

# 상태공간 Newmark 기법을 이용한 로터-베어링 시스템의 충격응답 해석

## Shock Response Analysis of Rotor-Bearing System using the State-Space Newmark Method

이안성\* · 김병옥\*\* · 김영철\*\* · 김영춘\*\*\*

An Sung Lee, Byung Ok Kim, Young-Cheol Kim and Yeong-Chun Kim

**Key Words** : Rotor(회전체), Transient Response(과도응답), Newmark Method(뉴마크기법), Error Estimate(오차추정), Direct Time Integration(직접시간적분)

### ABSTRACT

In this study was proposed a transient response analysis technique of a rotor system, applying the generalized FE modeling method of a rotor-bearing system considering a base-transferred shock force and together the state-space Newmark method of direct time integration scheme based on the average velocity concept. Experiments were performed to a test rig of a mock-up rotor-bearing system with series of half-sine shock waves imposed by an electromagnetic shaker, and quantitative error analyses between analytical and experimental results were carried out. The transient responses of the rotor were sensitive to duration times and shape-qualities of the shock waves, and overallly the analytical results agreed quite well with the experimental ones. Particularly, in cases that the frequencies,  $1/(2 \times \text{duration time})$ , of the shock waves were close to the critical speed of the rotor-bearing system, resonances occurred and the transient responses of the rotor were amplified.

### 1. 서 론(Introduction)

항공기, 선박, 우주비행체 등의 운송시스템에 장착되는 터빈, 펌프, 압축기와 같은 터보기계는 운송시스템의 운전조건 및 외부환경 등의 영향으로 돌발적인 충격력을 경험하게 된다. 이러한 충격력은 기초를 통하여 터보기계의 핵심부인 로터-베어링 시스템에 직접 전달되어 로터와 베어링, 시일, 스테이터 사이의 직접 충돌에 따른 손상 또는 접촉마찰에 기인한 로터의 위험한 고진동을 유발할 수 있다. 따라서, 위험한 충격환경에 노출되며 중대기능(critical mission)을 수행하는 터보기계의 경우, 기초전달 충격력에 대한 로터의 과도응답을 정확히 예측하고 안정성을 평가할 수 있는 해석기술이 요구된다.

기초전달력에 대한 로터-베어링 시스템의 과도응답 해

석은 시스템의 모델링 방법, 가진력의 형태에 따라 분류할 수 있다. Hori와 Kato<sup>(1)</sup>는 Jeffcott 로터모델을 이용하여 유막베어링으로 지지되는 로터에 지진하중이 작용할 경우 시스템의 안정성에 관하여 조사하였다. Tessarzik<sup>(2)</sup> 등은 기초에서 발생하는 축방향 랜덤가진(random excitation)에 대해 상대좌표를 고려한 단순 로터시스템의 과도응답 해석을 수행하였으며, Soni와 Srinivasan<sup>(3)</sup>은 강체로터의 지진하중 응답을 조사하였다. Singh<sup>(4)</sup> 등, Suarez<sup>(5)</sup> 등, Gaganis<sup>(6)</sup> 등은 지진응답해석을 위하여 기초운동을 포함한 유한요소 로터모델을 제시하여 지진과도응답 해석을 수행하였다. 특히 Suarez 등은 기초의 회전운동에 의해 발생하는 매개변수 및 비선형 효과를 로터-베어링 시스템 모델에 포함시키므로서 가장 일반적인 기초가진 로터-베어링 모델을 제시하였다.

동적시스템의 과도응답을 구하기 위한 직접시간적분법은 Runge-Kutta법과 같은 explicit법과 Newmark법과 같은 implicit법이 있다. 일반적으로 explicit법은 시간스텝  $\Delta t$ 가 수치적 안정성에 매우 제한적인 조건으로 작용되기 때문에 큰 자유도를 가진 동적시스템에서는 임의의  $\Delta t$ 에 대해서 수치적 안정성을 가지는 implicit법이 주로 사용된다<sup>(7)</sup>. 그 중에서 가장 널리 사용되는 방법은

\* 한국기계연구원 구조연구부 회전체그룹

E-mail : aslee@kimm.re.kr

Tel: (042) 838-7356, Fax: (042) 838-7440

\*\* 한국기계연구원 구조연구부 회전체그룹

\*\*\* 두산중공업(주) 기술연구원

Newmark법으로서, 수치적 안정성이 보장되며 2nd order의 정확성을 가진 평균가속도 기반의 Newmark법이 주로 사용되고 있다<sup>(8)</sup>. 로터-베어링 시스템의 경우, 자이로스코픽(gyroscopic) 효과와 베어링 강성 및 감쇠의 비대칭으로 인하여 흔히 상태공간 벡터를 도입한 상태공간 1차 미분방정식 형태로 표현하여 시스템의 고유치해석을 수행한다. 기존의 평균가속도 기반 Newmark법은 상태공간 1차 미분방정식에는 적용할 수 없기 때문에 해석의 일관성 유지를 위하여 Kim과 Lee<sup>(9)</sup>가 제안한 평균가속도 개념을 이용한 상태공간 Newmark법을 수치적 과도응답을 구하는데 적용하고자 한다.

