제21회 한국정보처리학회 춘계학술발표대회 논문집 제11권 제1호 (2004. 5)

Wegmann해법의 오차평가에 대한 연구

송 은 지
남서울 대학교 컴퓨터학과
e-mail : sej@nsu.ac.kr

A study on the error estimate of Wegmann's method

Eun Jee Song
Dept. of Computer Science, NamSeoul University

요 약

수학적 모델을 컴퓨터 상에 실현시키는데 있어 보다 효율적인 알고리즘을 구현하고 개발하는 것이 수치해석 연구의 궁극적인 목표이다. 일반적으로 수치해석을 사용할 때 컴퓨터 상에서 구한 계산 결과, 즉 근사 값과 수학적으로 구한 값인 참값은 정확하게 같지 않다. 따라서 근사 값이 얼마나 참값에 가까운가에 따라 알고리즘의 효율성을 평가하는 오차평가는 수치해석의 가장 중요한 과제라 할 수 있다. 대부분의 경우 오차평가에 있어 오차의 한계를 이용하지만 주어진 문제의 참값을 모르기 때문에 정확한 오차평가를 할 수 없다. 본 논문에서는 수치등각사상을 구하기 위한 해법중 하나인 Wegmann해법에 있어 몇 가지 수학적 이론에 근거하여 참값을 모르더라도 오차평가를 할 수 있는 방법을 제안하고 수치실험을 통해 그 유효성을 입증한다.

1.서 론

수학적 모델을 컴퓨터 상에 실현시키는데 있어 보다 효율적인 알고리즘을 구현하고 개발하는 것이 수치해석 연구의 궁극적인 목표이다. 일반적으로 수학적으로 구한 값인 참값과 컴퓨터 상에서 구한 계산 결과, 즉 근사 값은 정확하게 같지 않다. 근사 값과 참값의 차이를 오차라 하는데 이러한 오차가 생기는 원인에는 절단오차, 마무리오차등 여러 가지가 있다. 근사 값이 얼마나 참값에 가까운가는 알고리즘의 효율성을 평가하는 중요한 척도이므로 오차평가는 수치해석의 가장 중요한 과제라 할 수 있다. 대부분의 경우 오차평가에 있어 오차의 한계를 이용하지만 주어진 문제의 참값을 모르기 때문에 정확한 오차평가를 할 수 없다. 여기서는 수치등각사상을 구하기 위한 해법중 하나인 Wegmann해법의 알고리즘을 다룬다. Wegmann이 제안한 해법은 Newton법으로 속도가 빠르고 Reimann-Hilbert문제로 해석하여 기억용량과 반복 횟수를 대폭 절약한 면에서 매우 효율적인 알고리즘이다[1]. 저자는 Wegmann이 제안한 해법으로 난이도가 높은 문제에 있어 수렴하지 않는 결점을 저주파필터에 의해 보완한 해법을 제안한 바 있다[2].

본 논문에서는 Wegmann해법에 있어 몇 가지 수학적 이론에 근거하여 참값을 모르더라도 오차평가를 할 수 있는 방법을 제안하고자 한다. 또한 수치실험을 통하여 제안한 방법의 유효성을 입증하였다.

2. Wegmann 알고리즘

Wegmann이 제안한 알고리즘은 단위원에서 Jordan 영역에로의 등각사상을 구하는 문제에 대한 해법으로 다음과 같다. 이하, 다음과 같은 기호를 정의하여 사용하기로 한다.

$C(T)$: 주기 2π의 복소수 연속함수
$C_R(T)$: 주기 2π의 실수 연속함수
$C^m(T)$: $m(m\geq 1)$ 회 미분 가능한 주기 2π의 복소수 연속함수

$C^m{}_R$: $m(m\geq 1)$ 회 미분가능한 주기 2π의 실수 연속함수

$A(\overline{D})$: D 에서 해석적(analytic)이고 $\overline{D}$ 에서 연속인 복소함수의 공간

$A(\overline{D})|_T$: $A(\overline{D})$의 요소 h의 경계함수 $f(t) = h(e^{it})$, $f(t) \in C^1(T)$의 집합

