

비정렬 격자계에서 LU-SGS 기법에 대한 강건하고 효율적인 내재적 연산자 구성

김 주 성^{*1}, 권 오 준^{*2}

Construction of an Efficient and Robust Implicit Operator for the LU-SGS Method on Unstructured Meshes

J. S. Kim and O. J. Kwon

In the present study, an efficient and robust implicit operator for the LU-SGS method is proposed. Numerical experiments for supersonic flow are performed to demonstrate the performance of the proposed method.

Key Words: LU-SGS 기법, 비정렬 격자(Unstructured Mesh), 내재항 인공 소산(Implicit Artificial Dissipation)

1. 서 론

본 연구에서는 비정렬 격자계에서 강건하고 효율적인 LU-SGS (lower-upper symmetric Gauss-Seidel) 기법의 내재적 연산자의 개발에 관해 논하고자 한다.

비정렬 격자는 정렬 격자에 비해 복잡한 형상에 대한 격자 생성이 상대적으로 용이한 장점을 갖고 있다. 또한 격자 구조의 불규칙적인 특성으로 인하여 국부적인 해의 해상도를 높일 수 있는 격자 적용이 매우 용이하다. 이러한 특성으로 인하여 비정렬 격자 유동 해석 기법은 정렬 격자 기법에 비해 상대적으로 복잡한 물체 및 유동 형상에 대한 해석이 매우 중요하며, 따라서 강직성이 심한 상태에서의 해석 기법의 거동은 특히 비정렬 격자 유동 해석 기법에서 더욱 중요하게 된다.

내재적 방법은 매우 큰 시간 간격을 사용하여 외재적 기법에 비해 높은 수렴성을 얻는다. 이러한 내

재적 방법 중에 하나인 LU-SGS 기법은 정렬 격자계에서 널리 사용되는 ADI (alternating direction implicit) 기법에 비해 훨씬 큰 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 수에서도 안정한 것으로 알려져 있다. 하지만 이러한 LU-SGS 기법의 특성은 해석하고자 하는 문제의 특성에 따라 심각하게 변화된다. 특히 해석하고자 하는 물체 형상의 심한 구배, 충격파와 같은 유동해의 급격한 변화, 조밀한 격자의 사용 등으로 인하여 차별화된 식의 강직성이 증가함에 따라 CFL 수의 제약은 더욱 심각하게 되며, 결과적으로 LU-SGS 기법의 안정성 및 수렴성은 급격하게 저하된다. 또한 참고 문헌 [1]을 참조하면, LU-SGS 기법의 특성은 사용된 내재적 연산자에 따라 심각하게 변화된다. Jameson과 Turkel[2]에 의해 제안된 내재적 연산자는 강건하지만 수렴성이 낮다. 이에 반해 잔류항에 사용된 기법에 기초한 내재적 연산자는 강직성이 낮은 문제에 대해서는 매우 좋은 성능을 보이거나, 강직성이 높아짐에 따라 매우 저하된 성능을 보인다.

본 연구에서는 이러한 기존의 내재적 연산자들의 단점을 극복하여, 넓은 유동조건에서 효율적이며 강건한 LU-SGS 기법의 내재적 연산자를 제안하고자 한다. 내재적 연산자의 특성을 해석하기 위해 폰 노

*1 학생회원, 한국과학기술원 항공우주공학과 대학원

E-mail : soo@kaist.ac.kr

*2 정회원, 한국과학기술원 항공우주공학과

E-mail : oikwon@kaist.ac.kr

이만 안정성 해석(von Neumann stability analysis) 방법이 사용된다. 개발된 기법은 초음속 실린더 유동에 대해서 검증된다.