앞서 언급한 대부분의 선행연구들은 기초가진의 형태와 이에 따른 해석모델 구축에 집중되어있고, 실험적 해석을 통한 해석모델의 증명이나 동적과도응답의 정량적인 오차분석은 수행되지 않았다. 따라서, 본 연구에서는 기초전달 충격을 고려한 로터-베어링 시스템의 일반화된 FE 모델링 기법과 평균가속도 개념에 기초한 상태공간 Newmark 직접시간분법을 적용한 로터의 과도응답 해석기술을 제안함과 동시에 모델링 기법 및 해석기술의 증명을 위하여 모사 로터-베어링 시스템에 대해 전자기 가진기(electro-magnetic exciter)를 사용한 반-사인파(half sine wave) 기초전달 충격 실험이 수행되었으며, 해석과 실험결과의 정량적인 오차분석이 수행되었다.

## 2. 운동방정식(Equation of Motion)

### 2.1 운동해석(Kinematic Analysis)

Fig. 1과 같은 강체기초(Rigid base)에 놓여있는 로터-베어링 시스템에서 좌표계 XYZ는 관성기준계(inertial reference frame)이고, 좌표계 xyz는 기초에 부착된 기준계로 가정한다. 로터상의 임의 점 P에서 미소요소s의 x, y방향 병진변위를 각각  $u_x, u_y$ 라 하고, 회전변위를 각각  $\theta_x, \theta_y$ 로 정의한다. 축회전은 z축에 대해서 일정한 각속도  $\Omega$ 로 회전한다고 가정하고, z방향으로의 축변형은 고려하지 않는다. 또한 XYZ에 대한 기초의 병진변위 성분을 각각  $u_{bx}, u_{by}, u_{bz}$ , 각 방향으로의 회전성분을  $\theta_{bx}, \theta_{by}, \theta_{bz}$ 로 정의한다.

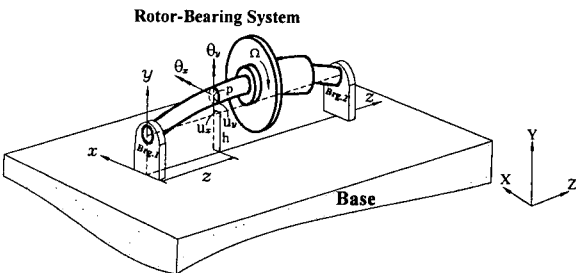


Fig. 1 Rotor-bearing system with rigid base and definition of coordinate systems

점 P의 위치벡터  $\{r_p\}$ 는 XYZ에 대한 위치벡터로서, XYZ에 대한 xyz의 원점 위치벡터  $\{r_b\}$ 와 xyz에 대한 점 P의 위치벡터  $\{r\}$ 의 합으로 표현된다.

$$\{r_p\} = \{r_b\} + \{r\} \quad (1)$$

여기서,  $\{r\} = \{u_x \ u_y + h \ z\}^T$ 이며, 점 P의 속도벡터는 다음과 같다.

$$\{\dot{r}_p\} = \{\dot{r}_b\} + \{\dot{r}\} + [w_b]\{\dot{r}\} \quad (2)$$

여기서,  $\{\dot{r}_b\} = \{\dot{u}_{bx} \ \dot{u}_{by} \ \dot{u}_{bz}\}^T$ ,  $\{\dot{r}\} = \{\dot{u}_x \ \dot{u}_y \ 0\}^T$

$$[w_b] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_{bz} & \dot{\theta}_{by} \\ \dot{\theta}_{bz} & 0 & -\dot{\theta}_{bx} \\ -\dot{\theta}_{by} & \dot{\theta}_{bx} & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2 에너지 방정식(Energy Equation)

