

원형 외팔보의 응답에서의 비선형 현상 Non-linear Phenomenon in the Response of Circle Cantilever Beam

김명구* · 이흥식** · 조종두***

Myung-Gu Kim, Heung-Shik Lee and Chong-Du Cho

Key Words : Non-linear Coupling(비선형 연성), Modal Coupling(모드 연성), Planar Motion(평면 운동), Jump Phenomenon(도약 현상), Harmonic Excitation(조화 가진), Flexible Structures(유연 구조물), Internal Resonance(내부 공진)

ABSTRACT

This paper is the result of a experimental study about non-linear one to one modal coupling of a flexible circular cantilever beam which was transversely excited with harmonic excitation. It was proved that 2 order jumping in out of plane was caused by jump phenomenon in in-plane of flexible circular cantilever beam, because of non-linear coupling. In addition, cantilever beam showed hardening spring characteristics in in-plane and softening spring characteristics in out-of-plane.

1. 서 론

외팔보의 구조를 갖는 구조물의 비선형 현상을 실험적으로 규명하는 것은 매우 중요하다. 외팔보 구조의 비선형 진동 해석은 로보틱스(robotics), 대형 우주 구조물(spacecraft)에 사용되는 유연 구조물(flexible structures)의 해석과 설계에 사용될 것이다. 외팔보와 같은 유연 구조물에서 나타나는 동역학적인 현상을 이해하고 설명함으로써 설계된 유연 구조물은 신뢰하고 안정성을 확인할 수 있다.

많은 비선형 응답 현상은 실제로 유연한 기계 구조물의 진동 현상에서 잘 일어난다. 일반적으로 기계 구조물에서 공진이나 비선형 응답이 발생하는 주파수 부근에서는 기계 구조물의 운동을 피하고 있다. 그러나 로보틱스, 헬리콥터 로터 블레이드, 우주 구조물들이 받는 진동은 거의 랜덤 진동이므로 공진을 피하기가 매우 어렵다. 따라서 이런 구조물들은 비선형 현상이 매우 잘 나타난다. 설계된 형상에서 유연 구조물의 비선형 현상을 고려하지 않고 단순히 회피하는 것은 설계상 매우 어렵다.

Haight와 King⁽¹⁾은 비선형 실험을 한 최초의 연구자이다. 그들은 비선형 elastodynamic analysis 을 증명하기 위하여 실험을 하였다. 기초조화 가진을 받는 외팔보의 비선형 응답 특성인 flexural-flexural single mode을 발견하였다. 이 분석을 비선형 미분 방정식을 기초로 하였고 비틀림과 곡선(curvature)의 비선형 영향을 무시하였다. 그 결과 이론과 실험사이에 약간의 상관성을 얻었다.

Tseng과 Dugundji⁽²⁾는 보의 기초에 횡 방향으로 주기적인 운동에 의해 가진되는 끝이 고정된 일직선 보의 비선형 진동 현상을 연구하였다. 비선형 응답에서 하모닉(harmonic), 고차조화운동(superharmonic)과 분수조화운동(subharmonic)의 응답특성을 얻었다. Haddow, Barr and Mook⁽³⁾은 내부공진(internal resonance)을 포함하는 2자유도(two-degree-of-freedom)의 1차 공진(primary resonances)을 실험적, 이론적 연구를 하였다. Zavodney와 Navfeh⁽⁴⁾는 multiple time scale 방법을 사용하여 lumped-tip-mass 형태를 갖는 외팔보의 비선형 응답특성을 실험적 이론적 연구를 하였다.

2. 선형 보 이론⁽⁶⁾

진동분석을 위하여 선형 보의 일반적으로 다음과 같다. 보의 재료특성은 균일성과 등방성을 갖는 탄성재료로 구성되어 있으며 보의 간격은 일정하고 보의 형상은 원형이고 회전관성과 전단변형은 고려하지 않는다. 그리고 단면

* 인하대학교 기계공학과 대학원
E-mail : mgkim21@hotmail.com
Tel : (032) 860-7321, Fax : (032) 868-1716

** 인하대학교 기계공학과 대학원

*** 인하대학교 기계공학과

은 항상 평면을 유지하고 보의 지중에 의한 축방향의 자중은 무시한다. 보의 단면에서의 전단중심은 질량중심과 일치하며 보의 회전과 병진운동의 상호 간섭은 없다.

