

크랙과 이동질량을 가진 유체유동 파이프의 동특성 해석

Dynamic Behavior of a Pipe Conveying Fluid with a Crack and Moving Mass

윤한익

(동의대학교 기계공학부 교수)

1. 서론

파이프 속을 흐르는 유체는 파이프에 진동을 일으키는 원인이 되며, 유체의 속도가 어떤 임계값에 도달하면 그 진동이 불안정하여 파이프가 좌굴되기도 한다. 점성이 작은 유체의 분사력은 파이프의 끝단에 작용하는 집중종동력으로 작용하며 진동해석에 중요한 인자가 된다. 또, 구조손상의 하나인 크랙은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴를 유발하는 주요 원인이 된다. 따라서 유동유체를 갖는 파이프에 크랙이 존재하는 시스템은 이러한 불안정을 일으키는 두 요소를 모두 포함하고 있으므로 이들의 연성관계에 의한 시스템의 동적특성을 파악하는 것은 매우 흥미로운 문제가 된다. 크랙을 가지는 구조물의 동적특성을 파악하는 것은 구조물의 안전진단 및 사고예방을 위해 중요한 문제라고 할 수 있다. 일반적으로 구조물에 크랙형태의 결함이 있는 경우 구조물의 강성이 저하되는 경향을 보이고, 한 문제라고 할 수 있다. 일반적으로 구조물에 크랙형태의 결함이 있는 경우 구조물의 강성이 저하되는 경향을 보인다. 크랙이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법⁽¹⁾에서 출발하여, 최근에는 크랙에 의해서 추가되는 에너지를 파괴역학적 변수를 계산하여 유연행렬을 구하여 적용하는 해석방법을 주로 사용하고 있다^(2,3).

크랙과 종동력을 고려한 연구는 양단 자유 보를 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙이 동적 안정성에 미치는 영향에 대한 해석⁽⁴⁾과 크랙의 위치에 따라 계의 불안정을 일으키는 플러터 하중을 계산하는 연구결과들이 발표되고 있다^(5,6). 또, Liu⁽⁷⁾ 등은 파이프 형태의 중공 축에 크랙이 존재하는 경우 크랙의 크기에 따른 보의 동적특성을 연구하였으며, Mahmoud⁽⁸⁾ 등은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하여 집중질량을 가진 크랙 단순보의 동적응답을 전달행렬법으로 해석하였다. 또, 이동질량의 영향을 받는 유체유동 파이프의 진동특성에 대해서도 많은 연구결과가 발표되어지고 있다⁽⁹⁾.

이 연구에서는 산업현장 등에서 생산된 제품이 다음 공정

으로 이동할 때 이용되는 컨베이어형 구조물 및 크레인등의 구조물에 크랙과 같은 결함이 존재하는 경우를 고려한 것이다. 이 때 이동질량이 높은 온도를 가졌거나 또는 주기적으로 많은 수의 이동질량이 이동함으로써 마찰열에 의하여 이동질량을 지지하는 파이프가 가열되는 경우를 생각할 수 있다. 따라서 그 가열에 의하여 파이프가 팽창 또는 연화되어 변형을 일으키는 것을 방지하기 위하여 파이프 내부에 냉각수를 통과시키는 시스템을 고려하였다. 즉, 이동질량을 가지는 단순지지 유체유동 파이프에 개구형 크랙이 존재할 때 이동질량과 유동유체가 파이프의 횡방향 진동에 미치는 영향에 대하여 연구하였다. 단순지지 파이프의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며 크랙을 가지는 단순지지 파이프 위를 통과하는 이동질량의 속도와 유체의 속도가 파이프의 동특성에 미치는 영향을 수치해석 하였으며, 크랙이 존재하는 경우와 크랙이 존재하지 않는 경우의 횡진동을 서로 비교, 고찰하였다.