집중질량을 나타내는 디스크의 에너지는 병진운동 에너지  $T_d^t$ 와 회전운동 에너지  $T_d^r$ 의 합으로 나타낼 수 있다. 만약 디스크가 점 P에 위치한다면

$$T_d^t = \frac{m_d}{2} \{\dot{r}_p\}^T \{\dot{r}_p\} \quad (3)$$

$$T_d^r = \frac{1}{2} \{w\}^T [I_d] \quad (4)$$

여기서,  $m_d$ 는 원판의 질량이고,  $\{w\}$ 는 오일러각(Euler angle)으로 표현되는 주축의 각속도벡터이다. 또한  $[I_d] = [I_x^d \ I_y^d \ I_z^d]^T$ 이고  $I_x^d, I_y^d$ 는 각각 디스크의 횡관성 및 극관성모멘트를 나타낸다. 식(4)에서  $\{\dot{r}_p\}^T \{\dot{r}_p\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\dot{r}_p\}^T \{\dot{r}_p\} = \{\dot{r}_b\}^T \{\dot{r}_b\} + \{\dot{r}\}^T \{\dot{r}\} - \{\dot{r}_p\}^T [w_b]^2 \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}\}^T [w_b] \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}_b\}^T \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}_b\}^T [w_b] \{\dot{r}\} \quad (5)$$

식(5)를 식(3)에 대입하면, 디스크의 전체 운동에너지  $T_d$ 는 다음과 같다.

$$T_d = \frac{m_d}{2} (\{\dot{r}_b\}^T \{\dot{r}_b\} + \{\dot{r}\}^T \{\dot{r}\} - \{\dot{r}\}^T [w_b]^2 \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}\}^T [w_b] \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}_b\}^T \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}_b\}^T [w_b] \{\dot{r}\}) + \frac{1}{2} (I_x^d \{\dot{\theta}\}^T \{\dot{\theta}\} + 2 \Omega I_y^d \{\dot{\theta}\}^T \{e_1\} \{e_2\}^T \{\theta\} + \Omega^2 I_z^d) \quad (6)$$

여기서,  $\theta = \begin{bmatrix} \theta_x + \theta_{bx} \\ \theta_y + \theta_{by} \end{bmatrix}$ ,  $\{e_1\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\{e_2\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

축에 대한 에너지는 운동에너지와 축변형으로 인한 변형에너지를 가진다. 점 P에서 미소요소 ds의 병진운동에 의한 운동에너지를  $dT_s^t$ , 회전운동에 의한 운동에너지를  $dT_s^r$ 라고 하면

$$dT_s^t = \frac{1}{2} \rho A \{\dot{r}_p\}^T \{\dot{r}_p\} ds \quad (7)$$

$$dT_s^r = \frac{1}{2} \rho \{w\}^T [I_s] ds \quad (8)$$

여기서,  $\rho$ 는 축요소s의 단위길이당 질량이며,  $[I_s] = [I_x^s \ I_y^s \ I_z^s]^T$ 이고  $I_x^s, I_y^s$ 는 각각 미소 축요소s의 횡관성 및 극관성모멘트를 나타낸다. 식(5)를 식(7)에 대입한 후 정리하면, 미소 축요소s의 전체 운동에너지  $dT_s$ 는 다음과 같다.

$$dT_s = \frac{1}{2} \rho A (\{\dot{r}_b\}^T \{\dot{r}_b\} + \{\dot{r}\}^T \{\dot{r}\} - \{\dot{r}\}^T [w_b]^2 \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}\}^T [w_b] \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}_b\}^T \{\dot{r}\} + 2 \{\dot{r}_b\}^T [w_b] \{\dot{r}\}) ds + \frac{1}{2} \rho (I_x^s \{\dot{\theta}\}^T \{\dot{\theta}\} + 2 \Omega I_y^s \{\dot{\theta}\}^T \{e_1\} \{e_2\}^T \{\theta\} + \Omega^2 I_z^s) ds \quad (9)$$

변형에너지는 순수굽힘에 의한 변형에너지  $dV_s^b$ 와 전단으로

인한 변형에너지  $dV_s$ 의 합으로 표현되며 전체 변형에너지  $dV_s$  다음과 같다.

$$dV_s = \frac{1}{2} \{EI \{\theta'\}^T \{\theta'\} + \kappa GA \{\theta_s\}^T \{\theta_s\}\} ds \quad (10)$$

여기서,  $\{\theta\} = \{\theta_x \ \theta_y\}^T$ ,  $\{\theta_s\} = \{u'_y + \theta_x \ u'_x - \theta_y\}^T$ , '은  $\frac{\partial}{\partial s}$  이다.

### 2.3 운동방정식(Equation of Motion)

디스크의 운동에너지 식(6)을 Langrange's 방정식에 적용하면 다음과 같은 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$[M_d]\{\ddot{q}_d\} + [C_d]\{\dot{q}_d\} + [K_d]\{q_d\} = \{f_{d1}(t)\} + \{f_{d2}(t)\} + \{f_{d3}(t)\} \quad (11)$$

여기서,  $\{q_d\} = \{u_x, u_y, \theta_x, \theta_y\}^T$ 이다. 식(11)은 기존의 디스크 운동방정식과는 달리  $[C_d]$ 항에 자이로스코픽 영향 외에 기초의 회전운동에 의한 매개변수 항이 추가가 되며,  $[K_d]$ 항이 추가로 생성된다. 또한 가진력항은 기초의 가속도에 의한 항과 속도의 곱으로 표현되는 비선형항으로 구성된다.

