

## 유한요소법을 이용한 이동질량 하에 크랙을 갖는 티모센코 보의 동특성 연구

강환준\*, 이시복\*\*, 홍금식\*\*, 전승민\*

\*부산대학교 대학원 기계설계공학과

\*\*부산대학교 기계공학부

## Dynamic Analysis of the Cracked Timoshenko Beam under a Moving Mass using Finite Element Method

Hwan-Jun Kang\*, Shi-Bok Lee\*\*, Keum-Shik Hong\*\*, Seung-Min Jeon\*

\*Dept. Mechanical Design Engineering Graduate School, Pusan National University

\*\*Dept. Mechanical Engineering, Pusan National University

**KEY WORDS:** Moving Mass(이동질량), Open Crack(개구형크랙), Finite Element Method(유한요소법), Timoshenko Beam Theory(티모센코 빔 이론), Flexibility Matrix(유연행렬), Guyan 응축법 (Guyan Condensation Method)

**ABSTRACT:** In this paper, dynamic behavior of the cracked beam under a moving mass is presented using the finite element method (FEM). Model accuracy is improved with the following consideration: (1) FE model with Timoshenko beam element (2) Additional flexibility matrix due to crack presence (3) Interaction forces between the moving mass and supported beam.

The Timoshenko beam model with a two-node finite element is constructed based on Guyan condensation that leads to the results of classical formulations, but in a simple and systematic manner. The cracked section is represented by local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments and the crack as modeled a massless rotational spring. The inertia force due to the moving mass is also involved with gravity force equivalent to a moving load. The numerical tests for various mass levels, crack sizes, locations and boundary conditions were performed.

### 1. 서 론

구조물 위로 질량을 가진 물체가 접촉하면서 진행할 때 구조물은 정하중에 의한 변형에 비해 큰 응답을 보이게 되며 심한 경우 구조물의 안전에 위험을 초래하게 된다. 이와 같은 이동질량에 의한 진동문제는 크레인, 교량과 같은 기계나 토목 구조물에 많이 나타난다. 특히, 대상 구조물이 대형화되고 이동 물체의 속도와 중량 등이 증가할 경우 이러한 문제의 심각성이 커지게 되므로 구조물과 이동물체간의 상호작용과 이로 인한 동적 응답을 예측하여 구조물의 안정성을 진단할 필요가 있다. 더군다나, 구조물에 크랙과 같은 구조손상이 발생할 경우, 구조물의 불안정성은 더욱 증가되므로 이를 예측하여 위험을 미리 예방할 필요가 있다.

이런 관점에서 구조물에 손상을 주지 않고 결함을 탐지해 낼 수 있는 비파괴적인 방법의 사용은 경제적으로나 편의성 측면에서 매우 효과적이라고 할 수 있다. 이러한 비파괴적인 방법중의 하나가 구조물이나 시스템의 동특성

변화를 측정하여 크랙과 같은 구조손상의 존재, 위치 및 크기를 탐지하는 것으로 구조물의 안전진단 및 사고예방을 위해 많이 응용되고 있다.

일반적으로 이동질량 또는 하중을 갖는 구조물에 대한 동적 연구가 꾸준히 발표되고 있으며,<sup>11,11</sup> 해석적 혹은 유한요소법을 이용한 수치적 방법이 시도되었다. 대부분의 구조물은 오일러-베르누이 보로 가정되었고, 보다 정확한 티모센코 보 모델도 사용되고 있다. 최근에는 이러한 이동질량을 갖는 구조물에 크랙과 같은 구조손상이 있는 경우, 이들이 구조물의 동특성에 미치는 영향에 대한 연구가 발표되고 있으며,<sup>15,71</sup> 이들 결과는 구조물의 안전진단에 유용하리라 사료된다. 하지만, 대부분 오일러-베르누이 보 이론이 적용된 보 구조물에 대해 연구가 진행되었고, 아직까지 티모센코 보에 대한 연구결과는 미흡하다.