2. 내재적 시간 적분법

지배방정식으로는 이상기체에 대한 압축성 오일러 방정식이 사용되었으며, 격자점 중심 유한 체적법을 기본으로 하여 차분화 되었다. 제어체적은 median dual을 사용하여 구성된다. 시간에 대해 오일러 후방 차분방법과 시간 선형화를 수행하면 다음과 같이 쓰여 질 수 있다.

$$L(Q)\Delta Q = -R(Q) \tag{1}$$

위 식에서 $\Delta Q = Q^{n+1} - Q^n$ 이며, L 는 내재적 연산자, R 은 외재적 연산자를 각각 나타낸다. 내재적 연산자는 공간에 대해 저차정확도로 계산되며, 외재적 연산자는 고차정확도로 계산된다. 외재적 연산자의 고차정확도 기법을 위해서 Taylor 전개를 사용하여 격자점에서 제어체적 경계면으로 외삽되며, 이에 필요한 해의 구배(solution gradient)는 least-square 방법이 사용되었다. 제어체적 경계면의 값을 이용한 플럭스의 계산은 Roe의 flux-difference splitting(FDS) 방법이 사용되었다. 또한 고차정확도 기법에서 불연속면 근처에서의 진동을 제어하기 위해 Venkatakrisnan의 제한자가 사용되었다. 전체 계산 영역은 advancing front 방법을 사용하여 삼각형 형태의 격자로 분할된다.

3. 내재적 연산자

선형 해석 방법인 폰 노이만 해석 방법을 사용하여 내재적 연산자의 안정성 및 수렴성에 대한 해석을 수행한다. 따라서 오일러 방정식의 내재적 연산자는 주어진 유동조건에 대해서 상수로 가정된다.

3.1 외재적 연산자와 일치하는 내재적 연산자 (consistent implicit operator)

외재적 연산자의 계산을 위해 사용되는 Roe의 플럭스 식에 대해서 Roe-average 행렬인 $|\bar{A}|$ 가 일정하다는 가정을 사용하여 근사 플럭스 자코비안을 구

하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f(Q_L)}{\partial Q_L} + |\bar{A}| \right] \\ A^- &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f(Q_R)}{\partial Q_R} - |\bar{A}| \right] \end{aligned} \tag{2}$$

이러한 외재항과 일치하는 내재적 연산자는 강직성이 낮은 문제에 대해서는 매우 좋은 성능을 보이나, 높은 강직도 문제에 대해서는 매우 불안정한 경향을 보인다[1].

3.2 Jameson-Turkel 내재적 연산자

오일러 방정식의 대류항에 대해서 이차 차분 인공 소산항을 사용하는 중심 차분기법을 사용하여 차분화하면 다음과 같이 표현된다.

$$F(Q_L, Q_R) = \frac{1}{2} [f(Q_L) + f(Q_R) - \alpha \lambda | (Q_R - Q_L)] \tag{3}$$

여기서 α 는 소산의 크기를 조절하기 위한 사용자 조절 상수이다. 또한 λ 는 스칼라 값으로, 플럭스 자코비안 행렬의 고유값의 최대값이 일반적으로 사용된다. 중심 차분기법은 이러한 스칼라 형태를 갖는 소산 계수의 사용으로 인해 행렬 형태의 소산 계수를 갖는 van Leer나 Roe의 풍상 차분기법 보다 수치적인 소산이 크게 된다. Jameson-Turkel 내재적 연산자는 위의 식 (3)을 기초로 하여 선형화하면 얻을 수 있다. 여기서 상수 α 는 1로 하였다. 이러한 Jameson-Turkel 내재적 연산자는 매우 강건하지만 낮은 수렴성을 보인다[1].

3.3 인공 소산항을 포함하는 내재적 연산자

내재항에 스칼라 형태의 내재항 인공 소산항 (implicit artificial dissipation)이 첨가된 경우에 대한 내재적 연산자는 다음과 같이 표현된다.

$$A_{ad}^+ = A^+ + \beta |s|, \quad A_{ad}^- = A^- - \beta |s| \tag{4}$$

여기서 β 는 내재항 인공 소산의 크기를 조절하기 위해 사용되는 조절 상수이다. 그림 1은 여러 가지 β 의 값에 대해서 CFL 수의 증가에 따른 전체 공간

