

Demerit-EWMA Control Charts

Gyo-Young Cho¹ and Young-Mok Jeon²

Abstract

In this paper, we present an effective method for process control using the Demerit-EWMA control chart in the process where nonconforming units or nonconformities are occurred by various types.

We compare performance of Demerit control chart, Demerit-CUSUM control chart and Demerit-EWMA control chart based on the average run length.

Keywords : Demerit control charts, Demerit-EWMA control charts, Average run length

1. 머리말

산업현장에서는 계수치 데이터를 이용한 관리도를 많이 사용하고 있다. 고객의 요구가 다양해지고 공정이 복잡해짐에 따라 모니터링 해야 할 품질특성치들도 다양하게 되었다. 특히 복잡한 생산품에서는 여러 가지 유형의 결점이나 불량이 발생할 수 있다. 또한 여러 유형의 결점들은 모두 중요도가 같은 것은 아니다. 그래서 중요도가 다른 결점들을 동시에 관리하기 위한 방법이 Demerit 관리도이다. 이에 대한 연구는 Dodge(1977)와 Montgomery(1997)에 의해 정리되어 있다.

Demerit 관리도는 중요도가 다른 결점들을 동시에 관리할 수 있으며 포아송 분포를 따르는 확률 변수들의 선형결합으로 이루어져 있다.

본 논문에서는 중요도가 다른 결점들을 동시에 관리할 수 있는 Demerit 통계량을 이용하여 공정 평균의 작은 변동에도 민감한 EWMA 관리도를 설계하고 그 효율을 기존의 관리도와 비교하였다.

2. Demerit, Demerit-CUSUM, Demerit-EWMA 관리도

2.1 Demerit 관리도

자동차, 컴퓨터 같은 복잡한 생산품에는 여러 가지 다른 유형의 부적합이나 결점들이 발생할 수

¹Professor, Department of Statistics, Kyungpook National University, Daegu, 702-701, Korea
E-mail : gycho@knu.ac.kr

²M.S., Department of Statistics, Kyungpook National University, Daegu, 702-701, Korea

있다. 이 결점들이 모두 중요도가 같은 것은 아니다. 그 중에 매우 심각한 결점을 가진 생산품은 부적합으로 분류되어 진다. 그러나 몇몇 사소한 결점을 가진 생산품은 필수적으로 부적합이 되는 것은 아니다. 이처럼 합리적인 방식으로 결점의 다양한 유형에 가중치를 줌으로써 부적합이나 결점들을 분류하기 위한 방법이 필요하다.

이에 1928년 Dodge는 여러 가지 형태의 결점을 제품에 미치는 영향의 정도에 따라 다음과 같이 4개의 Class로 분류할 것을 제안하였다.

Class A (매우 심각) : 제품의 작동을 거의 불가능하게 하거나 수리가 용이하지 않고 사용자에게 상해를 입힐 수 있는 결점들이다.

Class B (심각) : 제품의 작동 불능을 일으킬 가능성이 있거나 수명 단축, 유지 보수 비용의 증가 등의 원인을 일으키는 결점들이다.

Class C (다소 심각) : 작동불능과 같은 결점보다는 덜 심각한 결점들이나 마무리 작업, 외관 등에서의 주요한 결점들이다.

Class D (사소함) : 제품이 서비스에서는 실패하지 않지만 마무리 작업, 외관 등에서의 사소한 결점들이다.

c_A, c_B, c_C, c_D 를 각각 i 번째 샘플에서의 Class A, B, C, D 결점의 수이고 각 결점이 서로 독립이라고 하면 Dodge가 제안한 각 결점의 가중치를 $w_A = 100, w_B = 50, w_C = 10, w_D = 1$ 으로 부여하여 Demerit 통계량을 다음과 같이 정의한다.

$$d_i = w_A c_A + w_B c_B + w_C c_C + w_D c_D \quad (1)$$

i 번째 표본추출에서 n 개의 표본이 사용되었다고 가정하자. 단위당 Demerit 수는 다음과 같다.

$$u_i = \frac{D}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} \quad (2)$$

D 는 모든 n 개 검사단위에서의 총 결점수이다. u 는 독립인 포아송 분포의 선형결합이기 때문에 통계량 u 는 다음과 같은 관리 한계선을 이용한다.

$$UCL = \bar{u} + 3 \hat{\sigma}_u$$

$$CL = \bar{u}$$

$$LCL = \bar{u} - 3 \hat{\sigma}_u$$

여기서

$$\bar{u} = 100 \bar{u}_A + 50 \bar{u}_B + 10 \bar{u}_C + \bar{u}_D$$

$$\hat{\sigma}_u = \sqrt{\frac{(100)^2 \overline{u_A} + (50)^2 \overline{u_B} + (10)^2 \overline{u_C} + \overline{u_D}}{n}}$$

이다. $\overline{u_A}$, $\overline{u_B}$, $\overline{u_C}$, $\overline{u_D}$ 는 단위당 Class A, Class B, Class C, Class D 결점의 평균이다. $\overline{u_A}$, $\overline{u_B}$, $\overline{u_C}$, $\overline{u_D}$ 값은 공정이 관리내에서 운영된다고 할 때의 사전 자료 분석으로 얻어진다. 3σ 관리방법을 사용하는 Demerit 관리도는 평균의 작은 변동에 민감하지 못하다.