따라서, 본 연구에서는 이동질량을 갖는 보 형태의 구조물에 크랙 (비진전형)과 같은 구조손상이 존재하는 경우, 구조물의 동특성 변화를 유한요소법을 이용하여

해석 하였다. 티모센코 보의 유한요소 모델은 Guyan 응축법(Guyan condensation)을 이용하여 간단하면서도, 체계적인 방법으로 구하였고, 크랙 모델은 균열변형 모드를 혼합한 변형률 에너지 밀도함수(strain energy density function)를 구하고 이에 Castigliano's Theory를 적용하여 유연행렬(flexibility matrix)을 구했다. 그리고 이동질량에 의해 보 구조물에 발생하는 상호 작용력은 다양한 관성력 항을 분리하여 고려함으로써, 이들 각 힘이 동적 응답에 미치는 영향을 고찰하였다. 여기에서, 다양한 수치해석이 수행되었으며, 크랙 위치, 크기 및 보 구조물의 경계조건 변화에 따른 동적 응답을 구하였다.

## 2. 이동질량을 받는 크랙된 보의 모델링

### 2.1 티모센코 보의 유한요소 모델

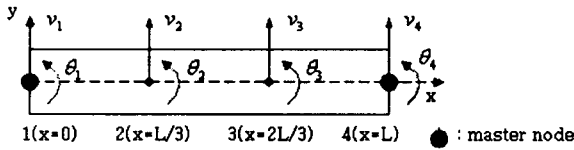


Fig. 1 두개의 주 절점을 가지는 등매개변수의 보 요소

티모센코 보 모델의 유한요소 행렬은 다음과 같이 Guyan 응축법을 사용해서 구했다. Fig. 1과 같이 4개의 등매개변수(isoparametric) 절점(node)을 갖는 티모센코 보 요소를 가정하면, 절점(node) 사이의 보간은 3차이며,  $v$ 는 횡변위,  $\theta$ 는 회전 변위이다. 이 때, 절점 1과 4는 주(master) 절점, 2와 3은 부(slave) 절점으로 구분하여 해당되는 절점 변위 벡터  $q$ 와 강성 행렬  $K$ , 질량 행렬  $M$ 을 분리하면 다음과 같다.

$$q = \begin{bmatrix} q_m \\ q_s \end{bmatrix}, \quad \text{with} \quad \begin{cases} q_m = [v_1 & \theta_1 & v_4 & \theta_4]^T \\ q_s = [v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3]^T \end{cases} \quad (1)$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{ms}^T & K_{ss} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{ms}^T & M_{ss} \end{bmatrix} \quad (2)$$

이때, 요소의 운동방정식은 다음과 같다.

$$(K - \omega^2 M)q = F, \quad \text{With } F = \begin{bmatrix} F_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서, Guyan 응축법을 이용해 변위 벡터를 다시 표현하면, 운동방정식은 다음과 같이 변환된다.

$$q = \begin{bmatrix} I_m \\ -K_{ss}^{-1}K_{ms}^T \end{bmatrix} \cdot q_m = F_m \equiv T_G \cdot q_m \quad (4)$$

$$(K_C - \omega^2 M_C)q = F_m, \quad \text{With } K_C = T_G^T \cdot K \cdot T_G, \quad M_C = T_G^T \cdot M \cdot T_G \quad (5)$$

여기서,  $I_m$ 는  $m$ 차의 단위 행렬이며,  $K_C$  및  $M_C$ 은 각각 응축된 강성, 질량 행렬로써 다음과 같다.

$$K_C = T_G^T K T_G, \quad M_C = T_G^T M T_G \quad (6)$$

$$K_C = \frac{EI}{L^3(1+\phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & L^2(4+\phi) & -6L & L^2(2-\phi) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & L^2(2-\phi) & -6L & L^2(4+\phi) \end{bmatrix}, \quad \text{With } \phi = \frac{12EI}{kAGL} \quad (7)$$

$$M_C = \frac{\rho AL}{(1+\phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & -m_4 \\ m_2 & m_5 & m_4 & -m_6 \\ m_3 & m_4 & m_1 & -m_2 \\ -m_4 & -m_6 & -m_2 & m_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{With } \begin{cases} m_1 = \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3} + \frac{6r^2}{5L^2} \\ m_2 = \left( \frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24} + \left( \frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right) \frac{r^2}{L^2} \right) L \\ m_3 = \frac{9}{70} + \frac{3\phi}{10} + \frac{\phi^2}{6} - \frac{6r^2}{5L^2} \\ m_4 = \left( \frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24} - \left( \frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right) \frac{r^2}{L^2} \right) L \\ m_5 = \left( \frac{1}{105} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} + \left( \frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{3} \right) \frac{r^2}{L^2} \right) L^2 \\ m_6 = \left( \frac{1}{140} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} + \left( \frac{1}{30} + \frac{\phi}{6} - \frac{\phi^2}{6} \right) \frac{r^2}{L^2} \right) L^2 \end{cases} \quad (8)$$

따라서, 이러한 요소 행렬을 적합조건에 따라 구성함

으로써 전체 시스템 행렬을 구할 수 있다.

