

탄성유체윤활 및 접선하중 상태에서 캠-롤러 접촉표면의 내부 응력장

김형자¹, 김영대², 박경동³, 구영필⁴ (부경대학교 기계공학부)

Subsurface stress field beneath the cam-roller contact surface under elasto-hydrodynamic lubrication and tangential loading

¹Hyung-Ja Kim (School of Mech. Eng., Pukyong Univ) kimhyun@pknu.ac.kr,

²Young-Dae Kim (School of Mech. Eng., Pukyong Univ) ydkim@pknu.ac.kr,

³Kyung-Dong Park (School of Mech. Eng., Pukyong Univ) parkkd@pknu.ac.kr

⁴Young-Pil Koo* (School of Mech. Eng., Pukyong Univ) ypkoo@naver.com

ABSTRACT

For cam and roller-follower contacting surfaces, the effect of tangential loading on the subsurface stress field at an elasto-hydrodynamic lubrication condition has been studied numerically. As tangential load increases, the subsurface stress field extended more widely to the direction of the tangential load. The positions of the maximum shear stress and the maximum effective stress are getting closer to the surface with the increasing tangential load. The tangential load at the elasto-hydrodynamic lubrication condition is of little consequence to the subsurface stress field.

Keywords : subsurface stress, tangential load, elasto-hydrodynamic lubrication, cam, roller

기호설명

a : half size of the rectangular patch in sliding (x) direction

b : half size of the rectangular patch in transeverse (y) direction

f_c : friction coefficient

n : number of rectangular patches

p : normal load or surface pressure

p_0 : maximum Hertzian contact pressure

q : tangential load

r : contact-radius or semi-contact-width

s_{ij} : substress components caused by normal load

t_{ij} : substress components caused by tangential load

V : velocity of lubricant

W : total normal load

x, y, z : Cartesian coordinates for the points in the body

Γ, Λ : potential functions for normal load

Ω, Ω_1 : potential functions for tangential load

ξ, ζ : Cartesian coordinates for the loads

η : viscosity of lubricant

τ_1 : maximum shear stress

σ_e : von Mises' effective stress

σ_{ij} : combined substress components

1. 서론

기계장치가 구속 운동을 통하여 생산적인 일을 하기 위해서는 부품 사이에 상대적인 운동이 필요하다. 부품의 접촉면을 통하여 상대 운동이 일어나며 하중이 전달된다. 대부분 기계장치의 고장은 접촉면의 손상에 기인하므로 표면의 신뢰성은 기계의 수명과 밀접한 관계가 있다[1]. 신뢰성이 높은 표면을 설계하기 위해서는 재료의 거시적 강도뿐만 아니라, 미시적 응력 상태 즉, 표면에 작용하는 하중에 의하여 표면 아래의 재료 내부에 발생하는 응력장이 고려되어야 한다.

표면 내부에 응력을 발생시키는 원인은 표면의 하중이므로 내부 응력장을 구하기 위해서는 표면의 실제 작동조건과 부합하는 표면의 하중 분포를 먼저 알아야 하고 하중 조건에 따른 응력해석이 이루어져야 한다.

부표면 응력장을 구하기 위하여 오래 전부터 다양하게 연구가 이루어져 왔다. 접촉부의 형상을 원형 또는 타원으로 단순화할 수 있는 경우에는 접촉 현상의 이해에 고전적인 정확해가 이용 가능하다[2]. 일반적인 형상의 접촉 표면 내부의 응력 분포를 표현하기 위하여 포텐셜함수가 도입되었다[3-4]. 이것을 실제적인 접촉 문제에 적용하기 위하여 수치적인 방법이 사용되고 있다. 표면에 수직하중만 작용하는 경우에 접촉영역을 여러 개의 사각조각 표면으로 이산화하여 수치해석에 의하여 접촉 표면 내부의 응력을 계산하는 방법이 활용되어져 왔다[5].