2. 시스템 모델링

Fig. 1과 Fig. 2는 크랙을 가진 유체유동 파이프 위를 이동질량이 일정한 속도로 이동하는 탄성계의 개략도와 크랙이 존재하는 부분의 단면을 각각 나타내고 있다. 여기서 m_m 은 파이프 위를 이동하는 이동질량, v 와 u 는 각각 이동질량과 유체의 속도, 그리고 L 은 파이프의 전체 길이를 나타낸다. a_c , h , 그리고 b 는 각각 크랙의 깊이와 크랙이 존재하는 파이프 단면의 지름, 그리고 크랙의 횡방향 길이를 표현하고 있다. 또, θ 는 전체 크랙의 반각(half-angle)을 의미한다. 단순지지 파이프에서 크랙위치를 기준으로 두 부분으로 구분하여 모델링 하였으며, x_c 는 크랙의 위치를 나타낸다. 크랙위치에서는 크랙의 영향에 의한 파괴역학적 변수를 구하여 크랙위치에서 파이프의 강성저하를 회전 스프링 상수로 변환하여 수치해석에 적용하였다. 연속 보 형태의 구조물에서 크랙에 의한 부분적인 강성저하는 불연속 구간을 초래하게 되므로 크랙위치에서 별도의 경계조건을 설정해야한다.

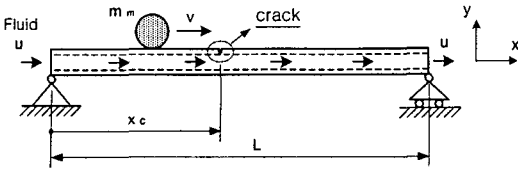


Fig. 1 Geometry of the cracked simply supported pipe with a moving mass

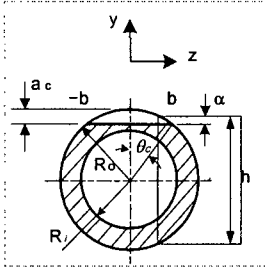


Fig. 2 Cross section of the cracked pipe

2.1 단순지지 파이프 및 이동질량의 에너지

단순지지된 파이프의 횡변위 $y(x, t)$ 는 이동질량이 없는 경우, 경계조건을 만족시키는 단순지지 보의 고유함수 $\phi_i(x)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t) \quad (1)$$

여기서, $q_i(t)$ 는 일반화 좌표, μ 는 일반화 좌표의 수를 나타낸다. 또, $\phi_i(x)$ 는 단순지지 보의 횡방향 진동의 모드 모양을 표현하고 있다. 따라서 크랙이 존재하는 단순지지된 파이프의 포텐셜 에너지를 구하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \left[EI \int_0^{L_i} \{ \phi_{ij}''(x) q_i(t) \}^2 dx - mg \int_0^{L_i} \phi_{ij}(x) q_i(t) dx \right] + \frac{1}{2} K_R (\Delta y'_c)^2 \quad (2)$$

여기서 K_R 은 크랙으로 인하여 부가되는 회전 스프링상수를 의미하며, E 는 영계수를 나타낸다. 또, j 는 외팔 파이프의 분할구간(segment)의 수이며 $\Delta y'_c$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta y'_c = \frac{y_2(x_2=0)}{dx} - \frac{y_1(x_1=x_c)}{dx} \quad (3)$$

또, 단순지지 파이프의 운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \int_0^{L_i} \{ \phi_{ij}(x) \dot{q}_i(t) \}^2 dx \quad (4)$$

이동질량은 단순지지 파이프와 분리되지 않고 접촉된 상태로 이동한다고 가정하였으며, 따라서 이동질량의 연직방향 변위와 속도를 이용하여 이동질량의 운동에너지와 포텐셜 에너지를 구하면 각각 다음과 같다⁽⁹⁾.

$$T_m = \frac{1}{2} m_m \sum_{i=1}^{\infty} \{ v^2 q_i^2(t) \phi_i^2[f_1(t)] + 2vq_i(t) \dot{q}_i(t) \phi_i[f_1(t)] \phi_i'[f_1(t)] + \dot{q}_i^2(t) \phi_i^2[f_1(t)] \} + \frac{1}{2} v^2 m_m \quad (5)$$

여기서 $f_1(t)$ 는 이동질량의 수평변위이고 다음과 같다.

$$x_1 = f_1(t) = \int_0^t v dt, \quad (0 \leq x_1 \leq L) \quad (6)$$

2.2 유체에 의한 에너지

파이프에 대한 유체의 상대속도가 u 이므로, 유체의 절대 속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 유체의 속도를 구하여 유체유동의 운동에너지와 포텐셜 에너지를 구하면 각각 다음과 같이 표현된다.