Fig. 2는 전형적인 축 요소를 나타내며, 축의 유한요소 운동방정식을 유도하기 위해 먼저  $\{r\}$ ,  $\{\theta\}$ ,  $\{\theta_s\}$ 는 보간함수를 이용하여 절점변위로 표현하여야 한다.

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ h \\ z \end{Bmatrix} = \{u\} + \{e\} = [N_r]\{q\} + \{e\} \quad (12)$$

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N_\theta]\{q\}, \{\theta_s\} = \begin{Bmatrix} u'_y + \theta_x \\ u'_x - \theta_y \end{Bmatrix} = [N_s]\{q\} \quad (13)$$

여기서,  $\{q\} = \{u_x, u_y, \theta_x, \theta_y, u_x, u_y, \theta_x, \theta_y\}^T$ ,  $\{e\} = \{0 \ h \ z\}^T$ 이며, 또한  $[N_r]$ ,  $[N_\theta]$ ,  $[N_s]$ 는 각각 병진변위, 회전변위, 전단 회전변위를 절점변위에 대해서 표현하는 보간함수 행렬이며 다음과 같다.<sup>(10)</sup>

$$[N_r] = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[N_\theta] = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & -\phi_3 & \phi_4 & 0 \\ \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[N_s] = \begin{bmatrix} \psi_1 - \phi_1 & \psi_1 - \phi_1 & -\psi_2 + \phi_2 & \psi_2 - \phi_2 & \psi_3 - \phi_3 & -\psi_3 + \phi_3 & \psi_4 - \phi_4 & \psi_4 - \phi_4 \\ \psi_1 - \phi_1 & \psi_1 - \phi_1 & \psi_2 - \phi_2 & \psi_2 - \phi_2 & \psi_3 - \phi_3 & \psi_3 - \phi_3 & \psi_4 - \phi_4 & \psi_4 - \phi_4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

식(9)와 식(10)에 식(12), 식(13)을 각각 대입하고, Lagrange's 방정식을 적용하면 다음과 같은 축 요소의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$([M_s'] + [M_s''])\{\ddot{q}_s\} + (\Omega [C_s'] + \dot{\theta}_{bz} [C_s''])\{\dot{q}_s\} + ([K_s'] + [K_s''] + \dot{\theta}_{bz} [K_s''])\{q_s\} = \{f_{s1}(t)\} + \{f_{s2}(t)\} + \{f_{s3}(t)\} \quad (17)$$

식(17)에서도 디스크의 운동방정식과 마찬가지로 기존의 축 요소 운동방정식과는 달리 매개변수항이 발생하며, 또한 가진력항에 비선형항이 생성된다.

선형화된 베어링요소를 고려하고 가진력 등을 조합하면 전체 운동방정식은 다음과 같은 형태로 쓸 수 있다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{f(t)\} \quad (18)$$

식(18)을 상태공간벡터(state-space vector)  $\{r\}$ 을 사용하면 다음과 같은 1차 상미분 방정식으로 표현할 수 있다.

$$\{\dot{r}\} = [A]\{r\} + \{F\} \quad (19)$$

여기서,

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} [M]^{-1}f(t) \\ \{0\} \end{Bmatrix}, \{r\} = \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ q \end{Bmatrix}^T, \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ \{0\} \end{Bmatrix}^T$$

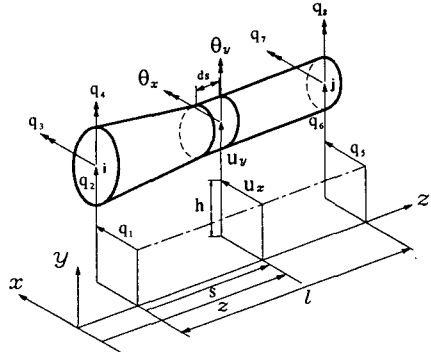


Fig. 2 Typical shaft element and its coordinates

## 3. 과도응답해석(Analysis of transient response)

### 3.1 상태공간 Newmark법(State-space Newmark method)

동적 시스템의 과도응답을 구하기 위한 직접시간적분법에는 여러 가지 방법이 있지만 시간스텝  $\Delta t$ 의 크기에 상관없이 무조건적 수치 안정성을 가진 Newmark법이 가장 널리 사용된다. 그러나 기존의 평균가속도 기반의 Newmark법은 식(18)과 같은 2차 미분방정식에만 적용할 수 있고 식(19)에 표현된 1차 미분방정식에는 적용할 수 없다. 본 절에서는 해석의 일관성 유지를 위하여 식(19)를 그대로 적용할 수 있는 평균가속도 기반의 상태공간 Newmark법을 사용하고자 한다. 상태공간 Newmark법은 Fig. 3에서의 같이 시간스텝  $\Delta t$  사이의 속도변화를 평균속도로 가정한다. 시간간격 내의 시간을  $\tau$  ( $0 \leq \tau \leq \Delta t$ )로 정의하면, 평균속도는

