한국소음진동공학회 2004년도 추계학술대회논문집, pp. 199~203.

헬리컬 기어의 축방향 가진에 의한 축-베어링-플레이트계의 방사소음 예측

Prediction of Radiated Noise From a Shaft-bearing-plate System Due to an Axial Excitation of Helical Gears

박찬일*
Chan IL Park

Key Words : Radiated noise(방사소음), Circular plate(원형 플레이트), Helical gear(헬리컬 기어)

ABSTRACT

In this paper, a simplified model is studied to predict analytically the radiated noise from the helical gear system due to an axial excitation of helical gear. The simplified model describes gear, shaft, bearing, and housing. To obtain the axial force of helical gear, mesh stiffness is calculated in the load deflection relation. The axial force is obtained from the solution of the equation of motion, using the mesh stiffness. It is used as a longitudinal excitation of the shaft, which in turn drives the gear housing through the bearing. In this study, the shaft is modeled as a rod, while the bearing is modeled as a parallel spring and damper only supporting longitudinal forces. The gear housing is modeled as a clamped circular plate with viscous damping. For the modeling of this system, transfer function from the shaft to the clamped plate are used, using a spectral method with four pole parameters. Out-of-plane displacement for the thin circular plate with viscous damping is derived and sound pressure radiated from the plate is also derived. Using the model parameter studies are carried out.

기호설명

M	mass(kg)
K	stiffness (N/m)
C	damping(N/m/sec)
F	force (N)
x	relative displacement of gears
E	modulus of elasticity
ξ	damping factor
β_b	base helix angle
l	shaft length
l_{br}	roller effective length (mm)
Z	the number of roller
k	wave number
$\overline{K}_g$	average mesh stiffness
A	shaft area
α	contact angle (rad)
a	radius of the circular plate
ρ	density
F_{ge}	gear force due to tooth error
ν	Poisson's ratio
h	plate thickness
ω	frequency
U	displacement
p	sound pressure
j	complex
Subscripts	
g	gear element
s	shaft element
b	bearing element
p	plate element
a	air

* 강릉대학교 정밀기계공학과
E-mail : pci@kangnung.ac.kr
Tel : (033) 640-2392, Fax : (033) 640-2244

1. 서 론

헬리컬 기어는 소음이 적기 때문에 소음을 고려하는 대부분의 동력 전달 기계 시스템에 널리 사용되고 있다. 기어계가 고속으로 됨에 따라 기어의 진동, 소음 저감은 더욱 중요하게 되고 이를 위하여 기어 자체 뿐만 아니라 기어계의 소음을 예견하기 위하여 해석 능력이 필요하게 된다. 본 논문은 이러한 노력의 일부로서 기어계를 축-베어링-원형 플레이트계로 모델링한다. 이 모델을 완성하기 위하여 점성 감쇠를 가진 원형 플레이트계의 진동과 원형 플레이트계로 부터의 방사소음이 유도된다. 이 모델을 사용하여 헬리컬 기어의 축방향 가진에 기인한 힘과 변형의 전달, 방사소음 및 기어계의 각종 파라미터의 영향이 조사된다

2. 해석 방법

2.1 해석 모델의 설정

이 해석에 사용된 모델은 Fig.1 과 같이 헬리컬 기어쌍과 축, 베어링, 플레이트로 이루어져 있다.

