

Cavitation 현상에 관한 수치적 연구

장선용* · 이창진*

The Numerical Study on the Cavitation

Seonyong Chang* · Changjin Lee*

ABSTRACT

A numerical code for cavitation is developed based on pressure-based algorithm. The k-ε model (with wall function) is used for turbulence, and volume transport equation is used for cavitation model. The compressibility is not considered for the flow field is low speed.

초 록

Pressure-based 알고리즘을 기반으로 한 cavitation 현상의 수치해석 코드를 개발하였다. Wall function을 사용한 k-ε 난류모델을 사용하였으며, cavitation 모델에는 volume transport equation을 사용하였다. 유동장은 저속이기 때문에 압축성 효과는 고려하지 않았다.

Key Words: Cavitation(공동현상), Pressure-based algorithm, Numerical analysis(수치해석)

1. 서 론

Cavitation은 물속에서 운동하는 선박의 스크류나 잠수함의 표면, 그리고 높은 압력에서 작동하는 터보펌프와 인젝터 등에서 나타나는 현상이다. Cavitation 버블의 생성과 소멸은 소음, 진동, 구조물의 침식 등의 심각한 문제를 일으키는 원인이 된다. 이러한 이유로 cavitation 현상을 다양한 형상과 유동 조건에서 해석하기 위한 노력이 계속되었다.

CFD를 이용한 cavitation 현상의 해석 역시 많은 연구자들이 다양한 방법을 통해 시도하였다.

그러나 cavitation 버블의 존재는 대부분 난류 유동을 동반하고 다상 유동장이 해석 대상이 되는 등의 복잡한 물리적 현상의 원인이 되기 때문에 수치해석 코드의 개발에는 많은 어려움이 따른다. 더욱이 이상 유체의 경계면 영역은 불연속면이므로 정확한 cavitation 유동의 수치해석은 쉽지 않다.

Cavitation 현상의 해석은 많은 연구자들을 통해 시도되었다. 대표적인 예로 Shyy등[1,2,3]은 pressure-based 알고리즘을 사용하여 cavitation을 해석 하였고, Kunz등[4,5,6]은 density-based 알고리즘과 예조건화 방법을 통해 초월공동 영역까지 연구범위를 확대하였다.

* 건국대학교 항공우주공학과
연락처, E-mail: clee@konkuk.ac.kr

Shyy와 Kunz는 모두 volume fraction transport 방정식을 통하여 cavitation 현상을 모델링 하였고, Chen[7,8]등은 wake model을 사용하였다. 그리고 Owis[9]는 multi-fluid model을 사용하여 cavitation을 해석하였다. 위에서 언급한 연구자들은 cavitation을 해석할 수 있는 코드의 개발을 완료한 후 수중 운동체의 선두부, hydrofoil, 벤cb리관 내부 등에서의 cavitation 현상 해석 등으로 연구 범위를 확장하였다.

본 연구에서는 pressure-based 알고리즘과 volume fraction transport equation을 사용하여 cavitation 문제는 해석할 수 있는 수치해석 코드를 개발하였다. 해석 대상은 저속 유동장에서 운동하기 때문에 압축성은 고려하지 않았다.

2. 지배 방정식과 모델링

본 수치해석 코드의 지배방정식은 연속 방정식, Navier-Stokes 방정식, volume fraction transport 방정식으로 구성된다. 직교 좌표계에서 각 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_m dV + \int_S \rho_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} dS = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_m \mathbf{v} dV + \int_S \rho_m \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} dS = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{h} dV + \int_V \rho \mathbf{b} dV \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha_l dV + \int_S \alpha_l \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} dS = \int_V (\mathcal{M} \dot{\alpha}_l + \mathcal{M}^* \dot{\alpha}_l) dV \quad (3)$$

여기서,

$$T_{ij} = - \left(p + \frac{2}{3} (\mu + \mu_t) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta_{ij} + (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