Φ 는 다음의 정규화 조건

$$\Phi(0)=0, \qquad \Phi'(0)>0 \quad \text{----------(1)}$$

를 만족하는 단위원에서 Jordan영역에로의 등각사상이라 하자. 그리고 Jordan 폐곡선을 Γ라 하고 $\Gamma := \{ \eta(s) : s\in[0,2\pi)\}$ 로 정의하면

$$\Phi(e^{it}) = \eta(s(t)) \;,\; s(t)-t \in C_R(T) \quad \text{------} \quad (2)$$

로 표현 가능하다. 등각사상 Φ 는 $A(\overline{D})$에 속하기 때문에 원주상에서 계산되면 내부에서도 계산할 수 있다. 따라서 (1)식의 정규화 조건과 (2)식으로부터

1. $\eta(s(t)) \in A(\overline{D})|_T$
2. $[Im\,\eta(s)]_0 = 0$

$[Im\,\eta(s)]_0$: $Im\eta(s)$ ($\eta(s)$의 허수부) 의 0차 Fourier계수

를 만족하는 $s(t)$ (이하 s)를 구하는 것으로 문제가 귀결된다. 다음은 s를 구하기 위한 Wegmann 해법을 설명한다.

$u(t) \in C_R(T)$인 함수가

$$u(t) = a_0 + \sum_{l=1}^{\infty}(a_l \cos lt + b_l \sin lt) \quad \text{--------(3)}$$

로 Fourier 변환 전개되었을 때

$$Ku(t) = \sum_{l=1}^{\infty}(a_l \sin lt - b_l \cos lt) \quad \text{------------} \; (4)$$

로 정의되는 K 를 공역작용소(共役作用素)라 한다.

[정리1]

$$\eta(s) \in A(\overline{D})|_T \Leftrightarrow Im\eta(s) - [Im\eta(s)]_0 = KRe\eta(s)$$

$Re\eta(s)$: $\eta(s)$의 실수부 $Im\eta(s)$: $\eta(s)$의 허수부

위의 정리에 (1)식의 정규화 조건 $[Im\,\eta(s)]_o = 0$ 을 넣으면 $\eta(s) \in A(\overline{D})|_T$ $Im\eta(s) = KRe\eta(s)$ 이 된다. 따라서 해인 s 는

$$\Psi(s) := Im\eta(s) - KRe\eta(s) = 0 \text{--------} \quad (5)$$

이 되는 방정식으로부터 구할 수 있다. 이 방정식을 Theodorsen 방정식이라 한다. (5)식은 s_o을 초기치로 하여 다음의 Newton 반복법

$$\Psi(s_k) + \Psi_{s_k}\delta_k = 0 \quad \text{---------------} \quad (6)$$

$$s_{k+1} = s_k + \delta_k \;, \quad k \geq 0$$

에 의해 구한다. (5)식으로부터

$$\Psi(s_k) = Im\eta(s_k) - KRe\eta(s_k)$$

$$\Psi_{s_k}\delta_k = Im\,\dot{\eta}(s_k)\delta_k - KRe\,\dot{\eta}(s_k)\delta_k$$

이 되며 여기서 Ψ_{s_k} 은 Ψ 의 s_k에서의 미분이다. 이것을 (6)식에 대입하여 정리하면

$$Im(\eta(s_k) + \dot{\eta}(s_k)\delta_k) = KRe(\eta(s_k) + \dot{\eta}(s_k)\delta_k) \text{-} \; (7)$$

이 된다.

함수 Φ_{k+1}를

$$\Phi_{k+1} := \eta(s_k(t)) + \dot{\eta}(s_k(t))\delta_k(t) \quad \text{---------} \; (8)$$

로 정의하면 (7)식과 정리1 로부터 $\Phi_{k+1}(e^{it}) \in A(\overline{D})|_T$ 가 된다.또한 $\dot{\eta}(t) \in C(T)$ 를 $\dot{\eta}(t) = |\dot{\eta}(t)| \exp(i\theta(t))$ 로 놓기로 하자.