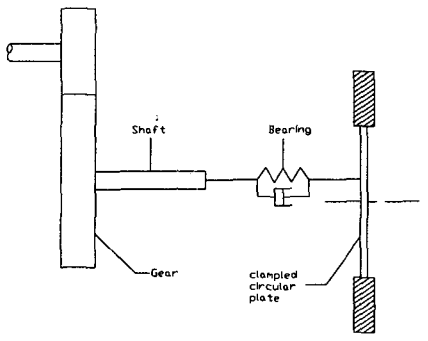

Fig. 1 Mathematical model

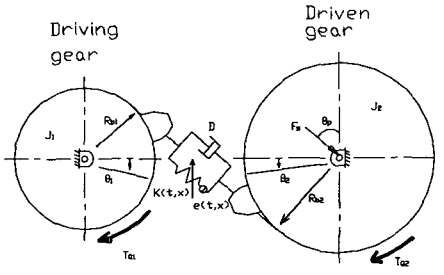

Fig. 2 Vibration model of the helical gear

헬리컬 기어의 축방향 가진은 축에 전달된다고 가정하고 축은 로드로 베어링은 병렬의 스프링과 감쇠로 모델링하였다. 기어 하우징은 감쇠된 얇은 원형 플레이트로 모델링 하였고 플레이트 중심에서 벗어나서 축과 연결되어 있다. 이 해석을 위하여 헬리컬 기어의 축방향 가진력이 계산되고 4 극 파라미터로 이루어진 축과 베어링 요소의 전달행렬이 축으로부터 플레이트까지 힘의 전달을 얻기 위하여 사용된다. 또한 감쇠를 가진 얇은 원형 플레이트를 위한 면의 수직방향 변위가 계산되고 플레이트로부터 방사된 음압이 유도된다.

2.2 기어의 축방향 가진력

헬리컬 기어의 축방향 가진은 회전 방향 가진과 연관이 크며 축방향 가진의 주요 피크가 회전 방향 가진의 피크와 대응한다. 그러므로 이 해석에서는 회전 방향 진동에 기인한 힘을 계산하고 기초원 나선각의 영향을 고려하여 축방향으로 전달된 힘을 계산한다.

이 해석에서 사용된 기어의 모델은 Fig.2 와 같고 기어의 회전 방향 진동은 식(1)로 나타내어진다[5].

$$M\ddot{x} + 2\xi_g\sqrt{MK_g}\dot{x} + K_g(t,x)x = F_g + F_{ge}(t,x) \quad (1)$$

이 식은 다음과 같이 무차원 변수를 가진 표준화된 선형 방정식으로 변형된다[2].

$$\ddot{X} + 2\xi_g\omega_n\dot{X} + \omega_n{}^2X = \omega_n{}^2Y(t) \quad (2)$$

여기서

$$X = x/x_s, x_s = F_g/K_g, \omega_n = \sqrt{K_g/M}, Y(t) = y(t)/x_s,$$

$$y(t) = \frac{F_g + F_{ge}(t,x)}{K_g(t,x)}$$

주기적인 가진 함수는 다음과 같이 조화함수에 의해 표현될 수 있다.

$$Y(t) = Y_o + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \sin(i\omega t + \phi_i) \quad (3)$$

그러면, 정상상태 해는 다음식에 의해 주어진다.

$$X = Y_o + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \omega_n^2 Y_i \sin(i\omega t + \phi_i - \varphi_i)}{\sqrt{(\omega_n^2 - (i\omega)^2)^2 + (2\xi_g\omega_n i\omega)^2}} \quad (4)$$

회전방향의 힘은 감쇠력과 치 강성력 만큼 축에 전달되어 지고 축방향 힘는 이 힘의 기초원의 나선각의 탄젠트값을 곱한 결과이므로 다음 식으로 나타내어진다.

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \overline{K}_g Y_i \sqrt{(2\xi_g\omega_n i\omega)^2 + \omega_n^4}\, \sin(i\omega t + \phi_i - \varphi_{si}) x_s \tan\beta_b}{\sqrt{(\omega_n^2 - (i\omega)^2)^2 + (2\xi_g\omega_n i\omega)^2}} + \overline{K}_g Y_o x_s \tan\beta_b \quad (5)$$

