게 된다.

$$\frac{EI}{l^4} \frac{\partial^4 y(\xi,t)}{\partial \xi^4} + m \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2} = mg + \frac{M}{l} \left[ g - \left\{ v^{*2} \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial \xi^2} + 2 v^* \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial \xi \partial t} + a^* \frac{\partial y(\xi,t)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial t^2} \right\} \right] \delta(\xi - v^*t) \quad (4)$$

Galerkin의 모드 합 방법을 이용하여, 무차원화된 해를 각각 다음과 같이 가정한다.

$$y_s(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_i(\xi) \quad (5)$$

$$y_d(\xi,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(\xi) \quad (6)$$

$$y(\xi,t) = \sum_{i=1}^{\infty} [A_i + q_i(t)] \phi_i(\xi) \quad (7)$$

여기서,  $\phi_i(\xi)$ 는 계의 형상함수로서 보의 형상 및 경계조건에 의하여 결정되며 다음과 같다.

$$\phi_i(\xi) = \cos\beta_i - \cosh\beta_i + \frac{\sinh\beta_i - \sin\beta_i}{\cosh\beta_i + \cos\beta_i} (\sinh\beta_i - \sin\beta_i) \quad (8)$$

한편,  $y_s'''' = \frac{ml^4 g}{EI}$ 의 관계로부터 식 (7)을 적용하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_i''''(\xi) = \frac{ml^4 g}{EI} \quad (9)$$

여기서,  $\phi_i''''(\xi) = \beta_i^4 \phi_i(\xi)$ 이므로 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \beta_i^4 \phi_i(\xi) = \frac{ml^4 g}{EI} \quad (10)$$

식 (10)의 양변에  $\phi_j(\xi)$ 를 내적하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \beta_i^4 \int_0^1 \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi = \frac{ml^4 g}{EI} \int_0^1 \phi_j(\xi) d\xi \quad (11)$$

이제, 식 (4)에 식 (7)을 대입하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{EI}{l^4} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i''''(\xi) q_i(t) + m \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\xi) \ddot{q}_i(t) = \frac{M}{l} \left[ g - \left\{ v^{*2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i''(\xi) [A_i + q_i(t)] + 2v^* \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i'(\xi) \dot{q}_i(t) + a^* \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\xi) [A_i + q_i(t)] + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\xi) \ddot{q}_i(t) \right\} \right] \delta(\xi - v^*t) \quad (12)$$

식 (12)에  $\phi_n(\xi)$ 를 내적하면 다음과 같이 정리된다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k) \phi_{n,k}(\xi_k) d\xi_k + \frac{M}{m_k l} \phi_{i,k}(v^*t) \phi_{n,k}(v^*t) \right] \ddot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{M}{m_k l} 2v^* \phi_{i,k}'(v^*t) \phi_{n,k}(v^*t) \right] \dot{q}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{EI}{m l^4} \beta_i^4 \int_0^1 \phi_{i,k}(\xi_k) \phi_{n,k}(\xi_k) d\xi_k + \frac{M}{m l} v^{*2} \phi_{i,k}''(v^*t) \phi_{n,k}(v^*t) + \frac{M}{m l} a^* \phi_{i,k}'(v^*t) \phi_{n,k}(v^*t) \right] q_i(t) = \frac{M}{m l} \left[ g - v^{*2} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_{i,k}''(v^*t) - a^* \sum_{i=1}^{\infty} A_i \phi_{i,k}'(v^*t) \right] \phi_{n,k}(v^*t) \quad (13)$$

식 (13)을 다시 정리하면, 다음과 같은 행렬형태의 운동 지배방정식을 얻게 된다.

$$[M(t)]\{\ddot{\varphi}(t)\} + [C(t)]\{\dot{\varphi}(t)\} + [K(t)]\{\varphi(t)\} = \{f(t)\} \quad (14)$$

### 3. 수치해석 결과 및 검토

변동속도를 갖는 이동질량에 의한 외팔보의 동적응답 수

치해석 결과는 Runge-Kutta 적분방법을 이용하였다. 임계 속도를  $v_{cr}$ 을  $v_{cr} = \frac{w_1 l}{\pi}$ 라 할 때, 속도비  $v_0$ 는  $v_0 = \frac{v}{v_{cr}}$  이고, 가속도 비는  $a_0 = \frac{\pi^2 a^*}{w_1^2}$ 를 의미한다. 여기서, 임계속도  $v_{cr}$ 과 임계가속도  $a_{cr}$ 이라 함은 각각 보의 1차 모드(first mode)와 공진을 일으킬 때의 이동질량의 속도와 가속도를 의미한다. 본 논문의 수치해석의 경우, 보의 첫 번째 고유 각진동수  $w_1$ 은 약 20.0474(rad/s)이며,  $v_{cr}$ 은 약 6.38129(m/s),  $a_{cr}$ 은 약 40.7208(m/s<sup>2</sup>) 값으로 계산되었다.