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^L \{ u^2 + 2u\phi_i(x_j) \dot{q}_i(t) + \{ \phi_i(x_j) \dot{q}_i(t) \}^2 \} dx_j \right] \quad (10)$$

여기서, m_f 는 유체의 단위 길이당 질량이다.

유체유동의 분사력에 의하여 파이프에 작용되는 힘은 $x = L$ 인 끝단에 작용하는 집중 접선 종동력이 된다. 이러한 비보존적인 접선 종동력에 의한 일은 그 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 일로 구분되며 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$W_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^L \rho A u^2 \{ \phi_i'(x_j) q_i(t) \}^2 dx_j \quad (11)$$

$$W_{nc} = - \sum_{i=1}^{\infty} \rho A u^2 \phi_i'(L) \phi_i(L) q_i^2(t) = 0 \quad (12)$$

2.2 크랙에 의한 탄성변형 에너지

선형 탄성구간에서 크랙으로 인한 추가적인 변형에너지(additional strain energy)는 응력확대계수의 항에서 유도할 수 있는 유연행렬의 형식으로 구할 수 있다. 같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 더 발생하게

된다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 추가되는 변위와 크랙 위치에서의 유연행렬을 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_a^c J da \quad (13)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[\int_{-b}^b \int_a^c J da dz \right] \quad (14)$$

여기서 P_i 는 i 방향에서의 힘으로써 $i = 1, 2, \dots, 6$ 이고, J 는 변형률 에너지 밀도함수(strain energy density function)로써 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{E^*} \left[\left(\sum_{i=1}^6 K_{ii} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 K_{iii} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 K_{iii} \right)^2 \right] \quad (15)$$

여기서 E^* 은 평면변형에 대하여 $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ 로 표현된다.

ν 는 포와송 비를 나타낸다. 또, K_{ii} , K_{iii} 그리고 K_{iii} 는 각각 제 1 파괴모드(개구형), 제 2 파괴모드(면내전단형), 그리고 제 3모드(면외 전단형)의 응력확대계수를 의미한다.

이 연구에서는 크랙은 항상 열려있는 것으로 고려하였으며 따라서 제 1 파괴모드에 대해서 응력확대계수(stress intensity factor)는 다음과 같이 간단히 표현 할 수 있다.

$$J = \frac{1}{E^*} [(K_{IM} + K_{IP})^2] \quad (16)$$

중공축 원형단면인 경우 식 (15)의 K_{IP} , K_{IM} 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다⁽⁷⁾.

$$K_{IP} = \frac{V}{2\pi R t} \sqrt{\pi R \theta} F_i(\theta), \quad (16)$$

$$K_{IM} = \frac{M}{\pi R^2 t} \sqrt{\pi R \theta} F_b(\theta).$$

여기서 V , M 은 각각 힘과 모멘트이고, R 은 $(R_o + R_i)/2$ 를 의미한다. 또, θ 는 전체 크랙의 반각(half-angle)이며 크랙크기(crack severity)는 θ/π 의 퍼센트(%)로 표현할 수 있다. 식 (16)의 $F_i(\theta)$ 와 $F_b(\theta)$ 는 각각 다음과 같다.

$$F_i(\theta) = 1 + A_i \left[5.3303 \left(\frac{\theta}{\pi} \right)^{1.5} + 18.773 \left(\frac{\theta}{\pi} \right)^{4.24} \right], \quad (17)$$

$$F_b(\theta) = 1 + A_i \left[4.5967 \left(\frac{\theta}{\pi} \right)^{1.5} + 2.6422 \left(\frac{\theta}{\pi} \right)^{4.24} \right].$$

여기서 A_i 는 다음과 같다.

$$A_i = \left(0.125 \frac{R}{t} - 0.25 \right)^{0.25} \quad \text{for } 5 \leq \frac{R}{t} \leq 10, \quad (18)$$

$$A_i = \left(0.4 \frac{R}{t} - 3.0 \right)^{0.25} \quad \text{for } 10 \leq \frac{R}{t} \leq 20.$$

따라서, 식 (13)~(18)을 식 (13)에 대입하면 유연행렬 (6×6)을 얻을 수 있으며, 해석에 필요한 회전 스프링 상수는 제 1 파괴모드에 해당하는 항만을 고려한 유연행렬의 역수를 취함으로써 구할 수 있다. 즉, $K_R = C^{-1}$ 이다. 또, 크랙 위치에서 다음의 4개의 경계조건을 만족해야한다.