접선하중이 작용하는 경우의 응력분포에 대하여 해석적 방법[6], 수치적 방법[7] 등이 소개되었다. 기존 해의 정밀도를 개선하기 위하여 수정된 해[8]와 포텐셜함수와 사각조각을 이용하여 접선하중에 의한 반 무한체 내의 응력 분포해[9]가 발표되었다. 최근에는 표면 내부의 응력을 정밀하고 신속하게 구하기 위하여 푸리에 변환과 수치적분[10], 고속 푸리에 변환[11-12], Flament 식과 수치적분[13] 등을 이용한 방법들이 소개되었다. 여러 방법 중에서 접선하중에 대하여 포텐셜함수와 사각조각 해를 이용한 방법[9]은 정확해에 매우 근접하는 수치해를 제공한다.

본 연구에서는 포텐셜함수를 이용하여 수직하중과 접선하중이 동시에 작용할 때 접촉면 내부의 응력장을 수치적으로 구하여 접선하중이 표면 내부의 응력장에 미치는 영향을 알아보고자 한다. 먼저 실린더의 접촉에서 수직하중만 작용할 경우와 이에 접선하중이 부가된 경우를 비교 검토하고, 탄성유체 윤활상태로 운전되는 기계 요소인 캠과 톨러형 종동자 접촉면에 대하여 윤활상태에서 수직하중만 작용하는 경우와 수직하중과 접선하중이 함께 작용하는 경우의 접촉표면 내부의 응력장을 평가하고자 한다.

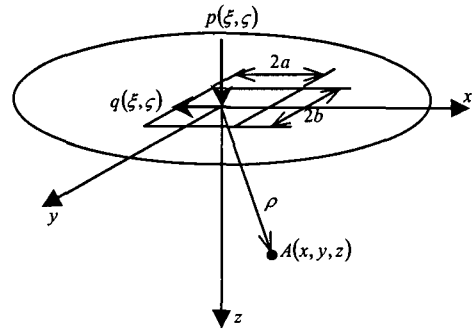


Fig.1 Loading on a surface and coordinate system

2. 접촉표면 내부 응력장

Fig.1과 같이 접촉표면에 수직하중과 접선하중이 동시에 작용할 때 표면 내부의 응력장은 각각의 하중에 의한 응력장을 중첩함으로써 구해질 수 있다. 즉, 표면 아래 임의 위치 A에 발생하는 응력성분은 식(1)과 같이 표현될 수 있다.

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n (s_{ij} + t_{ij})_k \quad i=1,2,3, j=1,2,3 \quad (1)$$

여기에서 s_{ij} 는 수직하중 p 에 의한 응력성분, t_{ij} 는 접선하중 q 에 의한 응력성분이고 n 은 수직하중 또는 접선하중이 작용하는 사각조각의 수이다. 다수의 수직하중 또는 접선하중이 표면에 작용하는 경우에는 각각의 사각조각에 작용하는 하중이 재료 내부에 발생시키는 응력을 중첩함으로써 전체 응력을 구할 수 있다.

표면에 작용하는 수직하중에 의한 포텐셜함수를 식(2)와 같이 정의하면 수직하중에 의한 응력성분은 식(3)과 같이 표현된다[5].

$$\Gamma = \iint p \log z + \rho \xi \zeta$$

$$\Lambda = \iint \frac{p}{r} d\xi d\zeta$$

$$\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\zeta)^2 + z^2} \quad (2)$$

$$s_{11} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{\lambda+G} \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{G}{\lambda+G} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} \right)$$

$$s_{22} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{\lambda+G} \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{G}{\lambda+G} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} \right)$$

$$s_{33} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \right)$$

$$s_{12} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{G}{\lambda+G} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} \right)$$

$$s_{23} = -\frac{1}{2\pi} \left(z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y \partial z} \right)$$

$$s_{31} = -\frac{1}{2\pi} \left(z \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z \partial x} \right)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

식(4), 식(5)와 같이 접선하중에 의한 포텐셜 함수와 그 도함수를 각각 도입하면 접선하중에 의한 응력성분은 식(6)과 같이 표현된다[9].

$$\Phi_1 = \iint q \{ z \ln(\rho+z) - \rho \} d\xi d\zeta \quad (4)$$

$$\Phi = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \iint q \ln(\rho+z) d\xi d\zeta \quad (5)$$

$$t_{11} = \frac{\nu+1}{\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3} - z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right\}$$

$$t_{22} = \frac{\nu}{\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\nu \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x \partial y^2} - z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right\}$$

$$t_{33} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial z^2}$$

$$t_{12} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} + 2\nu \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y} - z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right\}$$

$$t_{23} = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$t_{31} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - z \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial z} \right\} \quad (6)$$

식(3)과 식(6)에서 각각의 응력성분의 크기를 알기 위해서는 편미분 항들을 우선 구해야 하는데, 수직하중에 대해서는

Love[5]의 해를, 접선하중에 대해서는 Cho[9] 등의 해를 각각 적용하여 구할 수 있다.