## 2.2 크랙 부분의 모델링

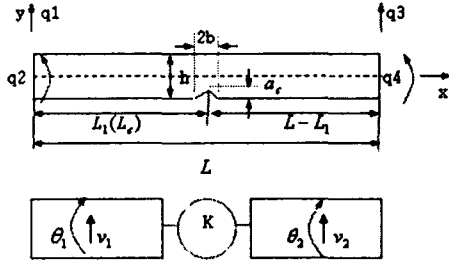


Fig. 2 크랙 보 요소에 삽입된 형상 함수

선형 탄성 구간에서 크랙이 존재하는 경우, 크랙 주위에 응력집중 현상에 의해 유연성이 증가하게 되며 카스티글리아노의 정리에 의하여 크랙에 의해서 추가되는 변위와 크랙 위치에서의 유연행렬을 구하면 각각 다음과 같다.

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i} \int_0^{a_c} J(\alpha) d\alpha \quad (9)$$

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[ \int_0^{a_c} \int_0^{a_c} J(\alpha) d\alpha dz \right] \quad (10)$$

여기서  $a_c$ 는 크랙의 깊이,  $b$ 는 크랙 길이의 반을 의미하고  $P_i$ 는  $i$  방향으로의 일반화된 힘으로써 자유도의 개수( $i=1 \dots 6$ )에 따라 결정되며,  $J(\alpha)$ 는 변형을 에너지 밀도 함수(strain energy density function)로서 제 1 파괴 모드( $K_I$ :개구형)와 제 2파괴모드( $K_{II}$ :면내전단형)를 같이 고려하면 다음과 같다.

$$J(\alpha) = \frac{1}{E'} \left[ (K_{IM} + K_{IP})^2 + (K_{II})^2 \right] \quad (11)$$

$$K_{IP} = \frac{6P x_c}{bh^2} \sqrt{\pi a} \cdot F_{IP} \left( \frac{a}{h} \right) \quad (12)$$

$$K_{IM} = \frac{6P}{bh^2} \sqrt{\pi a} \cdot F_{IM} \left( \frac{a}{h} \right) \quad (13)$$

$$K_{II} = \frac{\kappa P}{bh} \sqrt{\pi a} \cdot F_{II} \left( \frac{a}{h} \right) \quad (14)$$

$$F_{IM,II} \left( \frac{a}{h} \right) = \sqrt{\frac{\tan \left( \frac{\pi a}{2h} \right) \cdot 0.752 + 2.02 \left( \frac{a}{h} \right) + 0.37 \left( 1 - \sin \left( \frac{\pi a}{2h} \right) \right)^3}{\frac{\pi a}{2h} \cos \left( \frac{\pi a}{2h} \right)}} \quad (15)$$

$$F_{II} \left( \frac{a}{h} \right) = \frac{1.122 - 0.561(a/h) + 0.085(a/h)^2 + 0.180(a/h)^3}{\sqrt{1 - (a/h)}} \quad (16)$$

여기서, 아래첨자 P와 M은 각각 전단력과 굽힘 모멘트이며,  $\kappa$ 는 단면의 전단계수(Shear Coefficient),  $a/h$ 는 단면 높이에 대한 크랙의 크기를 나타낸다. 따라서 식(11-16)을 식(9,10)에 대입하면 크랙 위치에서의 유연행렬을 얻을 수 있으므로 Fig. 2과 같은 크랙을 갖는 보 요소의 전체 유연행렬을 구할 수 있다. 이는 크랙이 없는 보 요소의 유연행렬에 크랙에 의해 추가된 유연행렬을 더하여 구할 수 있다.