$$\{\dot{r}(\tau)\} = \frac{1}{2} \{ \{\dot{r}\}_{n+1} + \{\dot{r}\}_n \} \quad (20)$$

초기조건  $\tau=0$ 에서  $\{r\}_n$ 을 고려하여 식(20)을 적분하면 변위는 다음과 같다.

$$\{r(\tau)\} = \{r\}_n + \frac{\tau}{2} \{ \{\dot{r}\}_{n+1} + \{\dot{r}\}_n \} \quad (21)$$

$\tau = \Delta t$ , 즉 시간  $t_{n+1}$ 에서의 변위는 식(21)으로부터

$$\{r\}_{n+1} = \{r\}_n + \frac{\Delta t}{2} \{ \{\dot{r}\}_{n+1} + \{\dot{r}\}_n \} \quad (22)$$

식(22)로부터 시간  $t_{n+1}$ 에서의 속도는

$$\{\dot{r}\}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \{ \{r\}_{n+1} - \{r\}_n \} - \{\dot{r}\}_n \quad (23)$$

식(19)에 대해 시간  $t_{n+1}$ 에서의 운동방정식을 고려하고, 식(23)을 대입하여 정리하면,

$$\{r\}_{n+1} = ([I] - \frac{\Delta t}{2} [A])^{-1} \{ \{r\}_n + \frac{\Delta t}{2} \{\dot{r}\}_n + \frac{\Delta t}{2} \{F\}_{n+1} \} \quad (24)$$

시간  $t_n$ 에서의 상태값을 이용하여 식(24)를 계산하면 시간  $t_{n+1}$ 에서의 상태값 또는 변위 및 속도벡터가 구해진다. 이상

에서 제안된 상태공간 Newmark법은 기존의 방법에 비해 정식화가 보다 간편하게 이루어지며, 프로그램 코딩이 용이하다.

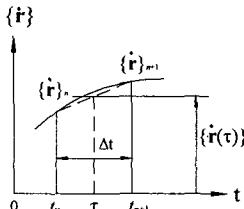


Fig. 3 State-space Newmark's constant average velocity

### 3.2 수치 시뮬레이션(Numerical Simulation)

기초전달 충격력에 의한 로터-베어링 시스템의 과도응답 FE 모델을 Fig. 4에 나타내었으며, 시간영역에서의 과도응답 수치해석 방법은 앞서 언급한 상태공간 Newmark법을 적용하였다. 제시한 모델의 1, 2차 역·정성회 위험속도는 각각 50.64, 50.74, 131.03, 134.86Hz이며, 정격회전속도는 6,000rpm이다. 또한 집중질량을 나타내는 D1, D2, D4, D6에서의 불균형(unbalance)은 각각 40g·mm이다. 정격속도 6,000rpm으로 회전하는 로터-베어링 시스템에 Fig. 5와 6에서 보는 바와 같이 y방향으로 최대가속도가 3g인 반사인파를 기초에 가진시켰으며, 이 때 인가시간(duration time for excitation)은 10ms이다. Brg. 1에서 y방향 최대응답은 398.8 $\mu$ m(pk-pk), Brg. 2에서는 520.9 $\mu$ m(pk-pk) 각각 발생되었다. 충격을 y방향으로만 가진시켰음에도 불구하고, 자이로스코픽 효과와 같은 연성효과 때문에 x방향으로 충격영향이 전달되어 진폭이 점차적으로 증가됨을 알 수 있다.