2.3 축 요소

축은 로드로 모델링 되어 있으므로 입력축 힘과 변위와 출력측 힘과 변위를 연결시켜 주는 4 극 파라미터를 가진 전달행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} F_b \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 \alpha_{12}^1 \\ \alpha_{21}^1 \alpha_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_s \\ U_s \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서

$$\alpha_{11}^1 = \cos(k_r l), \quad k_r = \omega/c_r, \quad c_r = \sqrt{E/\rho}$$

$$\alpha_{12}^1 = zw\sin(k_r l), \quad z = \sqrt{E\rho A}$$

$$\alpha_{21}^1 = -\sin(k_r l)/z\omega$$

$$\alpha_{22}^1 = \cos(k_r l)$$

2.4 베어링 요소

베어링은 병렬의 스프링과 감쇠로 모델링 되어 있으므로 4 극 전달 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} F_p \\ U_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^2 \alpha_{12}^2 \\ \alpha_{21}^2 \alpha_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_b \\ U_b \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서 테이퍼 롤러베어링의 축방향 강성은 다음 식을 사용하였다[3].

$$K_b = 1.45\times10^7 F_b^{0.1} Z^{0.9} l_{br}^{0.8} \sin^{1.9}\alpha \quad (8)$$

$$\alpha_{11}^2 = 1$$

$$\alpha_{12}^2 = 0$$

$$\alpha_{21}^2 = -1/(K_b + jC_b)$$

$$\alpha_{22}^2 = 1$$

2.5 고정된 감쇠 원형 플레이트 요소

(r_o, θ_o)에 집중하중 F_p가 가해지고, 점성감쇠를 가진 원형 플레이트의 지배 방정식에 해가 $u_a(r,\theta,t) = U_a(r,\theta)e^{j\omega t}$ 라고 가정하면 지배 방정식은 다음식으로 된다.

$$\nabla^4 U_a - \beta^4 U_a = F_p \delta(r-r_o)\delta(\theta-\theta_o)/r \quad (9)$$

여기서

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2)$$

$$\beta^4 = (\omega^2 \rho h - j\omega C_p)/D$$

플레이트의 강제 거동을 유도하기 위하여 모드의 직교성을 이용한다. 고정된 원형 플레이트의 경계조건을 만족하는 비 감쇠 원형 플레이트의 특성 방정식을 풀어서 고유진동수와 대응하는 고유모드가 다음과 같이 계산된다.

$$U_a(r,\theta) = H_{mn}(\beta_{mn} r)(A_{1m}\sin(m\theta) + A_{2m}\cos(m\theta)) \quad (10)$$

여기서

$$H_{mn}(\beta_{mn} r) = J_m(\beta_{mn} r) - \frac{J_m(\beta_{mn} a)}{I_m(\beta_{mn} a)} I_m(\beta_{mn} r)$$

$\beta_{mn}{}^4 = (\omega_{mn}{}^2 \rho h)/D$, m=0,1,2... and n=1,2,3,...

식(10)을 식(9)에 대입하고 모드의 직교성을 이용하면 A_{1m} 과 A_{2m} 이 결정되고 원형 플레이트의 평면에 수직한 변위는 다음과 같이 된다.

$$u_a(r,\theta,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} \frac{F_p H_{mn}(\beta_{mn} r_o) H_{mn}(\beta_{mn} r)}{\varepsilon\pi a^2 \Lambda_{mn}(\beta_{mn}^2 - \beta^2)} \times \cos(m\theta - m\theta_o) e^{j\omega t} \quad (11)$$

여기서

If m>0, ε=1, and if m=0, ε=2.

$$\Lambda_{mn} = [J_m^2(\beta_{mn} a) + J_m'^2(\beta_{mn} a)] \quad [8]$$

2.6 방사소음

(r_o, θ_o)에서 가진되는 집중하중에 의해 고정된 감쇠 원형 플레이트는 무한 배플에 설치되어 있고 그의 표면의 진동은 공기 중으로 방사된다. 플레이트 모드(m,n)에 기인한 음압을 위한 식은 구면좌표계 (R,θ',γ)에서 레일리 (Rayleigh) 적분을 사용하여 유도되고 원거리 음장에서 다음식으로 근사화 된다.