여기서 (8)식의 δ_k 가 실수라는 것을 이용하면

$$Im(\Phi_{k+1}(e^{it})/\dot{\eta}(s_k(t))) = Im(\eta(s_k(t))/\dot{\eta}(s_k(t))) \quad \text{-------} \; (9)$$

성립한다. (9)식은 $\Phi_{k+1} \in A(\overline{D})|_T$ 에 관한 Reimann-Hilbert 문제로 해석되며 Φ_{k+1}가 다음과 같은 순서로 구할 수 있음이 알려져 있다[1][2].

$$v_k(t) := \theta(s_k(t) - t) \quad \text{------------(10-1)}$$

$$w_k(t) := Kv_k(t) \quad \text{-------------(10-2)}$$

$$q_k(t) := Im(\eta(s_k)\exp(w_k(t) - i\theta(s_k(t)))) \text{--(10-3)}$$

$$\hat{v}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_k(t)\,dt, \quad \hat{q}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q_k(t)\,dt$$

$$\lambda_k = \hat{q}_k \cot \hat{v}_k \quad \text{-----(10-4)}$$

$$\Phi_{k+1}(e^{it}) = (iq_k(t) - \lambda_k - Kq_k(t))\exp(i\theta(s_k(t)) - w_k(t)) \quad \text{------} \; (10\text{-}5)$$

(10-5)식을 (8)식에 대입하여 식을 정리하면 Newton반복법인 (6)의 미지수인 수정량 δ_k 를 다음과 같이 계산 할 수 있다.

$$\delta_k(t) = Re\left(\frac{\eta(s_k(t))}{\dot{\eta}(s_k(t))}\right) - \frac{\lambda_k + Kq_k(t)}{|\dot{\eta}(s_k(t))|\exp(w_k(t))} \quad \text{-------(10-6)}$$

3. 수치적 반복법

위에서 δ_k의 계산과정 (10-1) 부터 (10-6)를 컴퓨터상에서 실현시키기 위해서는 이산화를 하여 수치적으로 실행해야한다. 특히 공역작용소 K의 이산화

가 중요한 요소가 되며 그것은 다음과 같이 한다.
편의상 짝수 표본수 $N=2n$를 사용하여
$t_\nu=2\pi\nu/N$, $\nu=0,1,2\cdots,N-1$ 로 한다.
어떤 함수 $u(t)\in C_R(T)$ 의 삼각다항식을

$$\widetilde{u}(t):=\widetilde{a}_0/2+\sum_{\mu=1}^{n-1}(\widetilde{a}_\mu\cos\mu t+\widetilde{b}_\mu\sin\mu t)+\widetilde{a}_n\cos nt/2 \quad \text{------(11)}$$

로 하고 Ku 의 근사를 $K_N u:=K(u)$로 한다. 즉, K의 근사 작용소 K_N 을 (4)에 의하여

$$K_N u(t)=\sum_{\mu=1}^{n-1}(\widetilde{a}_\mu\sin\mu t-\widetilde{b}_\mu\cos\mu t) \quad \text{----------(12)}$$

로 한다. 따라서 (10-1)부터 (10-6)까지의 반복법을 이산영역에서 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\widetilde{v}_k(t):=\theta(\widetilde{s}_k(t)-t) \quad \text{---------- (13-1)}$$

$$\widetilde{w}_k(t)=K_N\widetilde{v}_k(t) \quad \text{---------- (13-2)}$$

$$\widetilde{q}_k(t):=Im(\eta(\widetilde{s}_k(t))\exp(\widetilde{w}_k(t)-i\theta(\widetilde{s}_k(t)))) \quad \text{-----(13-3)}$$

$$\widehat{v}_k(t)=\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\widetilde{v}_k(t_\nu),\quad \widehat{q}_k:=\frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1}\widetilde{q}_k(t_\nu)$$

$$\widehat{\lambda}_k:=\widehat{q}_k\cot\widehat{v}_k \quad \text{----------- (13-4)}$$

$$\widetilde{\delta}_k(t)=Re\left(\frac{\eta(\widetilde{s}_k(t))}{\dot{\eta}(\widetilde{s}_k(t))}\right)-\frac{\widehat{\lambda}_k+K\widetilde{q}_k(t)}{|\dot{\eta}(\widetilde{s}_k(t))|\exp(\widetilde{w}_k(t))} \quad \text{----- (13-5)}$$

$$\widetilde{s}_{k+1}:=\widetilde{s}_k+\widetilde{\delta}_k \quad \text{---------- (13-6)}$$

위의 알고리즘에 의해 초기치 $\widetilde{s}_0$와 요구정도 ε 가 주어지고 수정량이 $\widetilde{\delta}_k<\varepsilon$ 를 만족할 때까지 (13-1)부터 (13-6) 까지 반복적으로 계산하면 된다.