3. 해석 대상 및 방법

3.1 실린더 접촉

접선하중의 존재 유무에 따른 응력 상태의 비교를 위하여 건조 상태의 실린더 접촉에 대하여 응력해석을 수행한다. 해석 절차는 다음과 같다. 먼저 접촉 해석을 수행하여 표면의 접촉 압력 즉, 수직하중을 구한다. 마찰계수를 가정하여 접선하중을 결정한 다음, 수직하중과 접선하중에 의한 응력성분을 누적 계산한다.

이상적인 실린더 접촉에서는 접촉면에 접선하중이 작용하지 않지만 비교 연구를 위하여 각각 마찰계수 0.1, 0.2에 상응하는 접선하중을 부가하여 응력해석을 수행하고 결과를 비교하고자 한다. 접선하중은 식(7)과 같이 마찰계수와 수직하중의 곱에 의하여 구한다.

$$q = f_c p \quad (7)$$

3.2 캠-롤러 접촉

캠과 롤러형 중동자는 접촉과 상대운동에 의하여 하중이 전달되고 윤활 상태로 운전되므로 이러한 실제 조건을 고려하여 응력해석을 수행하는 것은 공학적으로 필요한 연구로 여겨진다. 캠-롤러 접촉은 탄성유체 윤활상태로 운전되므로 접촉면의 압력 분포는 탄성유체 윤활해석에 의하여 구해질 수 있다[14]. Fig.2에 탄성유체 윤활상태에서 캠-롤러 접촉면의 압력분포를 나타내었다. 접촉면 가장자리에 작용하는 최대 압력은 924MPa, 중앙에서의 최대 압력은 779MPa이다. 압력분포에서 각각의 격자에 작용하는 힘을 응력해석의 수직하중으로 적용한다.

접선하중을 구하기 위해서, 식(7)에 보인 바와 같이 마찰계수를 알아야 한다. 탄성유체 윤활상태에서의 마찰계수는 식(8)과 같이 수직하중에 대한 점성저항력의 비에 의하여 계산된다.

$$f_c = \frac{\iint \eta \frac{dV}{dz} dx dy}{W} \quad (8)$$

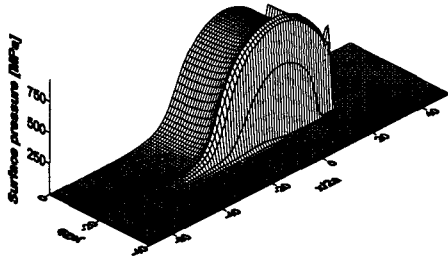


Fig.2 3-D view of surface pressure on the cam-roller contact

또한, 표면의 불균일이나 윤활유 공급 부족 등의 경우에는 마찰계수가 커져서 접선하중의 증대가 예상되므로 마찰계수를 각각 0.1, 0.2, 0.3 및 0.4로 가정한 상태에서 응력해석을 수행하여 그 결과를 비교하고자 한다. 캠-롤러 접촉부를 실린더와 실린더의 접촉으로 가정하였을 때 Hertz 접촉 압력의 최대치 p_0 는 730MPa이다. 이것은 본 연구에서 응력의 무차원화 기준으로 사용된다.