$$\phi_{i1}(x) = \phi_{i2}(x), \quad \frac{d^2 \phi_{i1}(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \phi_{i2}(x)}{dx^2}, \quad (19)$$

$$\frac{d^3 \phi_{i1}(x)}{dx^3} = \frac{d^3 \phi_{i2}(x)}{dx^3},$$

$$\frac{d\phi_{i2}(x)}{dx} - \frac{d\phi_{i1}(x)}{dx} = \frac{EI}{K_R} \frac{d^2 \phi_{i2}(x)}{dx^2}. \quad (20)$$

$$\phi_{ij}(x) = \begin{cases} \phi_{i1}(x) : 0 \leq x \leq x_c \\ \phi_{i2}(x) : x_c \leq x \leq L \end{cases}$$

2.3 계의 운동방정식

계의 운동방정식은 식 (2) ~ 식 (12)의 에너지와 일량에 대한 식을 Lagrange 방정식에 대입하여 구할 수 있으며, 구해진 운동방정식을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 매개변수를 정의한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_j^* = \frac{L_j}{L} \quad (j=1, 2), \quad \xi_j = \frac{x_j}{L},$$

$$\xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad d = \frac{a}{L}, \quad \beta = \frac{m_m L}{\sqrt{mEI}} \bar{v},$$

$$\tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \gamma = \frac{m_m L^3}{EI} \bar{v}^2, \quad (21)$$

$$M_m = \frac{m_m}{mL}, \quad m_m^* = \frac{m_m g L^2}{EI}, \quad K_R^* = \frac{K_R L}{EI},$$

$$M^* = \frac{m g L^3}{EI}, \quad M_j^* = \frac{m_j g L^3}{EI}$$

$$U = uL \sqrt{\frac{m_l}{EI}}, \quad M = \frac{m_l}{m}$$

여기서 \bar{v} 는 v/L 이다. 식 (21)의 무차원 매개변수를 이용하여 계의 무차원화된 운동방정식을 행렬형태로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (22)$$

여기서 (\cdot) 는 무차원화된 시간 τ 에 대한 미분을 나타내며, 식 (22)의 각 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_0^{\xi_j} \phi_{ij}^2(\xi) d\xi + \int_0^1 M \phi_i^2(\bar{x}_f) d\xi_f + M_m \phi_i^2(\bar{x}_1) \right\} \quad (23)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n \left\{ M \int_0^1 \frac{d}{d\tau} [\phi_i^2(\bar{x}_f)] d\xi_f + M_m \frac{d}{d\tau} [\phi_i^2(\bar{x}_1)] \right\} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^2 \int_0^{\xi_j} \{ \phi_{ij}''(\xi) \}^2 d\xi + \left\{ \beta \frac{d}{d\tau} \{ \phi_i'(\bar{x}_1) \} \phi_i'(\bar{x}_1) \right. \right. \\ & - \gamma \{ \phi_i'(\bar{x}_1) \}^2 + \beta \frac{d}{d\tau} \{ \phi_i'(\bar{x}_1) \} \phi_i'(\bar{x}_1) \left. \right\} \quad (25) \\ & + \sqrt{M} U \int_0^1 \frac{d}{d\tau} \{ \phi_i'(\bar{x}_f) \} \phi_i'(\bar{x}_f) \\ & + \frac{d}{d\tau} \{ \phi_i'(\bar{x}_f) \} \phi_i'(\bar{x}_f) \} d\xi_f - U^2 \int_0^1 \{ \phi_i'(\bar{x}_f) \}^2 d\xi_f \\ & + K_R^* [\{ \phi_{2i}'(\xi_2=0) \}^2 - 2 \{ \phi_{2i}'(\xi_2=0) \} \phi_{1i}'(\xi_1=\xi_c)] \\ & + \{ \phi_{1i}'(\xi_1=\xi_c) \}^2] \end{aligned}$$

여기서 (\cdot) 는 무차원 축방향 좌표 ξ 에 대한 미분을 표현한 것이다. 또, \bar{x}_1 와 \bar{x}_f 는 각각 다음과 같다.