한편, 크랙 위치에서의 연속 조건은 다음과 같다.

$$v_1(x=0) = q_1, \quad \theta_1(x=0) = q_2 \quad (17)$$

$$v_2(x=L) = q_3, \quad \theta_2(x=L) = q_4 \quad (18)$$

크랙의 위치에서는 굽힘 모멘트와 전단력에 대응하는 회전 변위와 횡 변위의 불연속이 일어나며 다음과 같게 된다.

$$v_2(x=0) - v_1(x=L_1) = \Theta_N \cdot \left[ \frac{\partial v_1(x=L_1)}{\partial x} - \theta_1(x=L_1) \right], \quad (19)$$

$$\theta_2(x=0) - \theta_1(x=L_1) = \Theta_b \cdot \frac{\partial \theta_1(x=L_1)}{\partial x}, \quad \Theta_b = \frac{EJc_b}{L}, \quad \Theta_N = \frac{GAc}{L}$$

$$\frac{\partial \theta(x=L_1)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(x=0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1(x=L_1)}{\partial x} - \theta(x=L_1) = \frac{\partial v_2(x=0)}{\partial x} - \theta_2(x=0) \quad (20)$$

### 2.3 이동질량에 의한 상호작용력

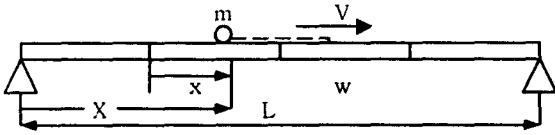


Fig. 3. 이동질량을 가지는 보

Fig. 3과 같은 이동질량을 갖는 보 구조물을 고려하자. 여기서, 이동질량과 보 구조물간에 작용하는 상호 작용력은 접촉점에 수직이며, 이동하는 동안 서로 분리되지 않는다고 가정한다. 이때, 이동질량에 의해 발생하는 힘은 다음과 같다.

$$f_0 = mg - m\ddot{w} \quad (21)$$

여기서  $w$ 는 질량  $m$ 의 횡 변위이며, 접촉점에서 보의 횡 변위와 같다.  $w$ 를 보의 절점변위와 형상함수의 곱으로 표현하면  $w(x,t)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} w(x,t) &= [N(x)]\{q(t)\}, \\ \dot{w}(x,t) &= \frac{\partial w}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial w}{\partial t}, \\ \ddot{w}(x,t) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dot{x}^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \dot{x} + \frac{\partial w}{\partial x} \ddot{x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서,  $w(x,t)$  항은 여러 성분으로 구성되는데,  $\partial^2 w / \partial t^2$ 는 보의 처짐에 의한 관성력,  $2(\partial^2 w / \partial x \partial t)\dot{x}$ 는 코리올리력,  $(\partial^2 w / \partial x^2)\dot{x}^2$ 는 원심력과 관계되는 항이며,  $(\partial w / \partial x)\ddot{x}$ 는 이동질량의 속도 변화에 의해 발생하는 힘과 관계된다. 그리고 보의 횡변위  $w$ 를 각각 시간과 변위에 대해서 미분하면 형상함수와 절점 변위의 형태로 표현되며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= [N]_x \{q\}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = [N]_{xx} \{q\}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= [N] \{\dot{q}\}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = [N] \{\ddot{q}\}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = [N]_x \{\dot{q}\} \end{aligned} \quad (23)$$

따라서, 이동질량과 보 사이의 상호 작용력은 보의 형상 함수에 영향을 받게 되므로 적절한 선정이 중요하다.

### 3. 수치 해석

#### 3.1 크랙을 갖는 보의 고유 진동수 변화

수치해석에 사용된 보의 다음과 같은 단순지지 보로 가정하였다.

Length: 10m, Height: 0.5m, Width: 0.5m, Density: 7860kg/m<sup>3</sup>

Young's Modulus: 2.1e+11Pa, Shear Modulus: 8.2e+10,

Crack Location (Lc/L): 0.3, Crack Depth(a): 0.35mm

$$\text{Velocity Ratio: } V.R = \frac{V_m}{v_c} : v_c = \pi \sqrt{EI/m/L}$$

크랙이 보 구조물의 동특성에 미치는 영향을 알아보기 위해 크랙을 갖는 보의 고유 진동수를 구하였다. 크랙의 결함 유형은 제 1 모드와 제 2 모드가 중첩된 형태로 가정하였고, 파괴역학에 의한 응력확대계수를 고려하였다.

Intact Timoshenko Beam		Cracked Timoshenko Beam ( L <sub>c</sub> /L=0.3, a=0.35mm )	
고유진동수	FEM (Hz)	고유진동수	FEM (Hz)
1차	93.523	1차	91.340
2차	371.382	2차	360.194
3차	825.903	3차	811.327
4차	1445.649	4차	1433.743

Table. 1 Natural frequency(1<sup>st</sup>-4<sup>th</sup>) change between cracked beam and intact beam.