4. 해석 결과 및 검토

4.1 실린더 접촉

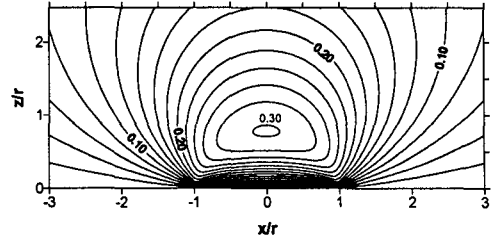
Hertz의 접촉 이론에 의하면 무한 길이의 두 실린더 접촉에서 접촉면 내부에 발생하는 최대 전단응력의 크기는 식(9)에 나타난 바와 같이 최대 접촉압력의 0.30배이며 그 발생 위치는 표면에서 접촉점 아래로 접촉반쪽의 0.78배이다.[15]

$$\tau_1 = 0.30p_0 \quad @ \quad x=0, \quad z=0.78r \quad (9)$$

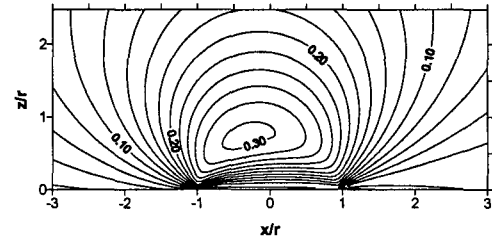
최대전단응력은 응력해석 결과로 얻어진 응력성분을 식(10)에 적용하여 구한다.

$$\tau_1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{33} - \sigma_{11}}{2}\right)^2 + \sigma_{31}^2} \quad (10)$$

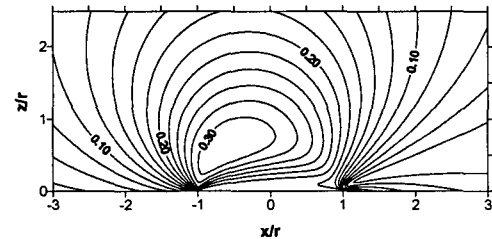
Fig.3 (a)는 실린더의 Hertz 접촉에 의한 내부응력 해석결과로서 접촉점에서 재료 깊이방향으로 'x-z'단면상의 최대전단응력 등고선을 보여주고 있다. 응력해석에 의한 최대전단응력의 최대치는 $0.301p_0$, 그 발생



(a) Normal load only, $f_c = 0$



(b) Normal load with traction, $f_c = 0.1$



(c) Normal load with traction, $f_c = 0.2$

Fig.3 Contour of maximum shear stress for contact of cylinders

깊이는 $0.775r$ 로서 Hertz의 정확해와 거의 일치한다. Fig.3 (b)는 실린더의 접촉 표면에 수직하중과 동시에 마찰계수 0.1에 상응하는 접선하중이 '-x'방향으로 작용할 때 재료 깊이방향으로 'x-z'단면상의 최대 전단응력 등고선을 나타내고 있다. 최대 전단응력의 최대치는 접선하중의 증첩 효과에 의하여 약간 증대하여 $0.306p_0$ 로 나타났다. 그 발생위치는 접선하중의 영향에 의하여 '-x'방향으로 $0.35r$ 만큼 이동되었다. Fig.3(a)-(c)에서 접선하중이 증가하면 최대응력의 발생위치는 접선하중 작용방향으로 이동함과 동시에 표면 가까스로 이동함을 볼 수 있다.