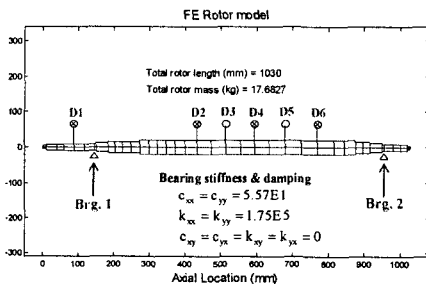


Fig. 4 FE Rotor model for numerical simulation

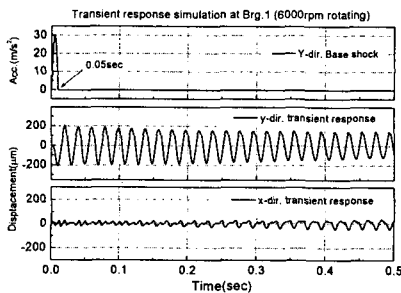


Fig. 5 Shock wave and transient response simulation at Brg. 1

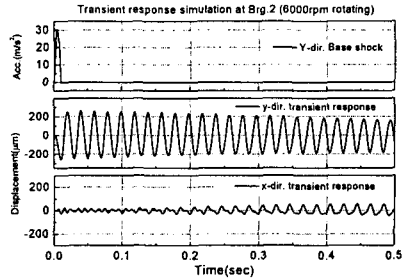


Fig. 6 Shock wave and transient response simulation at Brg. 2

### 3.3 실험적 과도응답(Experimental transient response)

Simulation 결과를 검증하기 위한 방법으로 FE모델과 동일한 모델(Fig. 7 참조)을 설계·제작하여 기초전달 충격시험을 수행하였다. 모달테스트 결과, 1차 및 2차 위험속도는 각각 51Hz, 134.6Hz로서 FE 모델과 거의 동일하였으며, 또한 영향계수법(influence coefficient method)을 이용하여 잔류불균형 조절하였다. 기초전달 충격시험을 위하여 충격가진이 가능한 전자기 가진기를 이용하였으며, 충격주파수에 따른 로터-베어링 시스템의 동적거동을 검토하기 위하여 인가시간이 각각 5ms, 10ms, 15ms 인 경우에 대해서 최대가속도 크기가 약 3g가 되도록 반-사인파를 y방향으로 가진시켰다. Fig. 8은 충격시험에 사용된 기초전달 충격파의 주파수 스펙트럼을 보이고 있다.



Fig. 7 Experimental rotor-bearing model

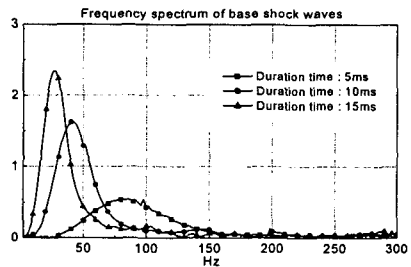


Fig. 8 Frequency spectrum of experimental base shock waves (Y-dir)

### 3.4 오차추정(Error estimate)

일반적으로 해석 및 실험적 시간응답의 크기와 위상이

일치하는 경우는 거의 없기 때문에 정량적인 오차 추정 방법을 이용하여 정확도를 평가해야 한다. 이를 위하여 해석적인 과도응답  $\bar{\epsilon}_1$ 과 실험적인 과도응답  $\bar{\epsilon}_2$ 사이의 위상오차인자(phase error factor)  $\epsilon_p$ , 크기오차인자(magnitude error factor)  $\epsilon_m$ , 종합오차인자(comprehensive error factor)  $\epsilon_c$ 를 제시하여 두 응답의 정확도를 평가하고자 한다. 데이터의 길이가  $N$ 개인 과도응답  $\bar{\epsilon}$ 는 응답의 크기  $m$ 과 단위벡터  $\bar{\epsilon}$ 의 곱으로 표현할 수 있다.

$$\bar{\epsilon} = m \bar{\epsilon} \quad (25)$$

여기서,  $m = \sqrt{\sum_{i=1}^N t(i)^2}$ ,  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}/m$ 이다.  $\epsilon_p$ 는 두 응답사이의 위상관계(phase correlation)  $p_a = \bar{\epsilon}_1 \cdot \bar{\epsilon}_2$ 를 이용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\epsilon_p = \frac{\cos^{-1}(p_a)}{\pi}, 0 \leq \epsilon_p \leq 1, \begin{cases} \epsilon_p = 0 & \rightarrow \text{no error phase} \\ \epsilon_p = 1 & \rightarrow \text{out of phase} \end{cases} \quad (26)$$

여기서,  $p_a = C/\sqrt{AB}$ ,  $A = \sum_{i=1}^N t_1(i)^2$ ,  $B = \sum_{i=1}^N t_2(i)^2$ ,  $C = \sum_{i=1}^N t_1(i)t_2(i)$ 이다.  $\epsilon_m$ 은 상대크기오차(relative magnitude error)  $m_a = (A-B)/\sqrt{AB}$ 를 이용하여 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon_m = \text{sign}(m_a) \text{Log}_{10}(1 + |m_a|) \quad (27)$$

$\epsilon_m = 0$ 이면 크기오차가 없으며, 오차가 커지더라도 어느 일정 값으로 수렴하기 때문에  $\epsilon_m$ 값은 발산하지는 않는다.  $\epsilon_c$ 는  $\epsilon_p$ 와  $\epsilon_m$ 를 이용하여 두 과도응답의 종합적인 오차경향을 나타내며 다음과 같이 정의한다.

$$\epsilon_c = \sqrt{x(\epsilon_m^2 + \epsilon_p^2)} \quad (28)$$

여기서,  $x$ 는 scale factor이고 추천되는 값은  $\pi/4$ 이다. 충격응답에 대한 두 과도응답의 오차범위는 앞에서 언급한  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_m$ ,  $\epsilon_c$ 의 절대값이 0.2보다 작은 값을 추천한다<sup>(11)</sup>.