따라서 균일한 보의 자유진동에 대한 보의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad a^2 = \frac{EI}{m} \quad (1)$$

보는 관성력을 가지고 있으므로 경계조건을 고려하면 고유치 λ 로 표시 할 수 있다. λ_i 는 보에 적용되는 경계조건으로 외팔보의 경계조건은 다음과 같다.

$$\lambda_i = (2i-1)\frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

보의 고유주파수는 Hz로 표시되며, 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

여기서 L 은 보의 길이이며 m 은 보의 단위길이 당 질량이다. E 는 보의 탄성계수이며, I 는 보의 면적관성모멘트이다. 위 식을 이용하여 보의 물성치와 경계조건을 넣어서 외팔보의 고유주파수를 계산 하였다.

외팔보의 고유주파수의 실험치는 가진기를 사용하여 랜덤으로 외팔보를 가진 한 다음에 FRF 방법을 이용하여 외팔보의 고유주파수를 실험적으로 구하였다. 외팔보의 이론치와 실험치를 상호 비교하여 Table 1에 표시하였다.

Table 1. Comparison of the experimental and analytical values for frequency of the bending mode.

고유주파수의 차수	고유치(λ)	이론치(Hz)	실험치(Hz)
1	1.8751	6.5664	6.75
2	4.6941	41.1513	40.50
3	7.8548	115.2256	111.50
4	10.9959	225.7921	215.00

3. 유연한 외팔보의 비선형 현상⁽⁷⁾

대변형이 일어나는 유연한 외팔보는 외력에 의해서 보의 대변형이 발생한 발생할 때에는 그에 따른 기하학적인 비선형 현상들이 나타나게 된다. 유연한 외팔보의 보존력 항의 변화가 비선형 함수인 경우, Fig. 1 과 같이 가진 주파수가 증가함에 따라 급격한 진폭변화가 일어나는 도

약(jump)현상이 발생한다. 또한 가진 주파수가 증가하는 경우와 가진 주파수가 감소하는 경우에서 일정한 가진 주파수 영역에서 서로 다른 응답특성을 갖고 있다. 도약현상이 일어나는 지역에서는 세 개의 복수의 응답특성이 존재하며 두 개는 안정적이고 나머지 하나는 불안정한 응답 특성을 갖는다. 이때 2개의 안정해 중 실제 발생하는 해는 초기조건에 의해 결정이 된다. 나머지 하나의 불안정한 해가 비선형 현상을 유발하게 하여 도약현상이 일어난다.

가진 주파수가 증가함에 따라 계의 복원력이 단조증가 함수인 경우에는 응답곡선이 좌측으로 기울어지는 hardening spring 현상이 일어난다. 반대로 가진 주파수가 감소함에 따라 계의 복원력이 단조감소인 경우에는 응답곡선이 softening spring 현상이 일어난다.

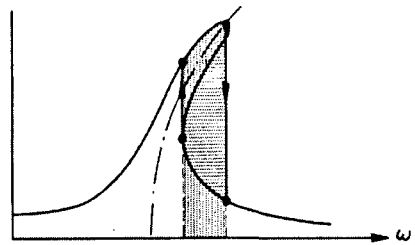


Fig. 1 Theoretical frequency response curve for a hardening spring type resonant system

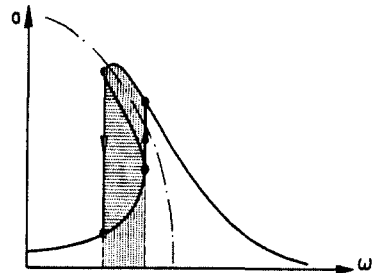


Fig. 2 Theoretical frequency response curve for a softening spring type resonant system

유연한 외팔보의 비선형 현상이 일어나면 one-to-one modal coupling⁽⁵⁾에 의해서 planar 운동과 non-planar 운동이 일어난다. 이 현상은 외팔보의 in-plane 방향의 planar 운동이 모드연성 현상으로 out of plane에서 non-planar 운동을 유발시키고 있다. one-to-one modal coupling 일 일어나면 진동 에너지가 in-plane에서 out of plane 으로 쉽게 이동할 수 있다. 따라서 out of plane 으로 전이된 진동에너지가 non-planar 운동을 일으킨다. 원형 외팔보에서 planar 운동에서 non-planar 운동으로 운

동의 양상이 변화할 때 외팔보의 운동을 예측하기 매우 어렵다. 이 영역이 또한 동역학적으로 다른 하나의 불안정한 영역이 된다.