주파수 영역에서의 amplification factor의 최대값을 보이고 있다. 가장 낮은 공간주파수에서의 amplification factor의 값이 항상 1이기 때문에, 안정한 상태에서의 amplification factor의 최대값은 1로 표현된다. $\beta=0$ 인, 즉 외재적 연산자와 일치하는 내재적 연산자는 CFL=10에서부터 불안정성이 존재하는 것을 볼 수 있으며, 이러한 값은 ADI 기법의 경우와 유사하다. 내재항 인공 소산 계수가 커짐에 따라 불안정성이 완화되어, 높은 CFL 수에서도 안정한 것을 볼 수 있다. 하지만 이 값이 계속해서 커지면, 모든 공간주파수에 대한 amplification factor는 1로 수렴하여 가는 특성을 보이며, 따라서 매우 낮은 수렴성을 보이게 된다. 따라서 안정성을 유지하면서 높은 수렴성을 제공할 수 있는 최적의 상수값이 존재하게 된다. 하지만 이러한 값은 안정성 해석을 통해서도 쉽게 알 수 있듯이, 유동 조건에 따라서 급격하게 변화된다.

본 연구에서는 인공 소산항을 포함하는 내재적 연산자가 매우 강건한 것으로 알려진 Jameson-Turkel 내재적 연산자와 같은 정도의 안정성을 유지할 수 있도록 β 의 값을 정하고자 한다. LU-SGS 방법을 사용하여 차분화된 오일러 방정식은 다섯 개의 독립 변수인 마하수, 유동각, 격자종횡비, CFL 수, 내부반복계산의 수에 의해 지배된다. 여기서 오일러 방정식에 대한 해석이므로 격자 종횡비는 1로 가정하여도 일반성을 잃지 않는다. 또한 매우 높은 CFL 수에서 인공 소산항을 포함하는 내재적 연산자가 Jameson-Turkel 내재적 연산자와 같은 안정성을 유지할 수 있도록 $CFL=10^7$ 으로 한다. 또한 내부 반복 계산의 수는 1로 한다. 결과적으로 변화되는 독립 변수는 마하수와 유동각이 된다. 그림 2는 여러 가지 마하수와 유동각에 대해서 Jameson-Turkel 내재적 연산자와 같은 정도의 안정성을 유지하기 위한 내재항 인공 소산 계수 β 를 보이고 있다. β 는 유동각에 따라 특정한 마하수에서 극대값을 갖는 것을 볼 수 있다. $\theta=1$ (radian)인 경우에 대해서는 마하수가 1.414에서 극대값을 갖으며, 이는 오일러 방정식에 존재하는 고유값이 0이 되는 조건임을 알 수 있다. 이러한 고유값이 사라지는 현상을 막기 위해 내재항에 Yee[3]의 entropy-fix 방법을 적용한다. 그림 3은 entropy-fix의 계수 $\delta=0.25$ 를 사용한 경우에 대한 내재항 인공 소산 계수를 보이고 있다. 그림 2에 비

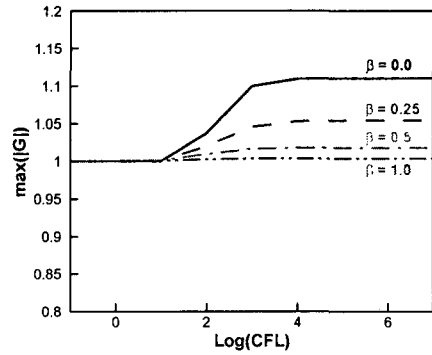
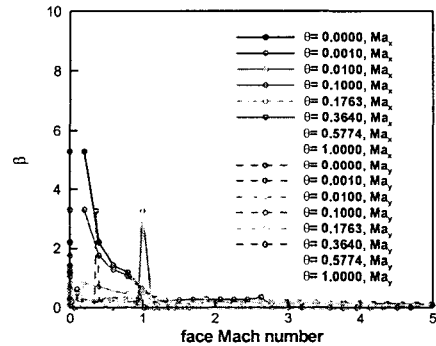
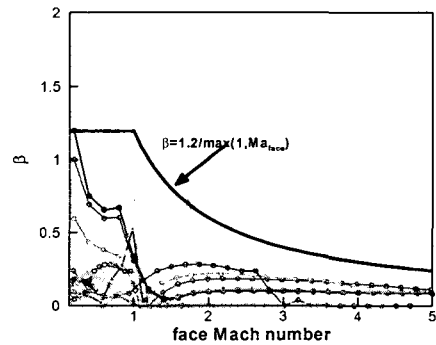


Fig.1 내재항 인공 소산 계수에 따른 amplification factor의 최대값.