$$p(R,\theta',\gamma) = \frac{\rho_a \omega^2 F_p}{R} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-j^m H_{mn}(\beta_{mn} r_o)}{\varepsilon\pi\Lambda_{mn}(\beta_{mn}^2 - \beta^2)} \times \cos(m\theta' - m\theta_o)\Delta e^{j\omega t - jk_o R} \quad (12)$$

여기서

$$\Delta = \int_0^1 H_m(\beta_{mn} r) J_m(k_a r \sin\gamma)(r/a) d(r/a)$$

3. 해석 결과 및 토의

3.1 해석 데이터

Table 1 The data of helical gear

	Pinion	Gear
Normal module(mm)	2.25	
Normal pressure angle (deg)	17.5°	
Center distance (mm)	127	
Whole depth (mm)	6.6	
Helix angle (deg)	28°	
Number of teeth	48	50
Outside diameter (mm)	130.36	135.26
Pitch diameter (mm)	122.32	127.41
Amount of add. mod. (mm)	1.17	1.07

수치 예제를 위하여 Table 1 의 헬리컬 기어 제원과 재질은 강이고 치의 오차는 없는 것으로 가정하였다. 그리고 직경 35mm, 길이 200mm 이며 강으로 된 축과 직경 500mm, 두께 7mm 인 알루미늄 합금으로 된 원형 플레이트를 사용하였다. 기어의 전달 하중은 136N 이고 헬리컬 기어의 강성은 치의 하중, 변형관계를 사용하여 계산하였다[6].

회전 방향에서의 선형화된 운동 방정식을 이용하여 축에 전달된 헬리컬 기어의 축방향 힘을 계산한다. 식의 감쇠계수는 0.07 을 사용하였고

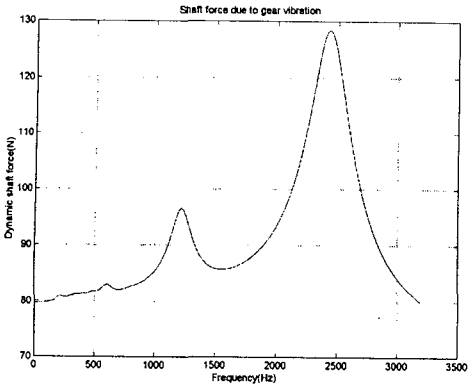

Fig. 3 Axial shaft force

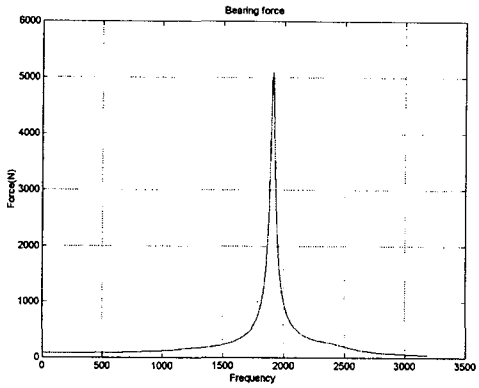

Fig. 4 Bearing force

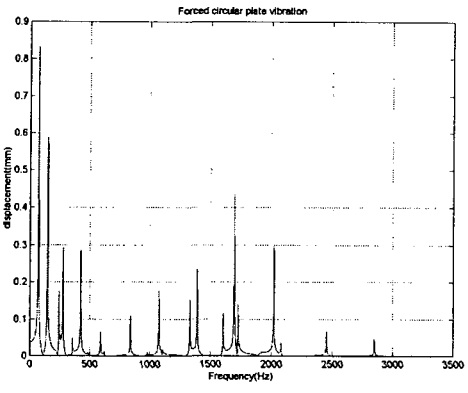

Fig. 5 Out-of-displacement of the circular plate

주파수 영역에서 계산된 축에 전달된 힘이 Fig.3 에 보여진다.