4.2 캠-롤러 접촉

탄성유체 윤활상태에서 수직하중만 작용할 경우와 수직하중과 식(8)에 의하여

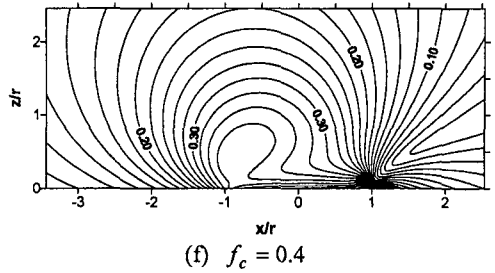
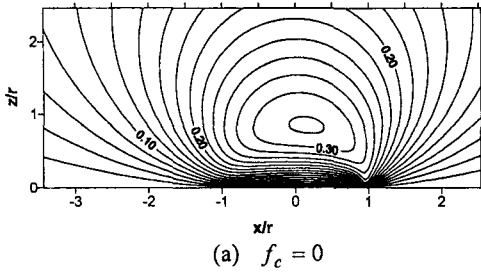
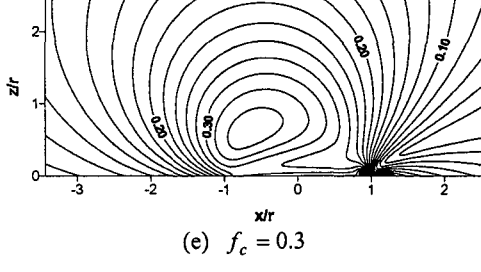
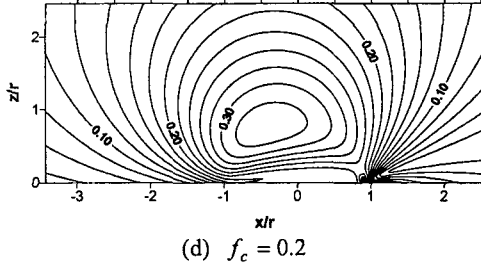
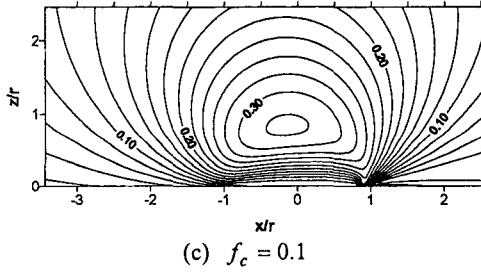
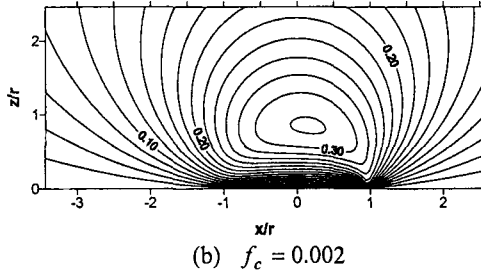


Fig.4 Contour of maximum shear stress on the central section



구한 윤활상태에서의 마찰계수 0.002에 상응하는 접선하중이 동시에 작용할 경우의 캠-플러 접촉부 중앙 단면에서 최대 전단응력 선도를 각각 Fig.4(a), Fig.4(b)에 나타내었다. 응력의 크기는 Hertz의 선접촉 모델의 최대 접촉압력 p_0 로써 무차원화하여 표시되어 있다. 길이의 무차원화를 위하여 도입된 변수 r 은 선접촉 모델에서 접촉폭의 1/2이다

윤활상태에서 캠-플러 표면에 작용하는 압력은 선접촉과는 다르게, Fig.2와 같이 접촉점 출구 쪽에 최대압력이 나타나는 비대칭 구조이므로 Fig.4(a)의 응력분포는 선접촉 경우의 응력분포와 크게 차이가 있음을 알 수 있다. 최대 전단응력의 최대치는 $0.322p_0$, 발생위치는 $x = 0.149r$, $z = 0.846r$ 이다. 윤활상태의 마찰계수는 0.002로 매우 작기 때문에 응력장은 수직하중만 작용할 경우와 차이가 거의 없다.

재료의 파괴는 윤활 실패, 표면의 불균일 등, 주로 비정상적인 조건에서 발생하므로 마찰계수의 증대를 가정하여 더 큰 접선하중이 작용하는 경우에 대하여 응력해석을 수행하였다. Fig.4(c)-Fig.4(f)는 탄성유체 윤활상태의 수직하중과 마찰계수 0.1, 0.2, 0.3, 0.4에 각각 상응하는 접선하중이 작용할 때의 응력해석 결과이다. Fig.4(c)-Fig.4(f)의 최대 전단 응력 선도는 마찰계수가 증가할수록 접선하중 작용방향으로 더욱 확장되고 있다. 또한, 마찰계수의 증가에 따라 표면내부의 응력 최대치는 증가하고 그 발생위치는 접선하중 작용방향과 표면으로 이동하고 있다. Table 1에 이들의 관계를 나타내었다.

Table.1 Maximum shear stresses and their positions

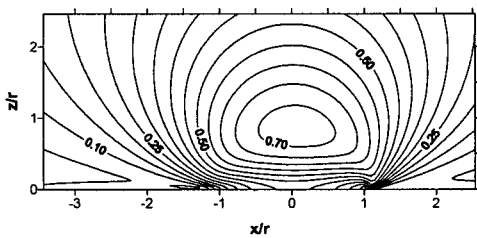
Friction coefficient, f_c	Max. shear stress, τ_1 / p_0	Positions	
		x/r	z/r
0	0.322	0.149	0.846
0.002	0.322	0.149	0.846
0.1	0.324	-0.149	0.846
0.2	0.333	-0.398	0.771
0.3	0.351	-0.647	0.597
0.4	0.380	-0.796	0.448

재료내부의 응력분포는 재료의 안전에 밀접한 영향을 미치므로 von Mises의 유효응력을 척도로하여 재료 내부의 응력상태를 비교하고자 한다. 재료 입의 위치에서 모든 응력성분이 알려져 있다면, 유효응력은 식(11)에 의하여 계산될 수 있다.