이고, 혼합물의 밀도와, 난류 점성은 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_m = \rho_l \alpha_l + \rho_v (1 - \alpha_l)$$

$$\mu_t = \frac{\rho_m C_\mu k^2}{\varepsilon}$$

2.1 Cavitation 모델링

물리적으로 cavitation의 과정은 열역학과 시

스템 내에서 일어나는 상변화 역학에 의해 지배된다. 이 복잡한 현상은 식 (3)의 $\mathcal{M} \dot{\alpha}_l$ 와 $\mathcal{M}^* \dot{\alpha}_l$ 항으로 모델링 한다. 이들은 각각 다양한 밀도장으로 인해 일어나는 증발과 응축을 나타낸다. 대부분의 경우에서 Weber수와 Froude 수가 크기 때문에 표면장력과 부력효과는 무시한다. 상변화율에 대한 식은 Kunz등이 제안하였고, C_{dest} 와 C_{prod} 값은 각 코드별로 다른 경험에 의한 상수이다. Volume transport 방정식에서 생성 항은 다음과 같다.

$$\mathcal{M} \dot{\alpha}_l = \frac{C_{dest} \rho_v \alpha_l \text{MIN}[0, p - p_v]}{\rho_l \left(\frac{1}{2} \rho_l U_\infty^2 \right) t_\infty} \quad (4)$$

$$\mathcal{M}^* \dot{\alpha}_l = \frac{C_{prod} \rho_v \alpha_l^2 (1 - \alpha_l)}{\rho_l t_\infty}$$

식 (4)에서의 시간 단위는 characteristic length와 reference velocity의 비(l/U)로 정의된다. 본 연구에서는 경험적 상수인 C_{dest} 와 C_{prod} 의 값은 각각 9×10^5 와 3×10^4 를 사용하였고, 물과 증기의 밀도비는 1000의 값을 사용하였다.

2.2 난류 모델링

난류 해석을 위해서 일반적으로 널리 사용하고 있는 표준 k-ε 난류 모델을 사용하였다. 난류 모델에 사용되는 상수들은 표 1과 같다. 또한, 벽함수를 사용함으로써 완전 난류 영역과 점성 영역을 고려하여 해석하였다.

	C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ε	σ_h	σ_i
표준 k-ε	0.09	1.4	1.92	1.0	1.3	0.9	0.9

표 1. 난류 모델에서 사용되는 상수

3. 수치해석 방법

3.1 지배방정식의 차분화

본 연구에서 지배방정식의 수치해석은 유동현상에 쉽게 적용할 수 있는 FVM을 이용하였다. 속도 성분과 종속 변수들의 배열을 위한 격자계는 비엇갈림 격자계(collocated grid)를 이용하

며, 직교 좌표계의 속도 성분인 u, v 를 사용한다. 계산의 알고리즘은 SIMPLE을 이용하였고, 격자 면에서의 대류 항은 upwind scheme을 사용하여 차분화 하였다.

앞서 열거한 지배방정식을 일반화하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{U}\phi) - \text{div}(\Gamma_{\phi}\text{grad}\phi) = S_{\phi} \quad (5)$$

유한체적법을 식 (5)에 적용하면,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\phi dV + \int_V \rho\vec{U} \cdot \vec{n} dS = \int_V \Gamma_{\phi}\text{grad}\phi \cdot \vec{n} dS + \int_V S_{\phi} dV \quad (6)$$

ϕ 는 종속변수, Γ_{ϕ} 는 확산계수, S_{ϕ} 는 생성항, S 는 면적, V 는 제어체적을 나타낸다. 그림 1에서 보는 바와 같이 면 "e"에서의 질량 유속은 아래와 같이 비직교 좌표계에 대한 관계식으로 나타낼 수 있다.

$$\rho\vec{U} \cdot \vec{n} dS \approx (\rho\vec{U} \cdot \vec{n})_e S_e = \rho_e (S^x u + S^y v)_e \quad (7)$$

임의의 종속변수에 대한 대류 유속과 확산 유속은 각각 다음식과 같이 표현된다.