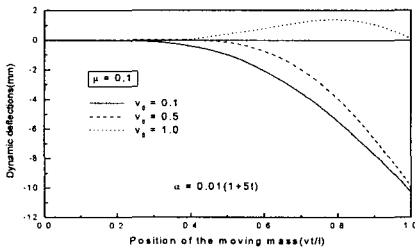


Fig. 2 Dynamic response at the position of the moving mass with accelerations( $\mu = 0.1$ ).

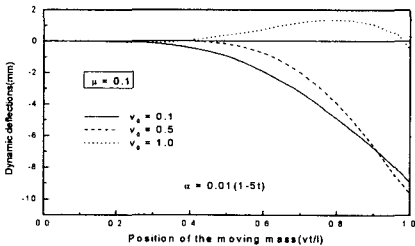


Fig. 3 Dynamic response at the position of the moving mass with decelerations( $\mu = 0.1$ ).

Fig. 2에서 Fig. 3은 이동질량의 질량비  $\mu$ 가  $\mu = 0.1$ 이고, 초기속도 비가  $v_0 = 0.1, 0.5, 1.0$ 일 때, 가속도가 각각 1차 함수 형태로 가속과 감속이 되는 두 경우에 대해 시간 응답을 보여준다. 이들 그림에 있어 임계속도 비 미만에서의 최대 동적응답 값은 가속이 있는 경우가 감속의 경우보다 다소 크게 나타남을 알 수 있다. Fig. 4에서 Fig. 5는 이동질량의 질량비  $\mu$ 가  $\mu = 0.5$ 이고, 초기속도 비가  $v_0 = 0.1, 0.5, 1.0$ 일 때, 가속도가 각각 1차함수 형태로 가속과 감속이 되는 두 경우에 대해 시간 응답을 보여준다. 이들 그림에 있어서도 Fig. 2에서 Fig. 3과 유사하게 초기속도 비가 임계속도 미만에서는 최대 동적응답 값은 가속이 있는 경우가 감속의

경우보다 다소 크게 나타남을 알 수 있다.

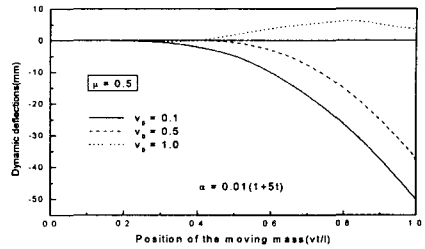


Fig. 4 Dynamic response at the position of the moving mass with accelerations( $\mu = 0.5$ ).

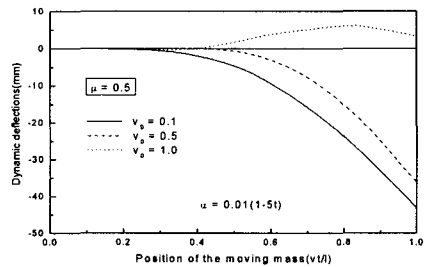
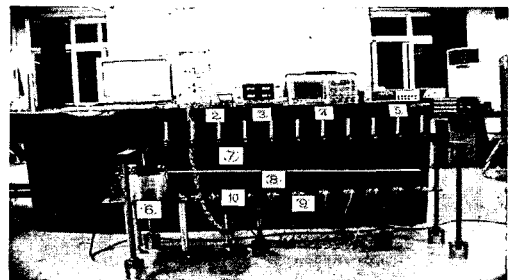


Fig. 5 Dynamic response at the position of the moving mass with decelerations( $\mu = 0.5$ ).

#### 4. 실험장치 및 실험

속도변화를 가진 이동질량에 의한 외팔보의 동적응답에 관한 실험적 검증을 위해 실험 장치를 설계·제작하였으며, 실험장치에 대한 그림은 Photo. 1과 같다.



①Computer ②Data capture board ③Power supply ④Memory oscilloscope ⑤Displace sensor controller ⑥Fixed condition part ⑦Laser pointer ⑧Test beam ⑨Photo-diode sensor ⑩Laser displacement sensor  
Photo. 1 Photograph of the experimental setup.