#### 4. 결과비교(Comparison of results)

기초전달 충격력에 대한 로터-베어링의 과도응답 simulation 결과와 실험결과를 Fig. 9~14에 나타내었다.  $y$ 방향 충격가진의 인가시간이 5ms인 경우 Brg. 1에서  $y$ 방향 응답은  $\epsilon_m$ 값이 0.2보다 작은 값을 유지하지만  $\epsilon_p$ 는 0.2보다 다소 큰 값을 가짐을 알 수 있다. 그러나 Brg. 2에서  $y$ 방향 응답은  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_m$ ,  $\epsilon_c$  모두 0.2보다 작은 값을 가지므로서 simulation 결과가 신뢰할 만한 정확도를 가짐을 알 수 있다. 인가시간이 10ms, 15ms인 경우에도 Brg. 1과 Brg. 2에서  $y$ 방향 응답 오차인자들의 값이 모두 0.2보다 작기 때문에 신뢰할 만한 정확도를 가짐을 알 수 있다. 특히, 인가시간이 10ms인 경우 충격가진의 주파수 성분이 시스템의 1차 위험속도와 인접하기 때문에 공진으로 인하여 진폭이 커짐을 알 수 있다.  $x$ 방향으로의 응답은 simulation 결과와 실험결과가 다소 차이가 있

음을 알 수 있는데 이는 simulation 모델과는 달리 실험 모델의 베어링 강성 및 감쇠에 연성효과가 개재되어 발생한 오차이다.

#### 5. 결론(Conclusion)

본 연구에서는 기초전달 충격력이 로터-베어링 시스템에 작용할 경우 해석 및 실험적 모델을 이용하여 시스템의 과도동적응답을 조사하였으며, 또한 두 응답의 정확도 분석을 위하여 정량적인 오차분석 등 종합적인 연구를 수행하였다. 상세 과도응답 해석을 위하여 기존의 해석모델과는 달리 기초의 병진 및 회전운동을 고려한 일반적인 모델을 사용하였으며, 그 결과 시스템 행렬에 매개변수 항과 가진력항에 비선형 항이 발생함을 알 수 있었다. 과도응답을 구하기 위하여 사용된 수치기법은 평균속도 기반의 상태공간 Newmark법을 적용하였으며, 이 방법은 고유치 해석을 위해 사용한 상태공간 시스템 행렬을 직접적으로 적용할 수 있는 방법으로 수치해를 구하기 위한 정식화가 간단하고 프로그램 코딩이 매우 용이한 수치방법이다. 이론모델 및 수치기법을 검증하기 위하여 동일한 실험모델을 구성하였으며, 모델의 동일성을 검증하기 위하여 모달테스트를 수행하였다. 기초의 충격가진을 위하여 전자기 가진기를 사용하였으며, 충격 주파수의 영향을 고려하기 위하여 인가시간이 5ms, 10ms, 15ms에 대해서 실험을 각각 수행하였다. Simulation 결과와 실험결과의 정량적인 정확도분석을 위하여  $\epsilon_m$ ,  $\epsilon_p$  및  $\epsilon_c$ 를 도입하여 오차 분석을 수행하였다. 각각의 인가시간에 대해서 두 응답의 오차는 대부분 허용범위를 넘지 않아 이론모델 및 수치기법의 타당성을 입증하였으며, 특히 기초전달 충격파의 주파수 ( $1/[2 \times \text{인가시간}]$ )가 로터-베어링 시스템의 위험속도에 근접할 경우, 공진으로 인하여 로터의 과도응답 진폭이 매우 커짐을 알 수 있었다.