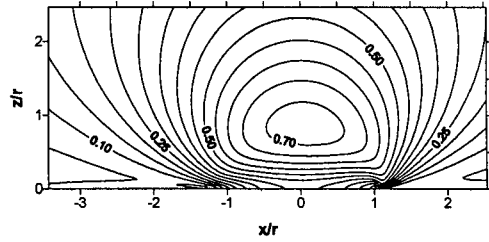
$$\sigma_e = \left[3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) + \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right]^{1/2} \quad (11)$$

접촉부 중앙 단면의 유효 응력분포를 Fig.5에 나타내었다. Fig.5(a)는 탄성유체 윤회상태의 수직하중, Fig.5(b)는 탄성유체 윤회상태의 수직하중과 접선하중, Fig.5(c)-Fig.5(f)는 탄성유체 윤회상태의 수직하중과 마찰계수 0.1, 0.2, 0.3, 0.4에 각각 상응하는 접선하중이 작용할 때의 응력해석 결과이다.

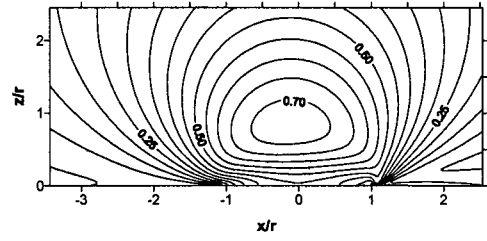
Fig.5(a)에서 최대 유효응력은 $0.728p_0$, 발생위치는 $x = 0.050r$, $z = 0.846r$ 이다. 여기에 탄성유체 윤회상태의 접선하중이 부가된 Fig.5(b)의 경우에 최대 유효응력의 크기와 그 발생위치는 Fig.5(a)와 거의 동일하게 나타나고 있다.



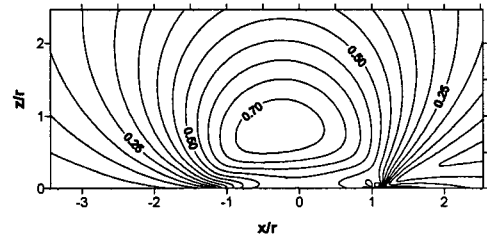
(a) $f_c = 0$



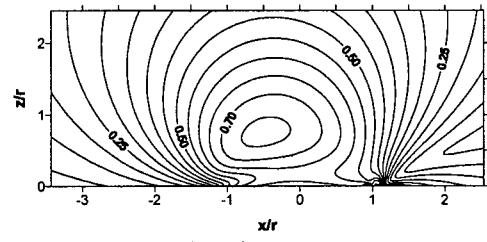
(b) $f_c = 0.002$



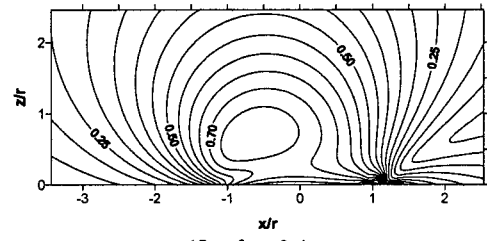
(c) $f_c = 0.1$



(d) $f_c = 0.2$



(e) $f_c = 0.3$



(f) $f_c = 0.4$

Fig.5 Contour of effective stress on the edge section

탄성유체 유힬상태에서 마찰계수는 매우 낮기 때문에 접선하중은 응력분포에 크게 영향을 미치지 아니한다. Fig.5(c)는 마찰계수가 0.1인 경우인데 최대 유힬응력은 $0.730p_0$, 발생위치는 $x = -0.149r$, $z = 0.846r$ 이다. 접선하중의 영향으로 인하여 최대 유힬응력의 발생위치가 접선하중 작용방향으로 이동된 것을 알 수 있다. 그러나 최대 유힬응력의 증가 비율은 약 0.3%로 매우 미미하다. 통상적으로 유힬상태의 마찰계수는 0.1미만 이므로 유힬상태의 접선하중은 재료의 수명에 영향을 미치지 않을 것으로 예상된다.