$$F_e^c = \int_V \rho\phi\vec{U} \cdot \vec{n} dS \approx \rho\phi_e F_e^c \quad (8)$$

$$F_e^d = \int_V \Gamma\text{grad}\phi \cdot \vec{n} dS \approx (\Gamma\text{grad}\phi \cdot \vec{n})_e S_e \quad (9)$$

많은 연구자들이 비직교 좌표계에서 위와 같은 유한체적법을 이용한 유동장을 계산하여 그 정확도와 효율성을 검증하였다. 본 연구에서는 SIMPLE[10] 방법을 채택하여 프로그램화 하였다. 최종 차분식은 다음과 같이 단순 식으로 표현된다.

$$A_p^{\phi} \phi_p = A_E^{\phi} \phi_E + A_W^{\phi} \phi_W + A_N^{\phi} \phi_N + A_S^{\phi} \phi_S + b_{\phi} \quad (10)$$

3.2 압력 보정 방정식

비엇갈림 격자계는 압력과 속도 해에 있어서 심각한 비물리적인 진동 현상을 초래할 수 있다. 이를 해결하기 위하여 모멘트 보간법을 적용한 압력방정식을 이용한다.

모멘텀 방정식은 다음과 같이 차분화 된다.

$$A_p^{\rho} \rho_p = \sum A_{nb}^{\rho} \rho_{nb} - V_p (\nabla_d P)_p + b_p \quad (11)$$

여기서 A_p^{ρ} 와 A_{nb}^{ρ} 는 셀 중심과 이웃 노드에서의 대류와 확장 항으로 인해 나타나는 계수이다. V_p 는 셀의 부피를 의미하고, b_p 는 생성항을 나타낸다.

Predictor-corrector 접근법을 기반으로 하는 계산 순서에서 차분화 된 모멘텀 방정식은 다음과 같이 계산된다.

$$A_p^{\rho} \rho_p = \sum A_{nb}^{\rho} \rho_{nb} - V_p (\nabla_d P^*)_p + b_p \quad (12)$$

모든 위치에서의 속도장은 이웃한 셀의 속도와 압력을 기반으로 보정된다. 식 (11)과 식(12)을 기반으로, 속도 보정은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\vec{u} = \vec{u}^* - \vec{u}' = -D_p (\nabla_d P')_p \quad (13)$$

여기서 $D_p = \begin{bmatrix} V_p/A_p^u & 0 \\ 0 & V_p/A_p^v \end{bmatrix}$ 이다. 압력장을 보정하기 위해, 연속 방정식인 식 (1)을 보정된 속도로 치환하여 압력 보정식으로 바꾼다.

$$\nabla_d \cdot (\rho D \nabla_d P') = \nabla_d \cdot (\rho \vec{u}') \quad (14)$$

Cavitation 모델에서 식 (3)은 밀도장을 결정하기 위하여 쓴다. 이 식에서 압력에 의존하는 생성 항이 나타나기 때문에 압력과 밀도가 서로 couple되고, 이로 인해 압력 보정 방정식을 다시 고려해야 한다. 속도, 압력, 밀도의 변동 항을 식 (15)라 할 때 연속방정식에서 플러스 항은 식 (16)이 된다.

$$\begin{aligned} u^m &= u^{m*} + u' \\ p^m &= p^{m*} + p' \\ \rho^m &= \rho^{m*} + \rho \end{aligned} \quad (15)$$

$$\rho \vec{u}' = (\rho^* + \rho')(\vec{u}^* + \vec{u}') = \rho^* \vec{u}^* + \rho^* \vec{u}' + \rho' \vec{u}^* + \rho' \vec{u}' \quad (16)$$

이때 m 과 m^* 은 반복계산의 순서를 나타낸다. 밀도의 보정은 다음의 식을 이용하여 수행한다.

$$p' = C(1 - \alpha) P' \quad (17)$$

여기에서 C 는 임의의 상수이다. 이 값의 결정은 압력 보정 방정식의 성질 때문에 최종 해의 수렴에 영향을 주지 않는다. C 값의 변화는 단지 수렴되는 해에 이르는 경로가 달라짐을 의미한다.