4. 오차평가

일반적으로 반복법에 의해 구한 근사값이 얼마나 유효한 것인가를 평가하기 위해서 참값과의 차이를 계산하는데 여기서는 참값을 모르더라도 오차평가를 가능하게 하는 몇 가지 수학적 이론을 설명하고 Wegmann이 제안한 위의 알고리즘에 적용하여 그 유효성을 입증하도록 한다. Sobolev 공간 W를
$W:=\{f\in C(T):\dot{f}\in L^2(0,2\pi)\}$로 정의하고 노름으로는 $\|f\|_W:=\max(\|f\|_0,\|\dot{f}\|_2)$를 사용하기로 하고

$$\|f\|_0:=\max|f(t)|,\quad \|f\|_2:=\left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2}$$

이다. A_r 를 어떤영역 $G_r:=\{z:|Imz|<r\}$, $(r>0)$ 에서 해석적(analytic)인 함수공간으로 하고 노름으로는 $\|f\|_r:=\sup|f(z)|$, $z\in G_r$
를 사용한다. 그러면 W 에 속하는 $f\in A_r$ 인 함수에 대해서

$$\|f\|_W\le C\|f\|_r \quad \text{------------(14)}$$

를 만족하는 정수(定數) C가 존재한다[3]. 그리고 Wegmann[3]에 의하면

$$\|K_Nf-Kf\|_W\le c\|f\|_r N\exp(-rN/2) \quad \text{----(15)}$$

를 만족하는 정수 c 가 존재한다.
근사값 s_k 가 참값 s 로 수렴한다고 하면 충분히 큰 표본수 N 에 대해서

$$\|s_k-\widetilde{s}_k\|\le C_kNe^{-rN/2} \quad \text{--------------- (16)}$$

이 되는 C_k 가 존재한다. 여기서 $\widetilde{s}_k$ 는 (13-6) 에서와 같이 s_k 를 이산영역에서 구한 것이다. (14)식과 Wegmann[3]의 Lemma5 로부터 충분히 큰 표본수 N 에 대해서 $\tilde{s}_{k+1}$를 반복법에 의한 근사 값이라 하고 s를 참값이라고 하면

$$\|\tilde{s}_{k+1}-s\|_W\le C_m\|\eta(\tilde{s}_{k+1}(e^{it}))-\widetilde{\Phi}_{k+1}(e^{it})\|_r \quad \text{-------(17)}$$

를 만족하는 C_m 이 존재한다. 그러므로 이것은 참값을 모르더라도 (17)식에 의해 오차평가가 가능함을 말해주는 것이다.

5. 수치실험

수치실험 예로서는 참값을 알고 있는 고전적인 예인 편심원을 다루었다. 이것은 (17)식 좌변의 실제의 오차와 본 연구에서 제안한 (17)식 우변의 추정오차를 비교하기 위해서이다. 실험결과에 사용한 기호는 다음과 같은 의미를 갖고 있다.
R : 형상 파라메터 N: 표본수 k: 반복횟수 s: 참값

$$ER:=\max_{\nu=0,1,\cdots,N-1}|s(t_\nu)-\tilde{s}_{k+1}(t_\nu)|\quad t_\nu=2\pi\nu/N$$

$$E:=\max_{\nu=0,1,\cdots,N-1}|\eta(\tilde{s}_{k+1}(t_\nu))-\widetilde{\Phi}_{k+1}(e^{it_\nu})|$$