베어링 강성은 정적인 조건과 동적인 조건에서 크게 차이가 없다. 따라서 베어링 정적 강성을 사용하는 것으로 충분하다. 그러나 감쇠는 속도가 증가 함에 따라 감소한다. 횡방향에서 감쇠는 예

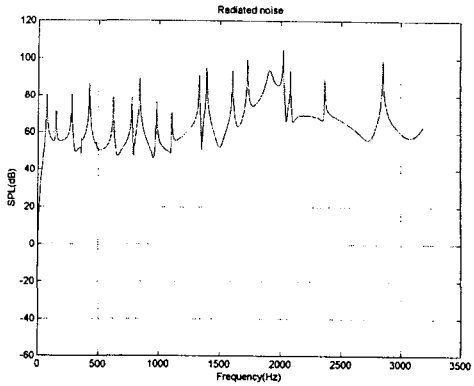

Fig. 6 Sound pressure level of the circular plate

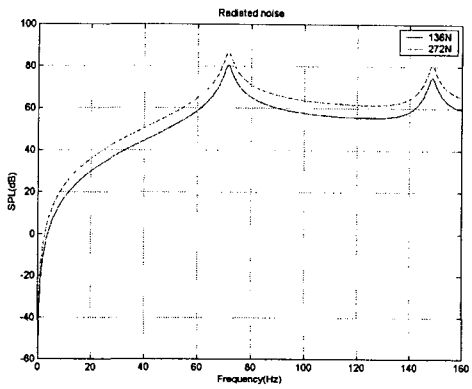

Fig. 7 Sound pressure level by the load

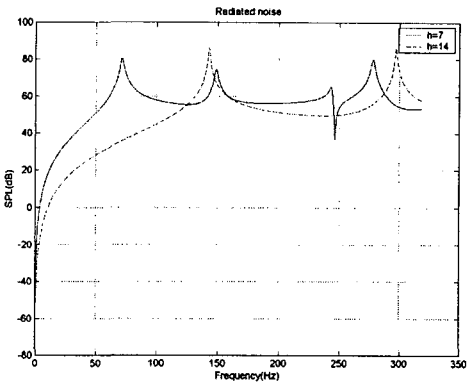

Fig. 8 Sound pressure level by the plate thickness

압이 증가함에 따라 감소하고 축방향에서는 증가한다. 그러므로 구름베어링의 정확한 감쇠를 구하기는 매우 어렵지만 대략 구름베어링의 감쇠계수는 0.01 이라고 알려져 있고 여기서는 감쇠는 380 N/m/sec 라고 가정한다[4].

Table 2 Natural frequencies of the circular plate(Hz)

n / m	1	2	3	4	5
0	71.4	277.9	622.7	1105.4	1726.1
1	148.6	425.1	839.1	1391	2080.8
2	243.7	591.1	1074.9	1696.2	2455.2
3	356.6	775.8	1329.9	2020.9	2849.3
4	486.8	979.1	1604	2364.9	3263.

Fig.4 는 플레이트에 전달된 베어링의 힘이다. 이 그림에서 Fig.3 과 연관된 피크가 보이지 않고 축, 베어링 강성과 연관된 한 개의 피크가 1908Hz 에 존재한다. 플레이트에 전달된 힘은 베어링과 축의 강성과 연관된 고유 주파수에서만 크게 작용하게 된다.

원형 플레이트는 r=0.1m, θ=0°에서 베어링과 축에 연결되어 있다. 플레이트의 평면에 수직한 변위와 음압을 계산하기 위하여, 조사하는 주파수 범위에서 기여하는 25 개의 모드(m=4,n=5)를 Table2 와 같이 계산하였다. 플레이트의 감쇠는 300N/m/sec 라고 가정하며, (0.3,0)위치에서 계산된 플레이트 면에 수직한 변위가 Fig.5 에 도시하였다. 이 그림에서 베어링에서 전달된 피크와 플레이트의 모든 고유진동수를 포함하고 있다.

