

## 비선형 해양파의 파형연구에 관하여

장택수\* · 황성현\* · 권순홍\*  
\*부산대학교 조선해양공학과

### A Study on Nonlinear Water-Wave Profile

TAEK-SOO JANG\*, SUNG-HYUN HWANG\* AND SUN-HONG KWON\*\*

\*Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University, Korea

\*\*Presently Visiting scholar at Civil Engineering Department in Texas A&M University.

**KEY WORDS:** Banach Contraction Mapping Theory, High-order Stokian wave, Contraction Coefficient, Bernoulli's Operator, Sup-Norm

**ABSTRACT:** This paper deals with a new mathematical formulation of nonlinear wave profile based on Banach fixed point theorem. As application of the formulation and its solution procedure, some numerical solutions was presented in this paper and nonlinear equation was derived. Also we introduce a new operator for iteration and getting solution. A numerical study was accomplished with Stokes' first-order solution and iteration scheme, and then we can know the nonlinear characteristic of Stokes' high-order solution. That is, using only Stokes' first-order(linear) velocity potential and an initial guess of wave profile, it is possible to realize the corresponding high-order Stokian wave profile with the new numerical scheme which is the method of iteration. We proved the mathematical convergence of the proposed scheme. The nonlinear strategy of iterations has very fast convergence rate, that is, only about 6-10 iterations are required to obtain a numerically converged solution.

#### 1. Introduction

대부분의 비선형 해양파 문제의 파형 해석에 있어서 섭동(Perturbation)이론에 근거하고 있다. 즉 경계 섭동 방법(boundary perturbation method)에 의해 자유수면 경계조건을 mean position에 적용하여왔다. 본 연구에서는 이러한 문제를 개선하기위하여 비선형 해석 이론(nonlinear operator theory)를 동역학적 비선형 자유수면 경계조건(dynamic nonlinear free surface boundary condition)에 도입, 적용하였다.

이러한 이론을 바탕으로 본 연구에서는 비선형 반복법을 제시 하였고, 적당한 초기 조건을 가질 때 높은 정도와 빠른 수렴성을 수치 결과를 통하여 확인할 수 있었다. 또한 그 결과를 섭동(perturbation) 이론으로 유도한 고전적인 방법과 비교하였다.

본 연구에서 심수역(deep water)일 경우에 대하여 선형 속도 포텐셜을 이용하여 비선형 연산자(nonlinear operator)를 구성하였다. 제시된 비선형 반복법에 의하여 비선형 파형을 구현하여

선형 파형(linear wave)그리고 Stokian 4차파형(4th wave)의 비선형 파형과 비교 연구하였다. 수렴 속도와 수렴할 때의 비선형 거동을 함께 해석 하였다. 그리고 오차 계산에 있어서 본 연구에서는 두 가지 norm(sup-norm과 ~~L2~~ norm)을 도입하였다.

#### 2. Bernoulli's operator

유체를 균질하고 비점성 그리고 비압축이라고 가정하고 여기에 유체 운동이 비회전성이라고 할 때 우리는 속도 포텐셜 함수가 존재한다는 것을 알 수가 있다. 여기서 유체 운동을 2-dimension 이라고 보며 wave elevation은  $z = \eta(x, t)$ 으로 정의 할 수가 있다. 표면장력까지 무시한다면 우리는 자유 수면에 관한 Bernoulli's equation을 얻을 수가 있다.

$$\phi_t + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{P_a}{\rho} + zg = f(t) \tag{1}$$

제1저자 장택수 연락처: 부산광역시 금정구 장전동 산 30번지  
부산대학교 조선해양공학과  
051-510-2753 taek@pusan.ac.kr

여기서  $\phi$ ,  $P_d/\rho$ 는 속도 포텐셜, 대기압 그리고 유체의 밀도를 나타낸다. 여기서  $f(t)$ 를  $P_d/\rho$ 로 취하고 자유 수면의 elevation으로 표현하면 식(1)은 다음과 같이 된다.

$$\eta = -\frac{1}{g} \left[ \phi_x + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right]_{z=\eta} \quad (2)$$

식(2)의 오른쪽의 식은 자유수면  $\eta$ 의 operator로 볼 수 있으면 본 연구에서 새로운 operator를 B라고 지정하고 이것을 Bernoulli's operator라고 명명하기로 한다.

$$B(\eta) = -\frac{1}{g} \left[ \phi_x + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right]_{z=\eta} \quad (3)$$

식(3)을 통하여 Bernoulli's operator, B는 비선형이라는 것을 알 수 있다. 여기서 식(2)를 단순화 시키면

$$\eta = B(\eta) \quad (4)$$

Bernoulli's operator, B를 구성하기 위해서 우리는 x방향으로만 이동하는 plane harmonic waves를 생각한다. 그의 속도 포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi(\theta, z) = -\frac{ag}{\omega} e^{kz} \sin \theta \quad (5)$$

식(5)는 Stokes' first-order solution이고  $k, a$ 와  $\omega$ 는 파수(wave number), 파 진폭(wave amplitude) 그리고 파 주기(wave frequency)를 나타내며  $\theta$ 는 Phase 함수,  $kx - \omega t$ 이다.