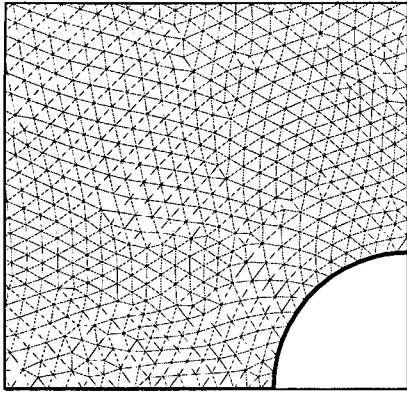
(a) entropy-fix가 없는 경우



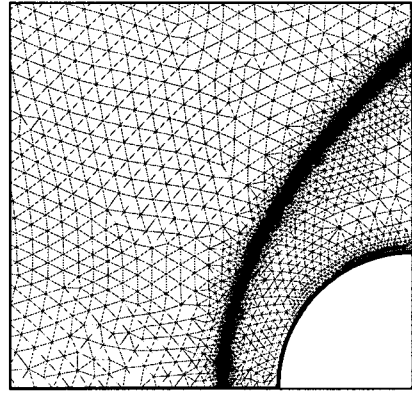
(b) entropy-fix가 있는 경우

Fig. 2 Jameson-Turkel 내재적 연산자와 같은 안정성을 유지하기 위한 내재항 인공 소산 계수

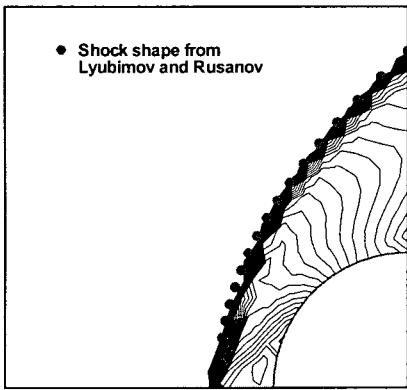
해 훨씬 작은 값에서도 Jameson-Turkel 내재적 연산자의 안정성을 유지할 수 있는 것을 볼 수 있다.



(a) 격자(2,201 nodes)

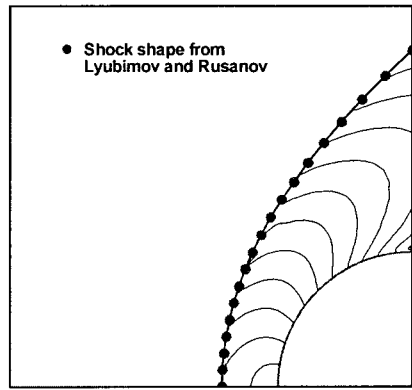


(a) 격자(14,019 nodes)



(b) 마하수 등선도

Fig.3 초기 격자



(b) 마하수 등선도

Fig.4 다섯 번째 적용된 격자

또한 마하수의 변화에 대해서 다음과 같이 정의되는 β 의 값을 사용하면 항상 Jameson-Turkel의 안정성을 유지할 수 있다.

$$\beta = \frac{b}{\max(1, Ma_{face})} \quad (5)$$

여기서 폰 노이만 해석 결과인 그림 3 으로부터 $b=1.2$ 이다. 하지만 실제 유동 해석 결과에서는 $b=0.5$ 에서 강건성을 유지하면서 좋은 수렴성을 보인다. 이는 안정성 해석에 사용된 사각형 정렬 격자와 실제 계산에 사용되는 삼각형 비정렬 격자의 차이일 것으로 사료된다.

고 문헌 [1]을 참조하면, 강직도가 낮은 문제에 대해서는 비록 안정성 해석에서 매우 낮은 CFL 수에서부터 불안정성이 존재한다고 예측되더라도, 매우 높은 CFL 수에서 불안정성 없이 좋은 성능을 보인다. 따라서 이러한 문제에 대해서는 안정성을 위해 내재항 인공 소산이 불필요하게 되며, 강직도가 큰 문제에 대해서만 내재항 인공 소산이 필요하게 된다. 본 연구에서는 이러한 강직도에 따라 적용된 내재항 인공 소산을 적용하기 위해 Jameson 등의 중심 차분기법에서 널리 사용되고 있는 압력에 대한 Laplacian을 사용한다.