보의 동적응답은 보의 진입 단에서 0.25 m 되는 위치에서

비접촉 레이저 변위계로 측정하였다. 이동질량이 보 위를 지나는 동안 속도변화 값은 포토다이오드센서에 의해 측정된다. 시험에 앞서 계의 동특성을 알아보기 위하여 보에 대한 자유진동 실험을 실시하였으며, 이론적으로 계산된 외팔보의 1, 2차 고유진동수 값 ( $f_1=3.1926(Hz)$ ,  $f_2=20.01(Hz)$ )과 실험 값( $f_1=3.1926(Hz)$ ,  $f_2=20.01(Hz)$ )의 오차는 작은 것으로 나타났다. 한편, 시험 보에 대한 제원은 Table 1과 같다.

Table 1 Details of the test beam

Material	Aluminum 6061
Modulus of Elasticity(Gap)	7.07e+10
Density( $kg/m^3$ )	2700
Mass(g)	387.0
Length(mm)	1000.0
Width(mm)	40.0
Thickness(mm)	4.0
Groove width(mm)	10.0
Groove depth(mm)	2.0

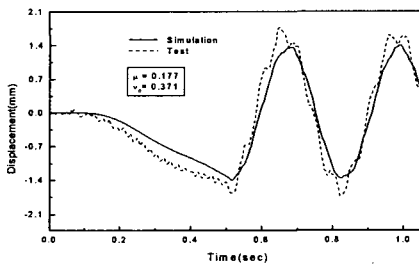


Fig. 6 Time responses of the beam with accelerations ( $x_g=0.25m$ ,  $\mu=0.177$ ).

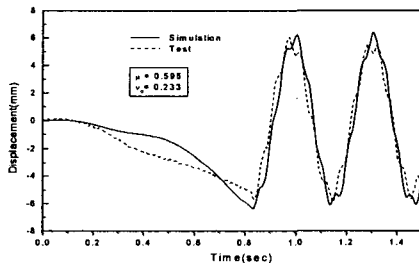


Fig. 7 Time responses of the beam with accelerations ( $x_g=0.25m$ ,  $\mu=0.595$ ).

Fig. 6은 이동질량의 질량이  $66.8g(\mu=0.177)$ , 초기 속도가  $v=2.364m/s(v_0=0.371)$ 인 경우, Fig. 7은 이동질량이  $225.04g(\mu=0.595)$ , 초기속도가  $v=1.49m/s(v_0=0.233)$ 인 경우에 대해 수치 시뮬레이션과 실험에 의한 보의 동적응답 값을 비

교한 그림이다. 수치해석과 실험결과와의 다소 오차가 있는 것은 외팔보 고정단의 완전 고정 문제, 보위를 지나는 이동질량에 의한 보 구간 구간별 순간속도 측정의 오차, 초기속도의 정확한 측정이 잘 이루어지지 않은 것으로 사료된다.

## 5. 결론

변동속도를 가지고 이동하는 이동물체에 의한 외팔보의 동적응답에 관한 수치 및 실험결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 가속과 감속이 되는 두 경우의 시간 응답에 있어, 임계속도비 미만에서의 최대 동적응답 값은 가속이 있는 경우가 감속의 경우보다 다소 크게 나타남을 알 수 있다.

둘째, 이동질량에 의한 보의 동적응답 수치결과와 실험결과와의 비교는 경미한 오차가 있었으나 이는 정확한 속도계측과 보의 고정단의 완전고정 문제 등이 해결되면 더 근접된 결과를 나타낼 것으로 사료된다.

## 참고문헌

- (1) Stokes, G. G., "Discussion of Differential Equation Relating to the Breaking of Railway Bridges", Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 8, pp.707-735, 1849.
- (2) Arye, R. S., Ford, G. and Jacobsen, L. S., "Transverse Vibration of a Two-Span Beam under Action of a Moving Constant Force", Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 17, pp.1-12, 1950.
- (3) Simkins, T. E., Pflieg, G. and Scanlon, R. S., "Dynamic Response of the M113 Gun Tube to Travelling Ballistic Pressure and Data Smoothing as Applied to XM150 Acceleration Data", Watervliet Arsenal Technical Report, WVT-TR-75015, 1975.
- (4) Simkins, T. E. , "Structural Response to Moving Projectile Mass by the Finite Element Method", Watervliet Arsenal Technical Report, WVT-TR-75044, 1975.
- (5) Esmailzadeh, E. and Ghorashi, M., "Vibration Analysis of Beams Traversed by Moving Masses", Proceeding of the International Conference on Engineering Application of Mechanics", Tehran, Iran, Vol. 2, pp.232-238, 1992.
- (6) Ghorashi, M., "Dynamic and Vibratory Analysis of Beams under Dynamic Loads Induced by Travelling Masses and Vehicles", Ph. D. Dissertation, Sharif University of Technology, Tehran, 1994.
- (7) U. Lee, "Separation Between the Flexible Structure and the Moving Mass Sliding on It", Journal of Sound and Vibration, Vol. 209, No.5, pp.867-877, 1998.