2.2 Demerit-CUSUM 관리도

Page(1954)가 제안한 CUSUM 관리도는 공정평균의 작은 변동에 민감한 관리도로서, 현재에도 많은 학자들에 의해서 연구되어지고 있다.

Demerit-CUSUM 관리도는 Dodge의 결점 분류 방법을 사용해 Demerit-CUSUM 통계량을 구한다. 이를 위해선 다음과 같은 가정을 둔다. 첫째, 각 클래스의 결점 발생은 독립적이며 각각 모수가 λ_i 인 포아송 분포를 따른다. 둘째, 공정평균의 변화로 인한 이상 발생시 여러 가지 결점이 복합적인 원인으로 인해 나타날 수 있다. 셋째 결점에 대한 가중치는 Dodge가 제안한 $w_A = 100$, $w_B = 50$, $w_C = 10$, $w_D = 1$ 을 사용한다. Demerit-CUSUM 관리도는 단위당 결점수인 u_i 를 사용하여 다음과 같은 통계량을 구한다.

$$C_i^+ = \text{Max}[0, x_i - (u_i + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \text{Max}[0, (u_i - K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

여기서

$$C_0^+ = C_0^- = 0$$

$$K = \overline{u} = 100 \overline{u_A} + 50 \overline{u_B} + 10 \overline{u_C} + \overline{u_D}$$

이다.

관리도의 판정은 CUSUM 관리도의 판정방법과 동일하게 C_0^+ 또는 C_0^- 값이 H 값보다 크게 되면 이상상태로 판정하게 된다. 이에 대한 연구는 Na, et al.(2003)에 의해 이루어져 있다.

2.3 Demerit-EWMA 관리도

Roberts(1959) 의해 제안된 EWMA 관리도는 Borror(1998), Crowder(1987a), Hunter(1986), Lucas(1990)등 많은 학자들에 의해 연구 되어졌다. 공정 평균의 작은 변동에 민감한 관리도이다.

Demerit-EWMA 관리도는 Dodge의 결점 분류 방법을 사용해 Demerit-EWMA 통계량을 구한다. 이 통계량을 구하기 위해선 다음과 같은 가정을 한다. 첫째, 각 클래스의 결점 발생은 독립적이며 각 모수가 λ_i 인 포아송 분포를 따른다. 둘째, 공정평균의 변화로 인한 이상 발생시 여러 가지 결

점이 복합적인 원인으로 인해 나타날 수 있다. 셋째 결점에 대한 가중치는 Dodge가 제안한 $w_A = 100$, $w_B = 50$, $w_C = 10$, $w_D = 1$ 을 사용한다.

Demerit-EWMA 관리도는 단위당 결점수인 u_i 를 사용하여 다음과 같은 통계량을 구한다.

$$Y_i = (1 - \lambda) Y_{i-1} + \lambda u_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

여기서

$$d_i = 100 c_A + 50 c_B + 10 c_C + c_D$$

$$u_i = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} \text{ 이다.}$$

관리도의 판정기준은 Y_i 가 h 값보다 크면 이상상태로 판정한다.

3. ARL 비교

평균 결점수 \bar{u} 의 변화와 EWMA 가중치 λ 의 변화를 통해 Shewart 관리도와 Demerit-CUSUM, 그리고 Demerit-EWMA 관리도의 ARL을 비교한다. 단위당 평균 결점수의 변화에 따른 ARL 비교는 각 공정에 따라 여러 가지 λ_i 조합에 대한 기준값으로 \bar{u} 값을 사용한다. λ_i 의 조합은 다음과 같은 제약식을 사용함으로써 주어진 \bar{u} 값에 대해 최소의 ARL_0 를 가지는 λ_i 를 찾을 수 있다.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3, \lambda_4$$

$\lambda_4, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_1$ 의 순으로 큰 값을 부여한다. 이는 가중치가 클수록 결점의 발생빈도가 적다는 것을 알 수 있다. 이때 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ 일 때를 만족하는 λ_i 값들은 Demerit-EWMA 관리도의 ARL_0 를 가장 작게 하는 조합이 된다.