Fig.5(d)-Fig.5(f)는 마찰계수의 증가에 따라 응력분포의 단면형상은 접선하중 작용방향으로 더욱 확장된 양상을 나타내고 있다. 수직하중이 일정한 상태에서 마찰계수가 증가한다는 것은 접선하중의 증대를 의미하므로 마찰계수의 증가에 따라 유힬응력의 최대치도 증가한다. 특히, 접선하중이 증대하면 최대 유힬응력의 발생위치는 표면 가까이 이동한다. 이것은 접선하중과 수직하중의 합력의 작용방향은 접선하중이 커질수록 표면쪽으로 더 많이 기울어지기 때문이라고 판단된다. 그러므로 접선하중의 증대는 표면 수명의 견지에서 볼 때 불리하다.

Fig.6에 최대 유힬응력이 나타나는 깊이에서 표면과 평행인 면의 응력분포를 나타내었다. 접촉부 가장자리에 응력의 최대치가 발생하고 있다. 마찰 계수가 증가할수록 응력분포곡선은 전체적으로 접선하중 작용방향으로 더 많이 이동되는 것을 알 수 있다.

Fig.7에 최대 유힬응력이 나타나는 'x-y' 단면상의 3차원 응력분포를 나타내었다. 마찰계수가 증가하면 응력분포가 전체적으로 접선하중 작용방향으로 이동됨을 확연히 알 수 있다.

Fig.8에 마찰계수에 따른 유힬응력의 단면 곡선을 나타내었다. 마찰계수가 증가하면 접선하중의 증대에 따라 표면내부에 발생하는 응력의 크기도 증가하며 응력발생 영역이 접선하중 작용방향으로 확대되는 것을 볼 수 있다. 마찰계수가 0.1이하이면 접선하중의 영향이 크지 않으므로 유힬상태에서 접선하중은 재료의 안전에 영향을 미치지 않을 것으로 추정된다.