Table. 1은 크랙이 없는(inact) 티모셴코 보와 크랙이 있는(cracked) 티모셴코 보의 고유 진동수 변화이다. 일반적으로 크랙의 존재는 고유 진동수를 저하시킴을 알 수 있다.

### 3.2 이동질량에 의한 크랙을 갖는 보의 동적 응답

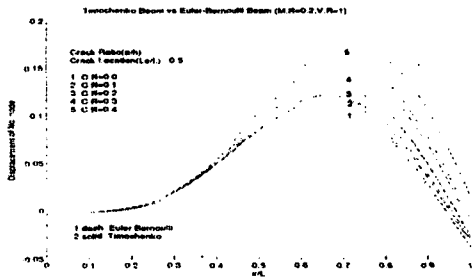
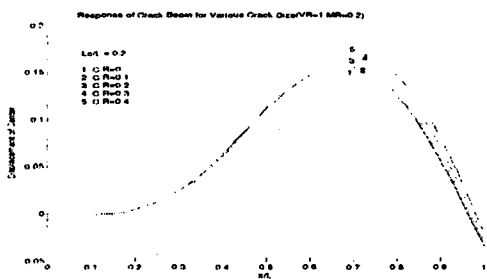
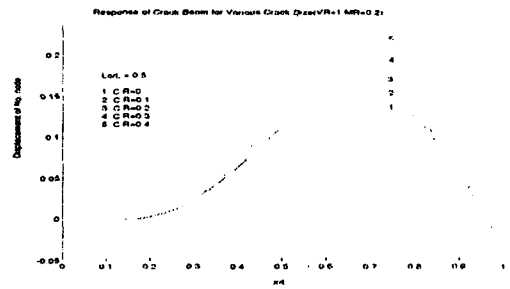


Fig. 4 크랙 크기에 따른 응답변화

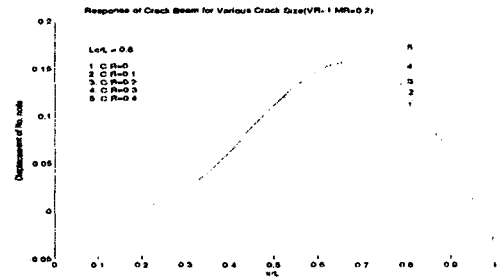
Fig. 4는 이동질량에 의한 크랙을 갖는 보의 동적 응답을 나타낸 것으로, 다양한 크랙의 크기에 따른 보 중앙에서의 횡 변위 응답을 나타낸다. 이동질량의 속도는 임계속도( $v_c=1$ )로 일정하며, 질량비는 0.2라고 가정하였다. 하중이 보의 중앙에 위치할 때, 최대 변위가 발생하는 정적 처짐과 달리, 이동질량이 왼쪽에서 오른쪽으로 이동할 때 보의 최대 변위는 이동질량이 보다 오른쪽으로 이동했을 때 나타나게 된다. 또한 크랙 크기가 증가함에 따라 변위도 크게 됨을 알 수 있는데, 이는 크랙 위치에서 유연성이 증가되기 때문이다. 한편, 오일러-베르누이 보보다 티모셴코 보에 의한 변위가 더 크며, 비교적 세장비가 작은 경우, 티모셴코 보 모델이 보다 타당하게 된다.