따라서 ARL_0 가 가장 작은 경우의 관리도의 ARL_0 를 관리통계량의 분포가 이산형이기 때문에 비슷하게 맞추고 이를 바탕으로 ARL_1 을 비교한다. 만약 관리통계량이 주어진 관리 한계 h 값보다 크면 난수생성을 멈추고 런길이를 계산한다. 그리고 샘플 크기는 100으로 하고 10,000번 반복한 후 평균 런길이를 계산한다.

표 1. \bar{u} 값에 따른 λ_i 의 조합

\bar{u} \ λ_i	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
0.2	0.00124223	0.00124224	0.00124227	0.00124230
1.0	0.00621118	0.00621118	0.00621118	0.00621120
1.8	0.01118012	0.01118013	0.01118013	0.01118020

표 2. $\lambda = 0.05, \mu_0 = 0.2$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	49.5790		49.4755 (H=3.45)		49.3166 (h=0.092)	
1.25 μ_0	32.3754	49.4091	39.5594	48.2026	35.9399	44.6246
1.50 μ_0	22.9414	49.1951	29.1647	34.6309	24.5212	28.2156
1.75 μ_0	17.7592	48.7209	22.1058	25.0910	17.615	19.4076
2.00 μ_0	14.1973	46.8835	17.8085	19.4752	13.776	14.4951

표 3. $\lambda = 0.05, \mu_0 = 1.0$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	121.4780		121.5360 (H=12.7)		121.1780 (h=0.277)	
1.25 μ_0	46.8517	60.7687	48.1459	49.7780	35.5251	38.3772
1.50 μ_0	23.9535	47.7400	25.8849	26.2767	16.7339	17.1868
1.75 μ_0	13.9120	25.8365	17.7682	17.9466	11.0038	11.0269
2.00 μ_0	9.3141	20.2528	13.6502	13.5830	8.356	8.2388

표 4. $\lambda = 0.05, \mu_0 = 1.8$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	139.0820		139.465 (H=18.39)		138.7970 (h=0.384)	
1.25 μ_0	42.3962	67.5602	40.3816	40.8966	27.3862	28.4265
1.50 μ_0	18.3525	35.3931	21.2339	21.4093	12.7897	12.8037
1.75 μ_0	10.0462	19.6991	14.4229	14.3820	8.5129	8.3923
2.00 μ_0	6.2621	11.5732	10.9851	10.8997	6.5559	6.4222

표 5. $\lambda = 0.1, \mu_0 = 0.2$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	49.5790		49.4755 (H=3.45)		49.6118 (h=0.151)	
1.25 μ_0	32.3754	49.4091	39.5594	48.2026	32.1454	38.7072
1.50 μ_0	22.9414	49.1951	29.1647	34.6309	21.4646	25.4627
1.75 μ_0	17.7592	48.7209	22.1058	25.0910	15.5095	18.0616
2.00 μ_0	14.1973	46.8835	17.8085	19.4752	12.1799	13.8084

표 6. $\lambda = 0.1, \mu_0 = 1.0$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	121.4780		121.5360 (H=12.7)		121.8450 (h=0.449)	
1.25 μ_0	46.8517	60.7687	48.1459	49.7780	34.6586	39.5416
1.50 μ_0	23.9535	47.7400	25.8849	26.2767	15.8581	17.1547
1.75 μ_0	13.9120	25.8365	17.7682	17.9466	10.1479	10.402
2.00 μ_0	9.3141	20.2528	13.6502	13.5830	7.633	7.5664

표 7. $\lambda = 0.1, \mu_0 = 1.8$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	139.082		139.465 (H=18.39)		138.806 (h=0.62)	
1.25 μ_0	42.3962	67.5602	40.3816	40.8966	26.9911	29.6304
1.50 μ_0	18.3525	35.3931	21.2339	21.4093	11.9832	12.3117
1.75 μ_0	10.0462	19.6991	14.4229	14.3820	7.7113	7.7381
2.00 μ_0	6.2621	11.5732	10.9851	10.8997	5.8967	5.7819

표 8. $\lambda = 0.3, \mu_0 = 0.2$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	49.579		49.4755 (H=3.45)		49.7133 (h=0.378)	
1.25 μ_0	32.3754	49.4091	39.5594	48.2026	30.0548	36.606
1.50 μ_0	22.9414	49.1951	29.1647	34.6309	20.7213	27.4212
1.75 μ_0	17.7592	48.7209	22.1058	25.0910	15.3279	21.2151
2.00 μ_0	14.1973	46.8835	17.8085	19.4752	12.0767	16.4797