다. 그러나 C 의 값이 너무 크면 반복계산의 초기 과정에서 계산을 불안정하게 만든다. C 값 또한 경험적 상수이고 본 코드에서는 $C = O(1)$ 의 값을 가진다.

4. 경계조건

입구에서는 속도 성분, 부피비, 난류 성분 등이 주어진다. 그리고 출구에서는 압력, 속도, 부피비에 zero gradient 조건이 주어진다. 벽면에서는 압력, 부피비, 난류 성분의 값을 보간법을 사용하여 구하고, 속도는 no-slip 조건을 사용하였다.

5. 계산 격자 및 영역

해석 대상의 형상은 H. Rouse, J. S. McNown의 실험에서 사용된 hemisphere 형상과 cone 형상의 물체로 정하였다[11]. 본 연구의 해석 결과를 hemisphere에 대해서는 동일한 알고리즘으로 해석한 Shyy의 결과[1]와 비교하였고, cone 형상의 결과는 Kunz[5]의 결과와 비교하였다. 두 가지 형상 모두 해석 대상의 선두부, 그리고 압력이 회복되는 선두부로부터 S/D 가 5가 되는 지점까지 그리드를 주로 집중하였다.

6. 해석 결과

6.1 코드의 검증

개발된 코드의 검증을 $\sigma=1.0$, $Re=1.36 \times 10^5$ 인 상태의 유동장에서 hemisphere 형상의 물체와 cone형상의 물체에 대해 각각 해석하고 기존의 결과와 비교하여 수행하였다. 그림 4의 검증결과에서 볼 수 있듯이, 개발코드의 hemisphere 형상에 대한 해석 결과는 오히려 Shyy의 결과보다 실험값에 더욱 근접한 양상을 나타내고 있다. 그리고 그림 5에서 볼 수 있듯이 cone 형상에 대해서도 계산 결과를 Kunz의 결과와 비교할 수 있는 가능성을 확인하였다.

6.2 Cavitation 해석 결과

그림 6은 cone 형상, $\sigma=0.5$ 의 해석 결과이다. Cavitation 영역의 전후로 압력의 불연속점이 나타나지만 전체적인 C_p 의 형상은 일치하는 것을 볼 수 있다. 압력의 불연속점은 upwind scheme의 한계로 인한 것으로 보인다. 이 문제점은 불연속면을 포착할 수 있는 능력이 뛰어난 TVD 계열의 scheme을 사용하여 해결할 수 있을 것으로 생각된다.

그림 7에서는 hemisphere 형상 물체에 대해 $\sigma=0.4$ 의 조건에서 해석한 결과이다. Cavity의 크기에 약간 오차가 있지만 전체적인 경향은 실험값이나 다른 연구 결과와 일치하는 것을 볼 수 있다. Cavity 크기의 오차는 역시 격자나 scheme 상의 문제로 인해 발생된 것으로 생각된다.

이러한 해석 결과로 얻어낸 C_p 곡선을 통해서 cavitation 영역의 크기를 예측하는 것이 가능하다. 이는 hydrofoil이나 잠수함 등의 선두부에서의 압력분포 등을 해석하여 그 성능을 예측하는 것이 가능하다는 것을 의미하고, 더 나아가 이상유체의 해석에 적용 가능하다는 의미를 가지고 있다.

7. 결 론

Pressure-based 방법과 volume fraction equation을 사용하여 비압축성, 난류 유동장에서 cavitation 현상을 모사할 수 있는 해석 코드를 개발하였다. SIMPLE 알고리즘을 사용하였으며, cavitation 문제에 적용할 수 있도록 압력 보정 방정식을 수정하였다. 코드의 개발 후 $\sigma=1.0$, $Re=1.36 \times 10^5$ 의 유동장에 대해 코드의 검증을 실시한 결과, 코드의 성능은 만족할만한 결과를 나타냈다. 이후 $\sigma=0.4$ 와 $\sigma=0.5$ 인 유동장을 해석하여 기존의 결과와 비교함으로써 cavitation 현상을 해석할 수 있는 pressure-based 알고리즘을 사용한 코드의 개발을 완료하였다.