(a)  $L_c/L=0.2$



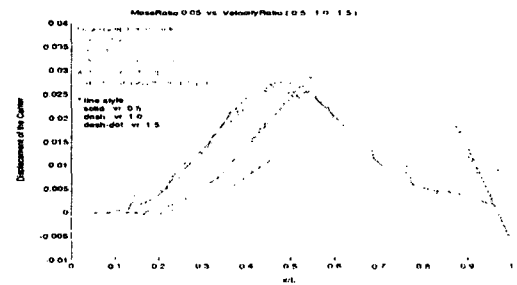
(b)  $L_c/L=0.5$



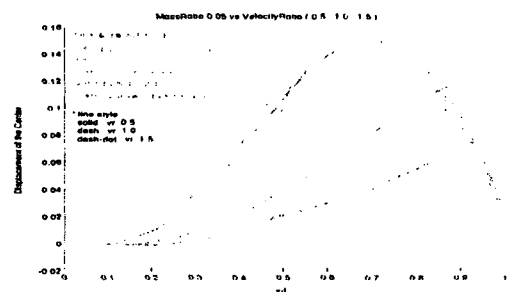
(c)  $L_c/L=0.8$

Fig. 5 크랙 위치에 따른 응답변화

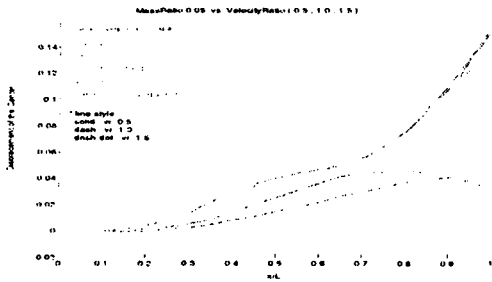
Fig. 5는 크랙의 위치에 대한 보 중앙부의 응답을 나타낸다. 크랙이 고정단 가까이에 위치할수록 크랙에 의한 영향이 작아짐을 알 수 있다.



(a) 양단고정보



(b) 단순지지보



(c) 외팔보

Fig. 6 다양한 경계 조건을 갖는 속도비와 상호작용력에 따른 응답변화

Fig. 6은 이동질량에 의한 상호 작용력과 속도비에 따른 응답변화를 나타내며, 각각 양단고정보, 단순지지보, 외팔보일 때의 응답이다. 상호 작용력은 크게 보의 처짐에 의한 관성력, 코리올리력, 원심력, 이동질량의 속도 변화에 의한 힘으로 구성된다. 여기서는 이동질량의 속도가 일정하다고 가정하고 속도비를 변화시켜가며 각 상호 작용력의 영향을 고찰하였다. 특히, 고속에서 원심력의 영향과 저속에서 코리올리력에 의한 영향이 특이하다. 경계조건과 속도비가 변화함에 따라 보의 거동이 확연히 달라짐을 볼 수 있다.

#### 4. 결 론

이동질량을 갖는 보 구조물에 크랙이 존재하는 경우, 구조물의 고유 진동수 변화와 동특성 변화를 유한요소법을 이용하여 해석하였다. 보는 티모셴코 이론을 적용했으며, Guyan 응축법(Guyan condensation)을 이용하여 유한요소 모델을 구했고, 크랙 요소는 제 1, 2차 파괴 변형모드가 고려된 유연행렬로 나타내었다. 이동질량에 의해 발생하는 상호 작용력은 관성력, 원심력, 코리올리력 항이 고려되어 보 구조물의 동특성에 큰 영향을 주었다. 일반적으로 크랙이 있는 보 구조물은 유연성이 증가하여 고유진동수가 적어지는 경향이 있다. 크랙의 크기, 위치, 이동질량의 크기, 속도 및 경계조건에 따른 보의 응답 변화를 구했고, 이러한 정성적인 특징을 보다 정량화한다면, 크랙과 같은 구조 손상을 갖는 구조물의 구조 손상을 예측하여, 안전진단 등

에 활용될 수 있으리라 사료된다.

#### 후 기

본 논문은 과학기술부 국가지정연구실 사업(과제번호: M1-0302-00-0039-03-J00-00-03-10)에서 지원하여 연구되었습니다.

#### 참 고 문 헌

- [1] Yoshimura, T.Konishi , "A Finite Element Method Prediction of the Vibration of Bridge Subjected to a Moving Vehicle Load" , J.Sound and Vibration, 1986, Vol.96, pp45-53
- [2] Joseph R.Rieker, "Discretization considerations in Moving load finite element beam models " , Finite Elements in Analysis and Design 21 (1999) 129-144
- [3] Olsson, M. "On the fundamental Moving Load problem" , J. Sound Vibration , 1991,145, 299- 307
- [4] Akin,J.E. and Mofid, M. , "Numerical Solution For Response of Beam with Moving Mass" J. Structural Engineering, Vol.115, No.1,1989, pp120-131
- [5] M.Palacz, M.Krawczuk, "Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method" , Computers and Structures" 80(24) (2002) 1809-1816
- [6] Bannios.G and Trochides.A "Dynamic Behavior of a Cracked Cantilever Beam" , Applied Acoustics, 2002,Vol.256, No.1, pp591-603
- [7] "Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass" , M.A.MAHMOUD And M.A.ABOU ZAID, J.Sound and Vibration 2002