표 9. $\lambda = 0.3, \mu_0 = 1.0$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	121.478		121.5360 (H=12.7)		121.079 (h=0.965)	
1.25 μ_0	46.8517	60.7687	48.1459	49.7780	35.5534	45.1022
1.50 μ_0	23.9535	47.7400	25.8849	26.2767	16.5489	21.0043
1.75 μ_0	13.9120	25.8365	17.7682	17.9466	9.9686	11.9711
2.00 μ_0	9.3141	20.2528	13.6502	13.5830	7.1791	7.9127

표 10. $\lambda = 0.3$, $\mu_0 = 1.8$ 일 때 관리도의 ARL 비교

Shift	Shewart관리도		Demerit-CUSUM 관리도		Demerit-EWMA 관리도	
	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화	λ_1 변화	λ_4 변화
1.00 μ_0	139.0820		139.465 (H=18.39)		138.718 (h=1.3)	
1.25 μ_0	42.3962	67.5602	40.3816	40.8966	29.2185	36.2983
1.50 μ_0	18.3525	35.3931	21.2339	21.4093	12.0931	14.1756
1.75 μ_0	10.0462	19.6991	14.4229	14.3820	7.2495	7.8339
2.00 μ_0	6.2621	11.5732	10.9851	10.8997	5.2723	5.3926

표에서의 결과를 보면 Demerit-EWMA 관리도의 ARL_1 은 λ_i 의 변화에 대해 대부분 일정한 값을 나타내고 있음을 알 수 있다. 또한 \bar{u} 값이 1.0과 1.8에서는 작은 변동에 대하여 ARL_1 이 Shewart 관리도의 가장 작은 λ_1 의 ARL_1 보다 작음을 알 수 있다. 데이터의 부분적 변화에 너무 민감하게 반응하지 않는 것으로 보아 로버스트하다. 그리고 Shewart 관리도보다는 작은 변동에 대하여 더 민감한 반응을 보임을 알 수 있다. 또 Demerit-CUSUM 관리도보다도 더 우수하다. 가중치가 작고 \bar{u} 값이 클수록 ARL_1 은 λ_i 의 변화에 대해 가장 근접한 값을 나타내고 있다.

4. 맺음말

본 논문에서는 단위당 평균 결점수 \bar{u} 의 변화를 통해 Shewart 관리도, Demerit-CUSUM 관리도와 Demerit-EWMA 관리도의 ARL을 비교해본 결과 Demerit-EWMA 관리도가 공정평균의 작은 변동에 더 민감한 것을 알 수 있었고 복잡한 생산품을 생산하는 산업현장에서 계수치 데이터를 이용한 관리도를 사용할 때 여러 유형의 결점을 효율적으로 관리할 수 있는 방법을 찾아보았다.

Demerit-EWMA 관리도의 ARL_1 은 λ_i 의 변화에 대해 대부분 일정한 값을 나타내고 있음을 알 수 있다. \bar{u} 값이 클수록 ARL_1 은 λ_i 의 변화에 따라서 거의 차이가 없음을 보여주고 있다. 변화된 각 λ_i 값들에 대해 가중치를 고려하여 표준화된 변화량을 구해 이상신호에 가장 큰 영향을 미치는 결점을 찾아 그 원인부터 조사를 한다면 가장 빠르게 공정의 이상에 대처할 수 있을 것이다.

참고문헌

1. Borror C, Chanp C, Rigdon S. (1998), EWMA control charts for poisson data, *Journal of Quality Technology*, Vol. 30, 352-361.
2. Crowder, S. V. (1987a), A Simple Method for Studying Run Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Charts, *Technometrics*, Vol. 29, 401-407.

3. Dodge, H. F. and M. N. Torrey (1977), A Check Inspection and Demerit Rating Plan, *Journal of Quality Technology*, Vol. 9, 146-156.
4. Hunter, J. S. (1986), The Exponentially Weighted Moving Average. *Journal of Quality Technology*, Vol. 18, 203-210.
5. Jones, L. A., W. H. Woodall and M. D. Conerly (1999), Exact Properties of Demerit Control Charts, *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, 207-216.
6. Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990), Exponentially Weighted Moving Average control schemes: Properties and enhancements, *Technometrics*, Vol. 32, 1-12.
7. Montgomery, D. C. (1997), *Introduction to Statistical Quality Control*, 4th Edition. John Wiley & Sons, New York, NY.
8. Na, S.M., Kang, C.W., Sim, S.B. (2003), A Study of Demerit-CUSUM Control Chart and Interpretation Method, *Journal of the Korean Society for Quality Managements*, Vol. 31, No. 1, 132-141.
9. Page, E. S. (1954), Continuous Inspection Schemes, *Biometrika*, Vol. 49, 171-176.
10. Roberts, S. W. (1959), Control Chart Test, Based on Geometric Moving Averages, *Technometrics*, Vol. 1, 239-250.