4. 실험방법

4.1 실험장치

외팔보는 균일한 탄성재료인 알루미늄 합금(AL)을 사용하였고, 사용된 알루미늄 합금의 물성치는 탄성계수 $E=72Gpa$, 강성계수 $G=27Gpa$, 포아송비(poisson's ratio) $\nu=0.3333$, 원형 외팔보의 단위 길이 당 질량 $m=0.0336kg/m$ 이며, 외팔보의 형상은 원형보(지름 $\phi=4mm$, 길이 $665mm$)이다. 또한 알루미늄 합금은 연성재료이므로 약간의 구조감쇠를 갖고 있다. 외팔보의 가진 방법은 기초 조화 가진으로 사인파 가진을 하였다.

실험에 사용된 측정기는 다음과 같다.

Dual channel signal analyzer (B&K type 2035)

Charge amplifier (B&K type 2635)

Accelerometer (B&K type 4374)

Shaker (LDS V550)

Power amplifier (LDS)

DAT (SONY PC204A)

Level record (B&K type 2307)

Oscilloscope (HP 54615B)

Phase shifter

가진기와 외팔보를 고정시키는 지그(jig)는 경량이고 기계적 성질이 우수한 AL2024로 만들었으며 지그의 형상은 외팔보의 경계조건을 만족시키고 보가 횡 방향 가진을 받기에 적합하도록 설계 제작되었다. 지그의 앞면에 가속도계를 부착하여 FRF방법으로 지그의 고유주파수를 측정하였다. 외팔보의 측정 가능한 주파수 범위를 $0\sim 400 Hz$ 이내로 제한하였으므로 지그의 고유주파수도 이 대역 내에서만 측정하였다.

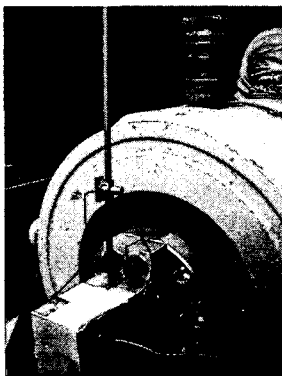


Fig.3 Accelerometer position on the beam

지그의 x축 방향으로는 고유주파수가 없으며, y축 방

향으로는 $150.50 Hz$ 에 하나가 있고, z축 방향으로는 $208.00 Hz$ 에 고유주파수가 있다. 지그의 고유주파수가 외팔보의 고유주파수와 상호 관련이 없음을 알 수 있다.

4.2 실험방법

유연한 외팔보를 고정-자유(fixed-free)를 갖는 경계조건을 만족시키는 상태로 가진기에 고정을 하였다. 가진기와 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하고 가진 주파수를 증가하거나 감소시키는 방법을 이용하여 실험을 수행하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하면 가진기에서 발생하는 조화진동의 속도 성분이 가진 주파수의 변화와 상관없이 일정한 값을 갖게 된다. 가진 주파수의 증가와 감소는 sine sweeping 의 형태이며 그 비율은 $0.030 Hz/s$ 이다.

가진기에 공급되는 전압의 크기의 변화는 가진기에서 발생하는 가속도진폭의 크기를 변화시킨다. 가진기에서 발생하는 가속도 진폭의 크기는 2nd 모드에서 $5g, 10g, 20g$ 로 설정을 하고 실험을 하였다. 이 진폭은 가진기의 아마추어 표면에 부착되어있는 또 하나의 가속도계를 이용하여 측정하였다. 외팔보의 응답특성을 측정하기 위하여 외팔보의 in-plane방향(x-axis) 과 out of plane방향(y-axis)에 각각 B&K 4374 가속도계를 부착하였다. B&K type 4374 가속도계의 무게는 각각 $0.65gram$ 정도이고 주파수 범위가 $1\sim 25 kHz$ 까지 측정이 가능하며, 측정가능 가속도 레벨은 $250,000m/s^2$ 까지 이다.

이 Charge type의 가속도계는 Charge amp(B&K 2635)을 통해서 전압신호로 변환되어 SONY DAT에 전압신호로 저장된다. 저장된 신호는 다시 레벨 레코더(B&K 2307)에 보내져서 응답신호의 레벨을 기록지에 기록을 하게 된다. 이 기록지에 기록된 데이터를 이용하여 비선형 응답특성을 해석 할 수 있다.