심수역(deep water)에서 선형 분산성 관계,  $\omega^2 = kg$ 를 이용하고 식(5)를 식(3)에 대입하면 명백한 Bernoulli's operator, B를 구할 수가 있다.

$$B(\eta) = ae^{k\eta} \cos \theta - \frac{ka^2}{2} e^{2k\eta} \quad (6)$$

식(6)는 심수역(deep water)에서의 plane harmonic waves의 Bernoulli's operator가 된다.

### 3. Banach fixed point theorem

비선형 문제에 해결하기 위해서 nonlinear contraction mapping에 기초한 Banach fixed point 이론이 많은 분야에 적용되어 왔다(Zeidler, 1986).

본 연구를 통하여 식(1)과 식(2)가 식(4)와 같다는 것을 알 수 있고 이것은 Bernoulli operator가 Banach fixed point를 가질 수 있고 응용할 수 있다는 것을 의미한다. 따라서 Bernoulli's operator는 다음과 같은 반복법에 대한 일반식을 가진다.

$$\eta_{n+1} = B(\eta_n) \quad (7)$$

우선, wave elevation,  $\eta$ 가 자유표면을 나타내기 때문에  $\eta$ 는 연속적이어야만 한다. 그러므로 sup-norm,  $\| \cdot \|_\infty$  개념을 이

용하는 것이 편리하다(Roman, 1975). 게다가 plane harmonic waves를 다루므로 범위는  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 가 된다. 두 개의 다른 wave elevation,  $\eta_1, \eta_2$ 를 생각해 보면

$$\| \eta_1 - \eta_2 \|_\infty = \| B(\eta_1) - B(\eta_2) \|_\infty \quad (8)$$

이고 이것은 두 개의 wave elevation의 distance를 나타낸다. 이것을 식으로 나타내면

$$(9)$$

식(6)을 대입하고 삼각 부등식(triangle inequality)와 Taylor series를 적용하면 식(8)은 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\| B(\eta_1) - B(\eta_2) \|_\infty \leq ka(1+ka) \| \eta_1 - \eta_2 \|_\infty \quad (10)$$

$ka$ 는 wave slope를 나타낸다. 또한  $ka(1+ka)$ 는 contraction coefficient이므로 이 값이 1보다 작을 경우 solution을 가지는 것을 알 수 있다.

### 4. Numerical result

본 연구에서 제시한 방법에 의한 수치 결과를 선형 파형인 linear wave 그리고 비선형파형인 Stokian 4th wave와 함께 비교 연구하였다. 초기조건은 zero function( $n=0$ )에서 시작하였다. 즉  $\eta_0=0$ 의 초기조건을 주었다. 세 개의 다른 wave slope, 즉  $ka$ 가 0.5, 0.15, 0.25를 가지고 심수역(deep water)에서 수치 계산을 수행하였다. 일련의 계산과정에서 중요한 convergence test 결과, 수렴하면서 비선형 거동 현상, 그리고 convergence solution과의 비교를 도시하였다.

본 연구에서 제시된 이론의 수렴성을 알기위하여 두 가지 norm error를 비교하였다.

$$\mu_\infty = \frac{\| \eta_{ST} - \eta_n \|_\infty}{\| \eta_{ST} \|_\infty} \quad (11)$$

$$\mu_2 = \frac{\| \eta_{ST} - \eta_n \|_2}{\| \eta_{ST} \|_2} \quad (12)$$

여기서  $\eta_{ST}$ 는 Stokian 4th wave elevation이고  $\eta_n$ 은 본 연구에서 제시한 이론의 n번째 반복한 wave elevation이다. 그리고  $\| \cdot \|_\infty$ 와  $\| \cdot \|_2$ 는 sup-norm과 L2 norm을 말하는 것이다. 그 결과들은 Fig.1과 Fig.2에 나타내었다. 그림들을 보면 본 연구에서 제시된 방법은 10번 정도의 반복만으로 해를 구할 수 있다는 것을 볼 수 있다. 또한 wave slope에 따라서 오차의 크기가 조금씩 증가함을 관찰할 수가 있다.