향후에는 다양한 유동 조건에서의 해석을 통해 pressure-based 알고리즘과 density-based

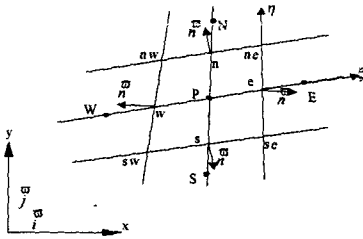


그림 1. 일반적인 제어 체적과 notation

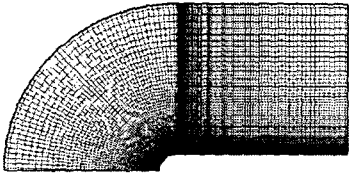


그림 2. Hemisphere 형상 물체의 계산 격자(130x70)

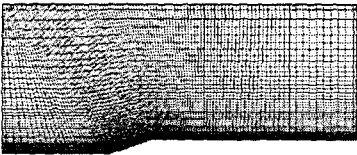


그림 3. Cone 형상 물체의 계산 격자(120x50)

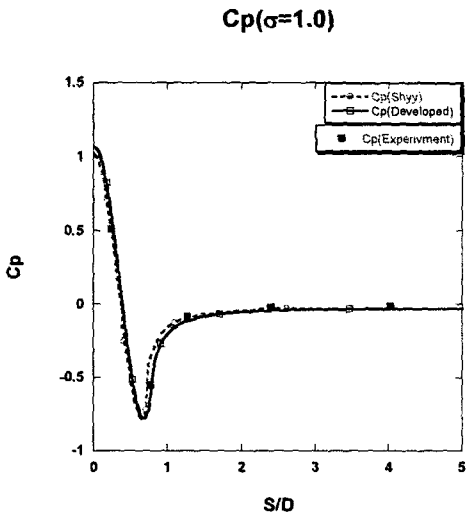


그림 4. 개발 코드의 검증(Hemisphere)

알고리즘의 해석 결과를 비교하여 두 가지 알고리즘을 차이를 비교, 분석하는 연구를 수행할 예정이다.

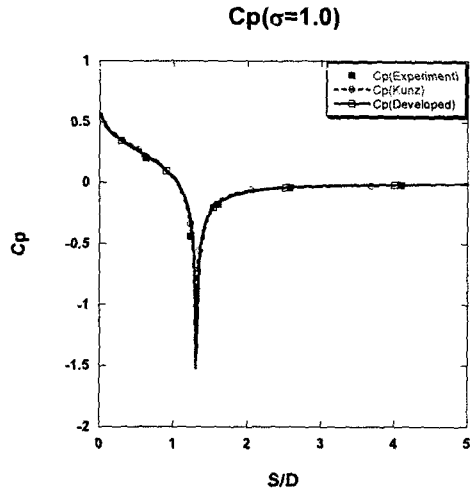


그림 5. 개발 코드의 검증(Cone)

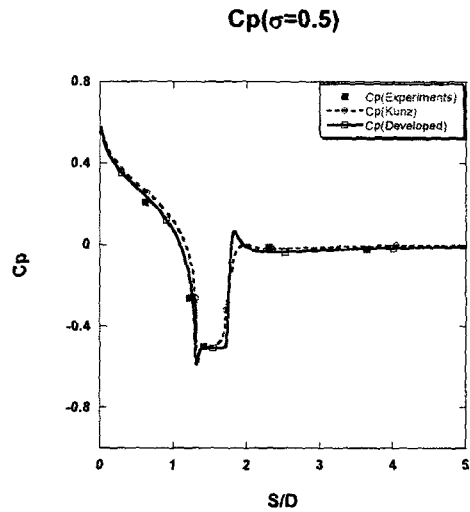


그림 6. Cavitation 해석 결과(Cone, $\sigma=0.5$)