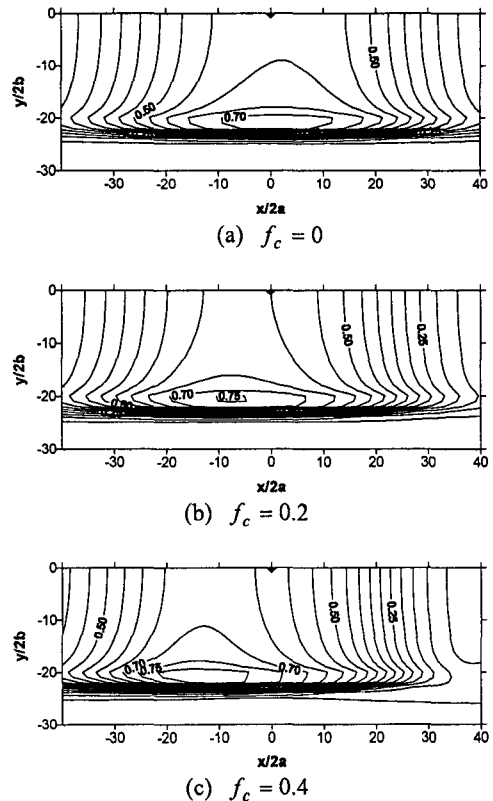


Fig.6 Contour of effective stress on the plane section

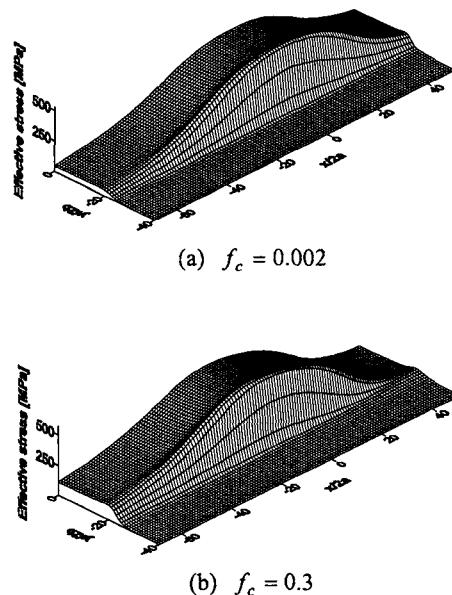


Fig.7 3-D view of effective stress on the plane section

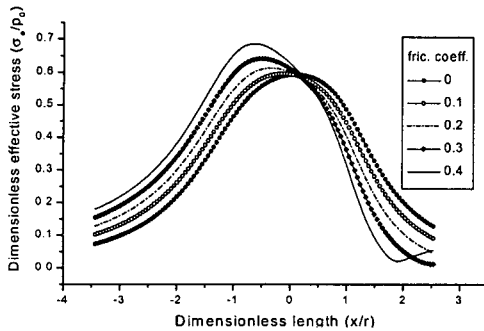


Fig.8 Profile of effective stresses at center of the planar section

5. 결론

본 연구에서는 수치적 방법에 의해 표면의 접선하중이 표면 내부의 응력에 미치는 영향을 알 수 있었다. 접선하중이 증대할수록 재료 내부의 응력 분포는 접선하중 작용방향으로 더 많이 확장되며 최대응력의 발생 위치는 표면 가까이 이동된다. 캠-롤러 접촉면은 윤활상태로 운전되어 마찰계수가 낮기 때문에 접선하중의 영향은 작으며 윤활상태의 접선하중은 재료의 안전에 영향을 미치지 않을 것으로 추정된다.

참고문헌

1. Rabinowicz, E., Friction and Wear of Materials, Chap. 1, pp.5-6, John Wiley & Sons, Inc., 1995.
2. Hertz, H., Miscellaneous Papers on the Contact of Elastic Solids, Translated by D.E.Johns, McMillan, London, 1896.
3. Boussinesq, J. Application de Potentials a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques. Paris:Gauthier-Villars. 45, pp.108, 1885.
4. Cerruti, V., Acc. Lincei. Mem.fis. mat., Roma. 13, pp.81, 1882.
5. Love, A. E. H., "Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary," Phil. Trans. Royal Society, A228, pp. 377-420, 1929.
6. Ahmadi, N., Keer, L. M., Mura, T. and Vithoontien, V., "The Interior Stress Field Caused by Tangential loading of a Rectangular Patch on an Elastic Half Space," ASME J. of Tribology, Vol.109, pp.627-629, 1987.

7. Kalker, J. J., "Numerical Calculation of the Elastic Field in a Half-Space," Communications in Applied Numerical Method, Vol.200, pp.401-410, 1986.
8. Yu, M. M.-H. and Bhushan, B., "Contact analysis of three-dimensional rough surfaces under frictionless and frictional contact," Wear, Vol. 200, pp. 265-280, 1996.
9. 조용주, 이문주, 구영필, "반 무한체 위의 사각조각 표면에 작용하는 접선하중에 의한 반 무한체내의 응력해석," 대한기계학회논문집 A권, 제24권 제4호, pp. 1032-1038, 2000.
10. Elsharkawy, A. A., "Effect of friction on subsurface stresses in sliding line contact of multilayered elastic solids," International J. of Solids and Structures, Vol.36, pp.3903-3915, 1999.
11. Peng, W. and Bhushan, B., "Three-dimensional contact analysis of layered elastic/plastic solids with rough surfaces," Wear, Vol.249, pp.741-760, 2001.
12. Cho, Y.-J., Koo, Y.-P. and Kim, T.-W., "A New FFT Technique for the Analysis of Contact Pressure and Subsurface Stress in a Semi-Infinite Solid," KSME International J., Vol.14, No.3, pp.331-337, 2000.
13. Mihailidis, A., Bakolas, V. and Drivakos, N., "Subsurface stress field of a dry line contact," Wear, Vol.249, pp.546-556. 2001.
14. Koo, Y.-P., Cho, Y.-J. and Lee, D.-W., "3-Dimensional Elastohydrodynamic Lubrication Analysis on the Cam-Roller Contact with Consideration of Roller Profiling," JSME International Journal, Series C, Vol.45, No.1, pp.316-322, 2002.
15. Johnson, K.L., Contact mechanics, Chap. 4, pp.90-104, Cambridge university press, 1985.