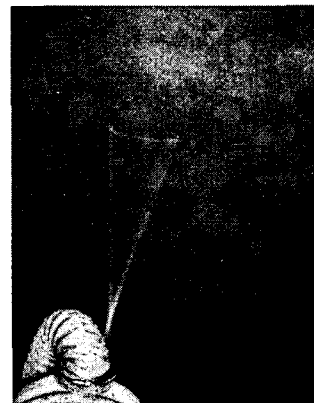


Fig.4 Nonlinear vibration motion of the beam

5. 실험결과 및 고찰

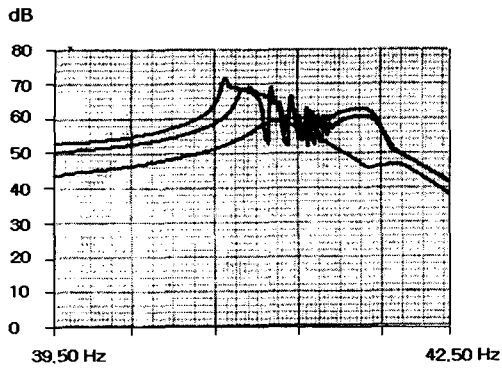


Fig. 5 Frequency response curve for forward direction on the 2nd mode (in-plane)

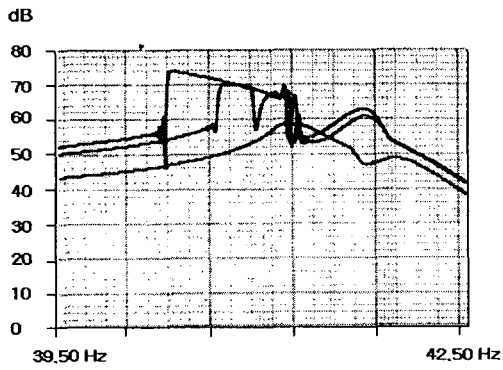


Fig. 6 Frequency response curve for backward direction on the 2nd mode (in-plane)

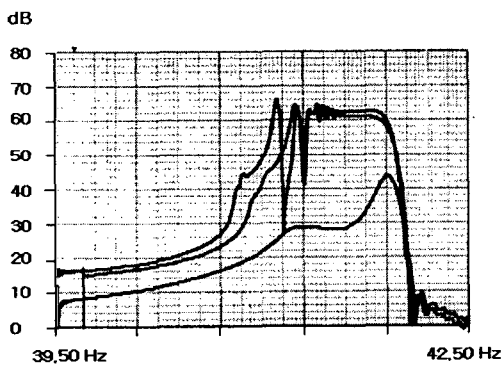


Fig. 7 Frequency response curve for forward direction on the 2nd mode (out of plane)

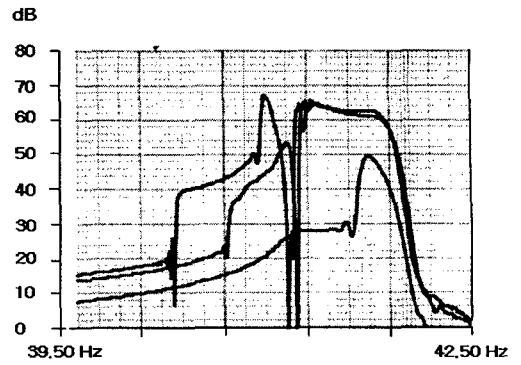


Fig. 8 Frequency response curve for backward direction on the 2nd mode (out of plane)

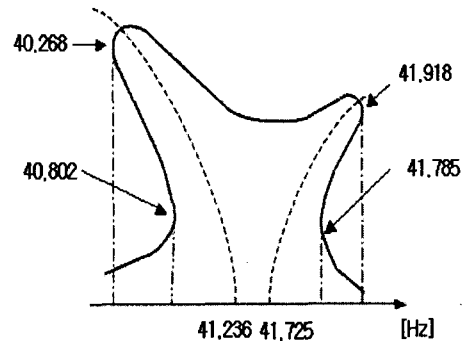


Fig. 9 Jumping phenomenon of the flexible circle cantilever beams

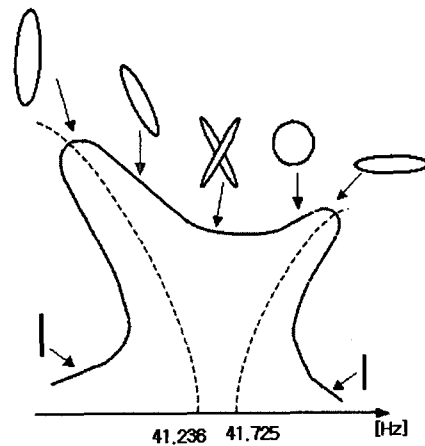


Fig. 10 Non-linear frequency response curve of the flexible circle cantilever beams