Table 1 계산 결과

adaptation level		consistent	Jameson-Turkel	artificial dissipation
initial	CFL	10	10 ²	10 ⁴
	steps	412	379	252
1st	CFL	5	10	10 ⁴
	steps	1915	1218	567
2nd	CFL	5	10	10 ⁴
	steps	1737	1308	366
3rd	CFL	5	10	10 ⁴
	steps	1920	1974	385
4th	CFL	5	5	10 ⁴
	steps	4624	4773	652
5th	CFL	2	5	10 ⁴
	steps	7401	*	1004

$$T_i = \left| \sum_{j \in N(i)} (p_j - p_i) \right| / \sum_{j \in N(i)} (p_j + p_i) \quad (6)$$

결과적인 적응 내재항 인공 소산을 사용하는 내재적 연산자는 다음과 같다.

$$A_{ad}^+ = A^+ + \beta T |\lambda|, \quad A_{ad}^- = A^- - \beta T |\lambda| \quad (7)$$

여기서 β 와 T 는 식 (5)와 (6)에서 정의된 값을 사용한다.

4. 계산 결과

본 연구에서 제안된 기법의 성능을 평가하기 위해 마하수 8의 2차원 실린더 주위의 유동을 해석하였다. 여기서 격자의 밀집도에 따른 거동을 파악하기 위해 전 유동장에 대해서 거의 비슷한 크기를 갖는 성긴 격자에서 격자 적응을 수행하면서 각 기법의 성능을 평가하였다. 그림 3과 4는 각각 초기 격자와 마하수 분포 및 다섯 번 격자 적응된 후의 격자와 마하수 분포를 보이고 있다. 마하수 분포도에서는 Lyubimov and Rusanov의 계산에 의한 충격파의 위치가 함께 도시 되었다. 초기 격자에서는 격자 부족으로 인하여 Lyubimov and Rusanov의 결과와 차이를 보이고 있으나, 격자 적응후에는 매우 좋은 결과를 보이고 있다.

Table 1은 초기 격자에서부터 다섯 번째 적응된 격자에 대해서 각각의 기법에 대한 최대 허용 CFL 수와 잔류항의 order가 6개 감소되는데 필요한 반복 계산 회수를 보이고 있다. 초기 격자에 대해서는 내재항 인공 소산이 포함된 기법이 가장 좋은 성능을 보이지만, 나머지 두 기법 또한 심각한 수렴성 저하는 보이지 않는다. 하지만 초기 격자에 대해서도 내재적 인공 소산항을 포함하는 기법을 제외한 나머지 두 기법은 CFL 수의 제한이 존재하며, 수렴된 해를 얻기 위해서는 CFL 수를 적절한 값으로 선택하여야 하는 어려움이 있게 된다. 격자가 밀집됨에 따라 외재항과 일치하는 내재적 연산자와 Jameson-Turkel 연산자에 대해서는 허용 CFL 수가 급격히 제한되며, 결과적으로 수렴성 또한 급격히 저하된다. 네 번째 단계의 격자에 대해서는 내재적 인공 소산을 포함한 기법이 다른 두 기법에 비해 약 7 배 정도 빠른 수렴성을 보이고 있다. 또한 다섯 번째 적응된 격자에 대해서 Jameson-Turkel 내재적 연산자는 수렴하지 않는다.

5. 결 론

본 연구에서는 적응 내재항 인공 소산항을 사용하여 효율적이며 강건한 내재적 연산자를 개발하였다. 초음속 유동에 대한 검증을 통해 기존의 기법보다 좋은 성능을 보이는 것을 확인하였다. 추후 제안된 기법의 3차원으로 확장될 계획이다.

참고문헌

- [1] 김주성, 권오준, "비정렬 격자계에서 강건하고 효율적인 LU-SGS 기법 개발: Part I -내재적 연산자," 한국전산유체공학회지, Vol.9-3, (2004).
- [2] Jameson, A. and Turkel, E., "Implicit Schemes and LU Decompositions," *Mathematics of Computation*, Vol.156, (1981), p.385-397.
- [3] Yee, H. C., Klopfer, G. H., and Montagne J. -L., "High-Resolution Shock-Capturing Schemes for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows," *J. of Comp. Phys.*, Vol.88, (1990), p.31-61.