Fig.6 은 R=100, θ′=0°, γ=45°의 위치에서 플레이트로부터 공기중으로 방사된 음압 레벨이다. 진동하는 플레이트로부터 음압 레벨은 dB 로 나타내며 플레이트의 모든 고유진동수와 베어링 힘의 피크를 포함한다. 그러나 R=100, θ′=45°, γ=45°에서의 음압은 플레이트 모드 m=3 과 연관된 고유 진동수를 제외한 피크를 가진다. 이것은 계산점의 선택은 참여할 모드를 결정하기 때문이다. 그러므로 플레이트의 모드는 축방향 가진에 의한 소음의 방사에서 축 및 베어링 모드보다 더 중요하다고 사료된다.

전달하는 하중 136N, 272N 과 음압 레벨과의 관계를 Fig.7 에 표시하였다. 하중이 두 배로 증가함에 따라 소음은 120Hz 에서 6dB 차로 증가하였다. Fig.8 은 플레이트 두께를 7mm 에서 14mm 로 2 배 증가 하였을 때 소음을 비교하였다. 320Hz 까지 조사 범위에서, 두께 7mm 의 피크는 4 개 이나 14mm 일 때는 2 개로 줄어 들었다. 그러므로 두께를 2 배로 늘렸을 때 플레이트의 강성을 늘리고 소음을 줄이는 것으로 되어있다.

4. 결 론

본 연구에서는 헬리컬 기어의 축방향 가진에 의한 축-베어링-플레이트계의 방사 소음의 예견을 위한 해석적인 절차를 제안하였다. 4 극 파라미터의 전달행렬이 축과 베어링을 모델링하기 위해 사용 되였다. 하우징의 단순 모델로서 고용된 감쇠 원형 플레이트의 강제 진동식이 유도되고 진동하는 원형 플레이트로 부터의 음압 레벨이 원거리 음장에서 유도되었다.

이 모델을 사용하여 수치 예제가 수행되었다. 그 결과, 플레이트 모드가 축,과 베어링 모드보다 더 중요하고 하중의 증가는 소음을 증가시키고 플레이트 두께의 증가는 강성을 증가시키고 소음도 줄인다.

후 기

본 연구는 과학재단 지역대학 우수과학자 지원연구(과제번호: R05-2004-000-10905-0)지원으로 수행되었으며 관계자에게 감사 드립니다.

참 고 문 헌

(1) J.C. Snowdon, J.C., 1971, " Mechanical Four-pole Parameter and Their Application," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.15, No.3, pp.307~323.

(2) Y. Cai and T. Hayashi, 1994, "The Linear Approximated Equation of Vibration of a Pair of Spur Gears (Theory and Experiment)," *Journal of Mechanical Design*, Vol.116, pp.558~564.

(3) E.P.Gargiulo, JR., 1980, "A Simple Way to Estimate Bearing Stiffness," *Machine Design*, July, pp.107~110.

(4) J.Kraus et al., 1987, "In Situ Determination of Rolling Bearing Stiffness and Damping by Modal Analysis," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol.109, pp.235~240.

(5) C.I.Park and Karl Grosh, 1998, "Radiated Noise From a Clamped Circular Plate-Shaft System," ASME International Mechanical Engineering Congress, *Recent Advances in Solids and Structures*, Anaheim, CA, USA, pp.199~204.

(6) C.I.Park and J.M. Lee, 1993, "Load Transmission and Vibration Characteristics of Automobile Gear," *SAE* Paper 932917.

(7) K.F. Graff, 1991, Wave Motion in Elastic Solids, *Dover*, NY.

(8) P.M. Morse and K.U. Ingard, 1968, Theoretical Acoustics, *McGraw-Hill*, NY.