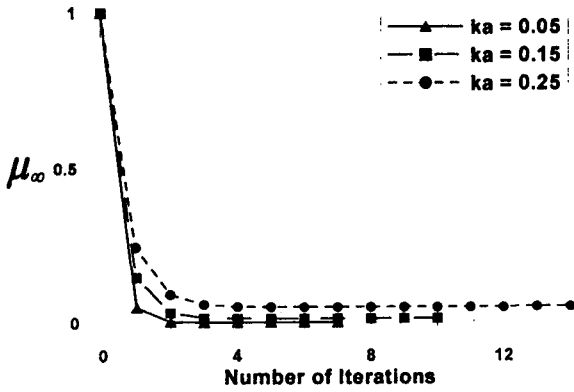


Fig 1. Test for numerical convergence using sup\_norm

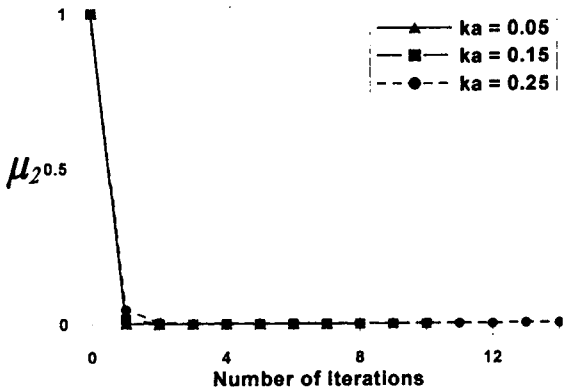


Fig 1. Test for numerical convergence using  $L_2$  norm

각각의 wave slope에 대하여 convergence behavior를 Fig.3, Fig.4, Fig.5에 도시하였다. 그림에서 보는 것과 같이 초기 조건은 zero function인  $\eta_0 = 0$ 에서부터 시작하여 그 거동이 비선형화 되는 것을 볼 수가 있었다.

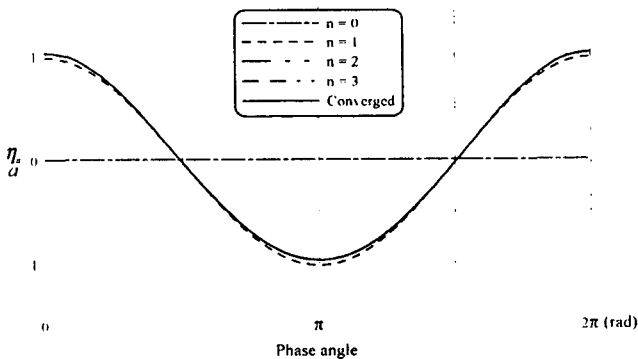


Fig 3. Convergence behavior of  $\eta_n$  for  $ka = 0.05$

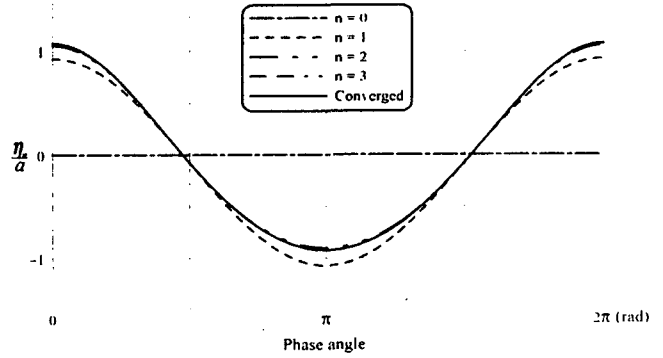


Fig 4. Convergence behavior of  $\eta_n$  for  $ka = 0.15$

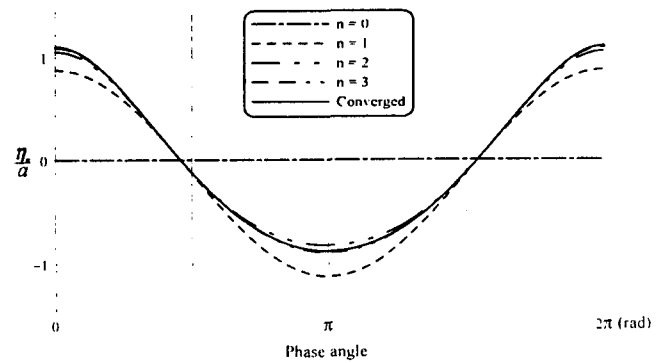


Fig 5. Convergence behavior of  $\eta_n$  for  $ka = 0.25$

결과를 비교하기 위하여 선형 파형과 비선형 파형인 Stokian 4th wave와 비교한 결과를 Fig.6, Fig.7, Fig.8에 한 주기에 관하여 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 wave slope가 0.05일 때는 세 가지 파형이 비슷하다는 것을 알 수 있다. 또한 wave slope가 0.15일 경우에 본 연구에서 제시한 convergence solution은 Stokian 4th wave와 거의 일치함을 알 수 있다. 하지만 wave slope가 커짐에 따라서 파정에서의 약간의 오차를 확인할 수 있다. 그러나 비선형 파형의 특성을 계산된 그림을 통하여 알 수 있다. 즉 비선형 해양파의 파형 특성이 파정에서는 flatter한 경향이 나타나고 파정에서는 steeper한 경향을 뚜렷한 관찰이 가능하다.