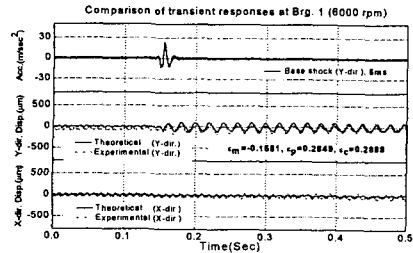


Fig. 9 Base shock wave and comparison of transient responses at Brg. 1 (Duration time : 5ms)

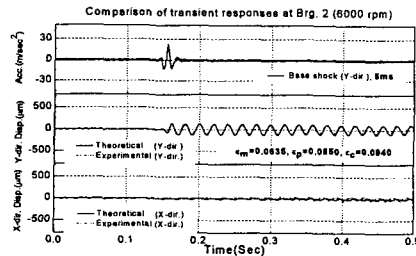


Fig. 10 Base shock wave and comparison of transient responses at Brg. 2 (Duration time : 5ms)

## 후 기

본 연구는 한국기계연구원 기본사업 '동역학 시뮬레이션 기술개발' 과제의 지원을 받아 수행되었으며, 관계자 여러분에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Y. Hori, T. Kato, 1992, "Earthquake-induced instability of a rotor supported by oil film bearings," ASME Journal of Vibration and Acoustics Vol. 112, pp. 160~165.
- (2) J. M. Tesarzik, T. Chiang, R. H. Badgley, 1974, "The response of rotating machinery to external random vibration," ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 96, pp. 477~489.
- (3) A. H. Soni, V. Srinivasan, 1983, "Seismic analysis of a gyroscopic mechanical system," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 105, pp. 449~455.
- (4) M. P. Singh, T. S. Chang, L. E. Suarez, 1992, "A response spectrum method for seismic design evaluation of rotating machines," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, pp. 454~460.
- (5) L. E. Suarez, M. P. Singh, M. S. Rohanimanesh, 1992, "Seismic response of rotating machines," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 21, pp. 21~36.
- (6) B. J. Gaganis, A. K. Zisimopoulos, P. G. Nikolakopoulos, C. A. Papadopoulos, 1999, "Modal analysis of rotor on piecewise linear journal bearings under seismic excitation," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 121, pp. 190~196.
- (7) T. J. R. Hughes, 1987, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, First Edition.
- (8) J. L. Humar, 1990, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, First Edition.
- (9) 이안성, 김병욱, 김영철, 김영춘, 2004, "평균속도 개념을 적용한 상태공간에서의 과도동적응답 해석," 한국소음진동공학회 논문집, 제14권, 제5호, pp. 424~431
- (10) H. D. Nelson, 1980, "A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 102, pp. 793~803.
- (11) D. M. Russell, 1995, Error measures for comparing transient data: Part I: Development of a comprehensive error measure, Electric Boat Corporation, pp. 175~184.

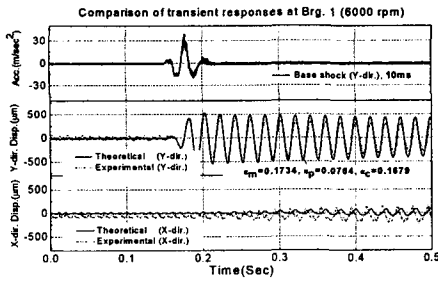


Fig. 11 Base shock wave and comparison of transient responses at Brg. 1 (Duration time : 10ms)

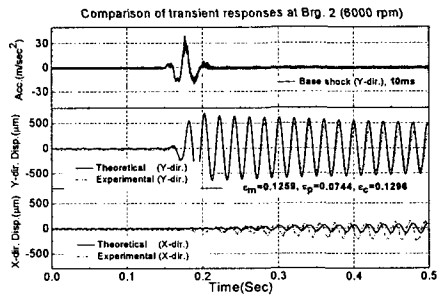


Fig. 12 Base shock wave and comparison of transient responses at Brg. 2 (Duration time : 10ms)

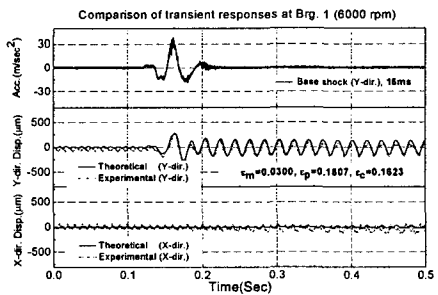


Fig. 13 Base shock wave and comparison of transient responses at Brg. 1 (Duration time : 15ms)

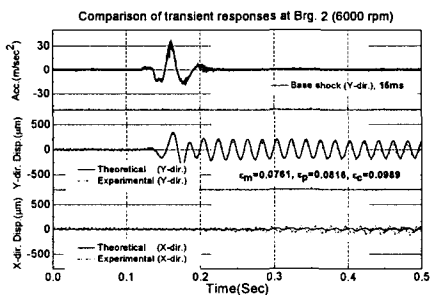


Fig. 14 Base shock wave and comparison of transient responses at Brg. 2 (Duration time : 15ms)