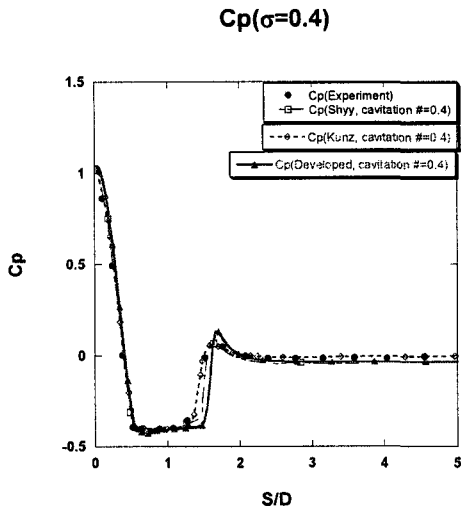


그림 7. Cavitation 해석 결과(Hemisphere, $\sigma=0.4$)

참 고 문 헌

1. Y. Suzuki, T. Satoh, M. Kawano, N. Akikawa and Y. Matsuda, "Combustion Test Results of an Uncooled Combustor With Ceramic Matrix Composite Liner," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 125, Jan. 2003, pp. 28-33
1. Inanc Senocak and Wei Shyy, "A Pressure-Based Method for Turbulent Cavitating Flow Computations", *Journal of Computational Physics* 176, pp. 363-383, 2002.
2. Guoyu Wang, Inanc Senocak, Wei Shyy, Toshiaki Ikehagi and Shuliang Cao, "Dynamics of attached turbulent cavitating flows", *Progress in Aerospace Sciences* 37, pp. 551-581, 2001.
3. Rajkumar Vaidyanathan, Inanc Senocak, Jiongyang Wu and Wei Shyy, "Sensitivity Evaluation of a Transport-based Turbulent Cavitation Model", AIAA-2002-3184, 2002.
4. Robert F. Kunz, David A. Boger, David R. Stinebring, Thomas S. Chyczewski and

Howard J. Gibeling, "A Preconditioned Navier-Stokes Method for Two-Phase Flows with Application to Cavitation Prediction", AIAA-99-3329, 1999.

5. Robert F. Kunz, David A. Boger, David R. Stinebring and Howard J. Gibeling, "Multi-phase CFD Analysis of Natural and Ventilated Cavitation about Submerged Bodies", FEDSM99-7364, 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, July, 1999.

6. Robert F. Kunz, Jules W. Lindau, Howard J. Gibeling, Jason M. Mulherin, Dennis J. Bieryla and Erica A. Reese, "Unsteady, Three-Dimensional Multiphase CFD Analysis of Maneuvering High Speed Supercavitating Vehicles", AIAA 2003-841, 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, January, 2003.

7. Yongliang Chen and Stephen D. Heister, "A Numerical Treatment for Attached Cavitation" *Journal of Fluids Engineering*, vol 116, pp. 613-618, 1994.

8. Yongliang Chen and Stephen D. Heister, "Two-phase Modeling of Cavitated Flows", *Computers & Fluids*, vol 24, No. 7, pp. 799-809, 1995.

9. Farouk M. Owis and Ali H. Nayfeh, "A compressible Multi-phase Flow Solver for the Computation of the Super-Cavitation over High-speed Torpedo", AIAA-2002-0875, 40th AIAA Aerospace Sciences Meetings & Exhibit, January, 2002.

10. J. H. Ferziger and M. Peric, "*Computational Methods for Fluid Dynamics*", 2nd ed. Springer Verlag, Berlin, 1999.

11. H. Rouse and J. S. McNown, "Cavitation and Pressure Distribution, Head Forms at Zero Angle of Yaw", *Studies in Engineering, Bulletin 32*, State University of Iowa, 1948.