$$\bar{x}_1 = \bar{v} L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \tau, \quad (26)$$

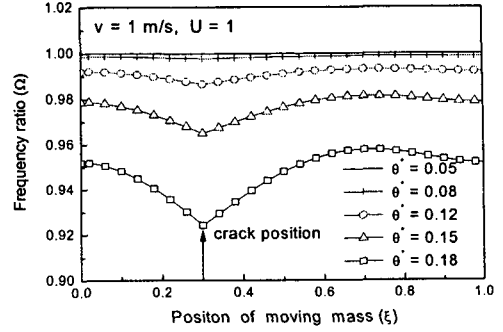
$$\bar{x}_f = u L \sqrt{\frac{m}{EI}} \tau.$$

3. 수치해석 결과 및 고찰

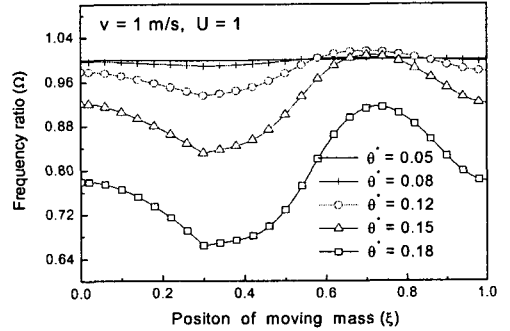
이 연구에서는 이론해석에서 유도된 무차원 운동방정식을 이용하여 이동질량 및 크랙이 단순지지 파이프의 진동특성에 미치는 영향을 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. 수치해석은 Matlab(6.1)에서 4차의 Runge-Kutta 방법⁽¹⁰⁾으로 수행하였으며, 수치해석에 있어서 이동질량이 존재하는 경우를 진동수, 이동질량이 존재하지 않는 경우를 고유진동수라 하였다.

수치해석 예제에 적용한 파이프 길이는 1m, 파이프 두께는 0.15cm, 영계수 $E = 200$ GPa, 그리고 단순지지 파이프의 밀도는 7850 kg/m^3 으로 하였다. 수치해석 결과에 사용한 진동수는 비는 다음과 같다.

$$\Omega = \frac{\omega(\text{cracked frequency})}{\omega_0(\text{un-cracked frequency})} \quad (27)$$



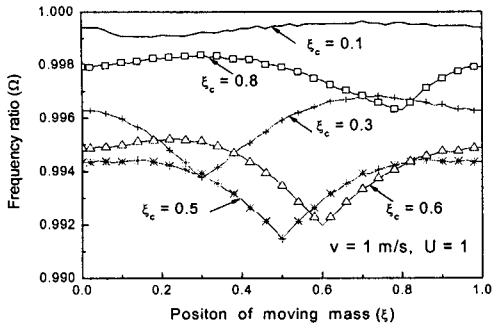
(a) 1 st. mode



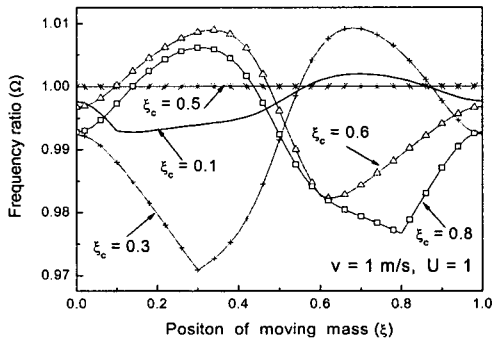
(b) 2 nd. mode

Fig. 3 Frequency ratios of the cracked pipe for : $U = 0.1$, $M_m = 0.1$, $v = 1\text{m/s}$, $\xi_c = 0.3$