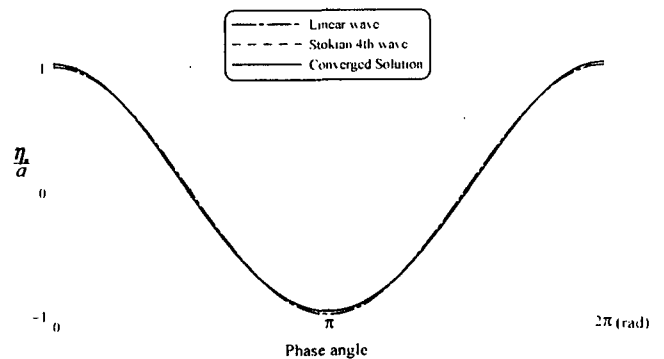


Fig 6. Comparison of wave profiles for  $ka = 0.05$

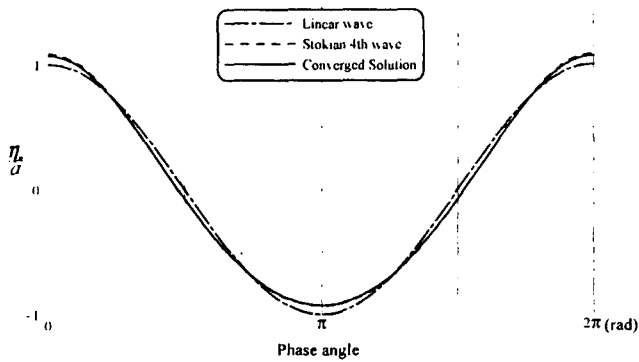


Fig 7. Comparison of wave profiles for  $ka = 0.15$

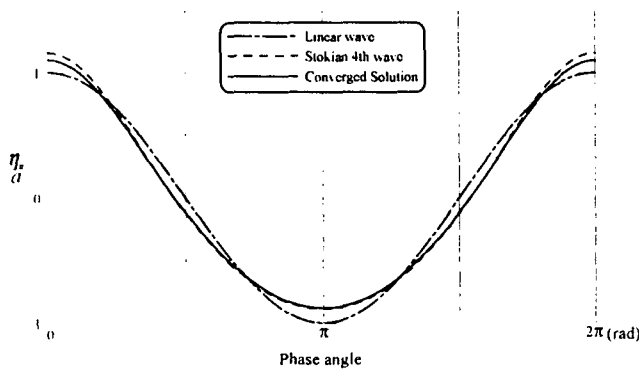


Fig 8. Comparison of wave profiles for  $ka = 0.25$

## 5. Conclusion

Banach fixed point 이론을 비선형 해양파의 파형 연구에 적용하였다. 즉 비선형 파형 계산에 관한 반복법을 제시하였고 수치연구를 통해 실제 비선형파형에 가까운 비선형파를 구현하였다. 그리고 해의 수렴성, 그리고 convergence behavior를 수치계산으로 도시하였다.

## 후 기

본 연구에 도움을 준 김범준군에 감사드립니다

## 참 고 문 헌

- Dalzell, J.F. (1999), "A Note on Finite Depth Second-order Wave-Wave Interactions", vol. 21, Applied Ocean Research, pp 105-111.
- Debnath, L (1994), "Nonlinear Water Waves", Academic Press. Inc.
- Longuet-Higgins M.S. (1962), "Resonant Interaction between Two Trains of Gravity Waves", Journal of Fluid

Mechanics., 12:321.

Roman, P. (1975), "Some Modern Mathematics for Physicists and Other Outsiders" vol.1 Pergamon Press Inc. New York.

Sharma, J.N., R.G. (1979), "Development and Evaluation of a Procedure for Simulation of a Random Directional Second-order Sea Surface and Associated Wave Forces", Ocean Engineering Rep, University of Delaware, pp 112.

Stokes G.G (1847), "On the Theory of Oscillatory Waves", Transaction of the Cambridge Philosophical Society, vol. 8, and Supplement. Scientific Papers, vol. 1.

Stackgold I. (1988), "Green's Functions and Boundary Value Problem".

Zeidler E. (1986), "Nonlinear Functional Analysis and its Application", vol. 1, Springer Verlag, New York.

2004년 10월 15일 원고 접수