즉, ER은 참값과 근사값과의 차인 실제오차이며 E 는 참값을 모르더라도 오차를 추정할 수 있는 추정 오차이다. 추정오차의 유효성을 알아보기 위하여 수치실험을 한 결과를 표1,2에 나타내었다.
수치실험 예인 편심원은 다음과 같은 경계함수를 나타낸다.
(수치실험 예) 편심원
경계: $\eta(s)=\rho(s)e^{is}$

$$\rho(s)=\frac{R\cos s+\sqrt{1-R^2\sin^2 s}}{R+1},\ 0\le R<1$$

해 : $s(t) = \arctan \dfrac{R\sin t}{1 - R\cos t} + t$

위의 수치예인 편심원은 형상 파라메터 R이 1을 향해 커질수록 변형이 심해져서 문제가 어려워지는 예이다. R=0.6일 경우 표1에 나타난 것처럼 실제오차와 추정오차가 거의 비슷하므로 참값을 모르더라도 추정오차 E에 의해 오차평가가 가능함을 알 수 있다. 난이도가 높은 R=0.9의 경우도 표2에서와 같이 실제오차와 추정오차의 차이가 거의 없음으로 참값을 모르더라도 오차평가가 가능함을 보여준다.

6. 결론

수학적모델을 컴퓨터상에 실현시킬 때 효율적인 알고리즘을 연구하고 개발하는 것이 수치해석학의 궁극적인 목표이다. 일반적으로 수학적이론의 결과와 컴퓨터상의 계산결과는 정확하게 같지 않으며 효율적인 알고리즘을 위해서는 이 둘의 차이인 오차를 줄이려는 연구가 필요하다. 대부분의 경우 참값을 모르면 정확한 오차를 평가할 수 없다. 본 연구에서는 수치등각사상을 구하는 해법 중에서 Wegmann이 제안한 반복법 있어 오차평가를 어떻게 할 것인가에 대하여 논하였다. 본 논문에서는 몇 가지 수학적 이론을 근거로 참값을 모르더라도 참값과 근사값의 차이를 추정할 수 있는 추정오차를 제안하였으며 수치실험을 통하여 그 유효성을 입증하였다. 수치해법에 있어 일반적인 오차평가는 참값과의 차로 평가하므로 앞으로 추정오차를 일반화시킬 수 있는 연구가 필요하겠다.

k	ER	E
1	0.809E+00	0.682E+00
2	0.426E+00	0.379E+00
3	0.141E+00	0.139E+00
4	0.111E-01	0.109E-01
5	0.101E-03	0.158E-03
6	0.285E-05	0.734E-05
7	0.210E-06	0.544E-06
8	0.896E-07	0.208E-06
9	0.836E-07	0.204E-06

표1. 실제오차 ER와 추정오차 E의 비교(N=64,R=0.6)

k	ER	E
1	0.210E+00	0.185E+00
2	0.251E-01	0.240E-01
3	0.365E-03	0.444E-03
4	0.110E-05	0.492E-05
5	0.427E-07	0.191E-06
6	0.944E-08	0.108E-07

표2. 실제오차 ER와 추정오차 E의 비교 (N=256,R=0.9)

참고논문

[1] Wegmann R. " Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping." J. Comput. Appl.Math.29,No.2, pp.207-224 ,1990.

[2] 송은지, "저주파 필터를 이용한 Wegmann방법의 개량에 관한 연구",한국정보처리학회 논문집 제8-A권 제4호, pp503-508, 2001.

[3] Wegmann R. " Convergence proofs and error estimates for an iterative method for conformal mappig", Numer. Math. 44, pp.435-461, 1984.

[3] 송은지, "등각사상에 있어 Theodorsen방정식의 고속해법", 한국정보처리학회 논문집 5권2호,pp.372-379, 1998.

[4] 송은지, "Hübner 방법에 기초한 수치등각사상의 자동화 알고리즘", 한국정보처리학회 논문집 제6권 제 10호 , pp.2716-2722, 1999 .

[5] 天野 要, "代用電荷法に基づく双方向的な數値等角寫像の方法" 日本情報處理學會論文集 Vol.31, No.5, pp.623-632, 1990 .

[6] Gutknecht, M.H. "Numerical conformal Mapping Methods Based on Function Conjugation." J. Comput. Appl. Math. 14,No.1,2, pp.31-77, 1986.