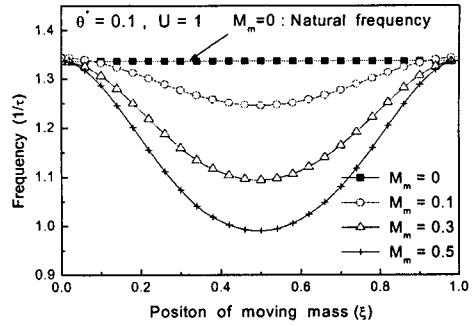
Fig. 3과 Fig. 4는 이동질량의 크기와 속도가 각각 0.1, 1 m/s 이고, 유체의 무차원 속도가 0.1 인 경우 크랙의 크기와 크랙의 위치에 따른 진동수비 변화를 2차 모드까지 도시하였다. 여기서 세로축은 진동수비(Ω)를, 가로축은 이동질량의 위치를 나타낸다. Fig. 3 (a), (b)에서 크랙의 위치는 파이프의 0.3인 지점에 위치한 경우이며, 1차 모드와 2차 모드에서 모두 크랙의 위치를 뚜렷하게 확인할 수 있으며, 크랙이 존재하는 위치에서 가장 낮은 진동수비를 보인다. 또, 크랙의 크기와 진동수는 서로 반비례적인 경향을 보임을 알 수 있다. Fig. 4에서 1, 2차 모드에서 이동질량이 크랙이 존재하는 위치를 이동하는 시점에 가장 낮은 진동수비를 나타낸다. Fig. 4(a)의 제 1차 진동모드를 보면 크랙의 위치가 보의 중앙에 존재하는 경우 가장 낮은 진동수비를 보이고 있다. 또, Fig. 4 (b)의 2차 모드에서는 크랙의 위치가 보의 중앙에 위치한 경우 진동수비가 이동질량의 위치에 관계없이 항상 1임을 확인할 수 있다. 즉, 크랙이 존재하지 않는 경우의 진동수와 동일한 값을 갖는다. 이것은 단순지지 보의 2차 모드의 노드점임을 쉽게 판단할 수 있다.



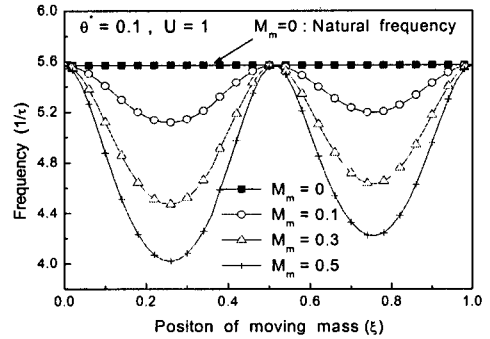
(a) 1 st. mode



(b) 2 nd. mode



(a) 1 st. mode



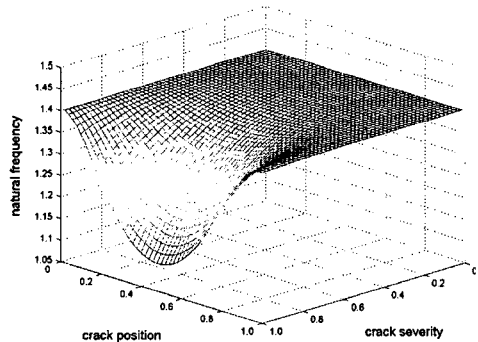
(b) 2 nd. mode

Fig. 4 Frequency ratios of the cracked pipe for :
 $U = 0.1, M_m = 0.1, v = 1\text{m/s}, \theta^* = 0.1$

Fig. 5 Frequency ratios of the cracked pipe for :
 $U = 0.1, \xi_c = 0.3, v = 1\text{m/s}, \theta^* = 0.1$

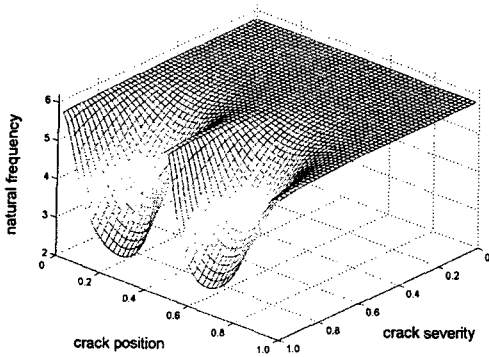
Fig. 5는 크랙의 크기와 위치가 각각 0.3, 0.1인 경우 이동 질량의 크기에 따른 진동수를 표현한 것이다. 이 때 이동 질량의 속도는 1m/s이며, 유체의 무차원 속도는 0.1이다. Fig. 5(a)의 1차 모드에서, 이동 질량의 크기에 관계없이 이동 질량이 단순지지 파이프의 중앙부근을 이동하는 경우 가장 작은 진동수를 나타내며, 전반적으로 이동 질량의 크기와 진동수는 서로 반비례적인 경향을 보인다. 이동 질량이 파이프의 중앙에 위치할 때, 이동 질량이 없는 경우와 이동 질량의 크기가 0.1인 경우를 비교해서 이동 질량의 크기가 0.1인 경우의 진동수가 약 7.21% 정도 증가하였으며, 이동 질량의 크기가 0.1인 경우와 0.3인 경우를 비교해서는 0.3인 경우 약 13.6% 정도 증가하였다.