유연한 원형 외팔보의 2nd 모드에서의 one-to-one nonlinear coupling 현상은 두개의 도약현상이 coupling 되어 있음을 알 수 있다. 원형 외팔보의 가진 방향과 일치하는 방향인 in-plane 방향 (x-방향)에서 먼저 도약현상이 일어나고 있음을 Fig. 5, Fig. 6에서 알 수 있다. Fig. 5는 가진기의 가진 레벨을 5g, 10g, 20g로 변경해 가면서 그린 그래프이며 가진 주파수는 39.5 Hz에서부터 42.5 Hz까지 변화시켰다. 변화 속도는 0.030 Hz/s의 비율로 가진 주파수를 증가해 가면서 얻어진 곡선이다. Fig. 6은 가진 레벨은 동일하며 가진 주파수는 42.5 Hz에서 39.5 Hz까지 변화속도는 0.030 Hz/s의 비율로 가진 주파수를 감소시켜 가면서 레벨 레코더로 그린 그래프이다. 위 그래프에서 가진력을 증가시키면 in plane 방향에서 hardening spring에 의한 도약현상이 발생함을 알 수 있다.

외팔보의 one-to-one non-linear coupling 현상으로 out of plane 방향(y-방향)의 도약현상이 일어난다. Fig. 7, Fig. 8은 out of plane에서의 도약현상을 보여주고 있다. 위 그래프에서 out of plane 방향에서는 softening spring에 의한 도약현상이 발생함을 알 수 있다. 또한 one-to-one non-linear coupling 현상으로 인하여 planar 운동이 non-planar 운동으로 전환이 되며 모드 연성으로 인하여 외팔보의 또 다른 하나의 불안정한 영역이 나타나고 있다. Fig. 10에서 원형 외팔보의 운동이 가진 주파수에서 어떤 모양으로 변화가 되고 있는지를 보여주고 있다.

6. 결론

유연한 원형 외팔보의 비선형 진동실험에서 one-to-one modal coupling이 갖는 주파수 응답특성을 분석하였다. 외팔보에서 one-to-one modal coupling 으로 in-plane 방향의 진동에너지가 모드연성 때문에 out of plane 방향으로 진동에너지의 전이(transfer)가 발생하며 이 에너지 전이가 non-planar 운동을 유발시킴을 알 수 있다. 따라서 one-to-one modal coupling 이 발생하면 in plane 방향의 진동 진폭이 감소하고 오히려 out of

plane 방향의 진동진폭이 증가함을 볼 수 있다. In plane 방향에서는 hardening spring 특성의 점프현상이 일어나지만 모드연성에 의하여 out of plane 방향에서는 softening spring 현상이 발생하고 있다.

Planar 운동에서 non-planar 운동으로 운동의 양상이 변화하는 과정에서 외팔보는 또 하나의 불안정한 영역을 갖고 있음을 보여주고 있다. 또한 one-to-one modal coupling이 발생하여도 in-plane 방향의 고유주파수와 out of plane 방향의 고유주파수가 서로 약간의 차이가 있음을 실험 결과로 알 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) Haight, E. C., and King, W. W., 1971, stability of non-linear oscillations of an elastic rod, Journal of the Acoustical Society of America., Vol. 52, pp.899-911.
- (2) Tseng, W. Y., and Dugundji, J. , 1970, Nonlinear vibrations of a beam under harmonic excitation, Journal of Applied Mechanics, Vol.37, pp.292-297.
- (3) Haddow, A. G., and Barr, A. D. S., and Mook, D. T., 1984, Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure, Journal of Sound and Vibration, Vol.97, pp.451-473.
- (4) Zavodney, L. D., and Navfeh, A. H., 1989, The nonlinear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation : theory and experiment, International Journal of Nonlinear Mechanics, Vol.24, pp.105-125.
- (5) Zaretzky, C. L., and Crespo da silva, M. R. M., 1994, Experimental investigation of non-linear modal coupling in the response of cantilever beams, Journal of Sound and Vibration, Vol.174, pp.145-167.
- (6) Blevins, R. D., 1979, Formals for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold.
- (7) Broch, J. T., 1975, Non-linear Amplitude Distortion in Vibrating System, Bruel and Kjaer, pp.52-82.