Fig. 6은 이동 질량이 없는 경우 크랙의 위치와 크랙의 크기에 따른 진동수를 2차 모드까지 표현한 것이다. 이동 질량이 없는 경우이므로 고유진동수라 표현하였다. Fig. 7은 이 연구의 결과와 참고문헌 (8)의 결과를 비교한 것이다. 비교를 위해서 보의 길이를 50m, 그리고 이동 질량의 속도를 50m/s로 하였다.



(a) 1 st. mode

참고 문헌



(b) 2 nd. mode

Fig. 6 Variations of natural frequencies with crack position and crack severity

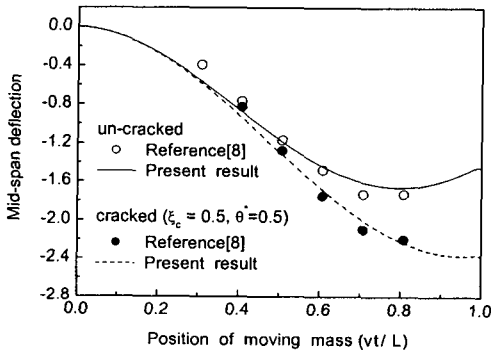


Fig. 7 Mid-span deflection of cracked and un-cracked beam

4. 결론

이동질량을 가지는 유체유동 파이프 구조물에 크랙 형태의 결함이 존재할 때 파이프 구조물의 진동특성에 미치는 이동질량과 크랙의 영향을 연구하였다. 먼저, 이동질량 및 유속의 크기가 일정한 경우 크랙의 위치 및 크기가 단순지지 파이프의 진동수에 미치는 영향을 살펴보았으며, 크랙의 위치와 크기가 일정한 경우, 이동질량이 단순지지 파이프의 진동수에 미치는 영향을 수치해석하였다. 또, 이동질량이 없는 경우 크랙의 위치 및 크기에 따른 고유진동수 변화를 살펴보았다. 따라서, 이러한 결과들을 데이터 베이스화 함으로써, 이동질량을 가지는 파이프 형태의 구조물에 크랙의 존재 유무 및 크랙의 크기 및 위치를 판단할 수 있어, 구조물의 안전진단에 활용할 수 있을 것으로 판단된다.

(1) Datta, P. K. and Lal, M. K., 1992, "Parametric Instability of a Non-prismatic Bar with Localized Damage Subjected to an Intermediate Periodic Axial Load," *Computer and Structures*, Vol. 4, No. 6, pp. 1199~1202.

(2) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam With a Closing Crack," *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1057~1074.

(3) Ghondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao, J., 1998, "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1, pp. 17~34.

(4) Kim, K. H. and Kim, J. H., 2000, "Effect of a Crack on The Dynamic Stability of a Free-Free Beam Subjected to a Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 1, pp. 119~135.

(5) Takahashi, I., 1997, "Vibration and Stability of a Cracked Shaft Simultaneously Subjected to a Follower Force With an Axial Force," *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 23, pp. 3071~3080.

(6) Takahashi, I., 1999, "Vibration and Stability of non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force," *Computers and Structures*, Vol. 71, pp. 585~591.

(7) Liu, D., Gurgenci, H. and Veidt, M., 2003, "Crack Detection in Hollow Section Structures Through Coupled Response Measurements," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 261, pp. 17~29.

(8) Mahmoud, M. A. and Abou Zaid, M. A., 2002, "Dynamic Response of a Beam With a Crack Subject to a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 4, pp. 591~603.

(9) 윤한익, 손인수, 2002, "이동질량을 가진 유체유동 외팔 파이프의 동특성," *한국소음진동공학회논문집*, 제 12 권, 제 7 호, pp. 550~556.

(10) MATLAB Reference Guide, 1992, The Math Works, Inc.