다차원 압축성 유동의 격자 경계면 대류 플럭스 계산을 위한 새로운 수치기법 연구

윤 성 환*1, 김 성 수*1, 김 규 홍*2, 김 종 암*3

Accurate and Efficient Re-evaulation of Cell-interface Convective Fluxes

S. H. Yoon, S. S. Kim, K. H. Kim and C. Kim

In order to reduce the excessive numerical dissipation which is induced when a grid system is not aligned with a discontinuity, a new spatial treatment of cell-interface fluxes is introduced. The M-AUSMPW+ in this paper has the formula that has an additional procedure of re-defining transferred properties at a cell-interface, based on AUSMPW+. The newly defined transferred property could eliminate numerical dissipation effectively in non-flow aligned grid system of multi-dimensional flows.

Key Words : AUSM 계열 수치 기법 (AUSM-type Method), 다차원 AUSMPW+ 기법 (M-AUSMPW+), 다차원 유동 계산 (Multi-dimensional Flow Computations)

1. 서 론

지금까지 대부분의 수치 기법들은 1차원 유동을 기반으로 개발되었으며, 많은 연구들을 통해 충격파와 접촉 불연속면을 포함하는 1차원 유동에 대해서도 만족할만한 수치 해석 결과를 얻을 수 있게 되었다. 그러나 다차원 유동에 적용할 경우 이러한 수치 기법들은 종종 과도한 수치 오차를 발생시키고 이로 인해 해의 정확도가 심각하게 훼손되어진다. 그 결과로 정확한 해를 얻기 위해 더 많은 수의 격자가 필요하게 되며, 이는 곧 데이터 저장과 계산 시간의 문제로 이어진다. 따라서 다차원 유동의 복잡한 물리현상을 분석하기 위해서는 정확하고 효율적인 수치기법이 필수적이라 할 수 있다. 그러므로 본 논문에서는 다차원 유동 문제에 대하여 보다 나은 결과를 얻을 수 있는 새로운 수치기법에 관해 다루고자 한다.

*1 서울대학교 대학원 기계항공공학부
*2 서울대학교 항공우주 신기술 연구소
*3 정회원, 서울대학교 기계항공공학부
*E-mail : ildild7@snu.ac.kr

본 연구에서는 먼저 AUSM 계열 기법을 기반으로 하여 새로운 플럭스 계산 기법을 개발하였으며, 그 핵심 아이디어는 격자 경계면에서의 대류 물성치량을 적절히 수정하는 것이다. 수학적인 분석과 수치해석 결과를 통해 본 연구에서 개발된 기법이 다차원 유동 계산에 대해서 유용함이 밝혀졌으며, 따라서 이 기법을 다차원 유동에 대한 AUSMPW+[1]라는 의미로 M-AUSMPW+라고 명명하였다.

2. 수치기법 분석

2.1 Re-evaluation of cell-interface fluxes

풍상 차분법(Upwind Scheme)으로 플럭스를 계산할 때 물성치의 연속 구간과 불연속 구간을 구분하고, 연속 구간에서의 플럭스 계산방법을 적절하게 수정한다면 과도한 수치점성을 예방하여 더 정확한 계산결과를 얻을 수 있다. 이러한 사실을 수학적으로 분석해보자. 우선 AUSM 계열 공간차분기법의 대류 플럭스는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{F}_{\frac{1}{2}} = m_{\frac{1}{2}} c_{\frac{1}{2}} \mathbf{\Phi}_{L\ or\ R} \tag{1}$$

여기서 $m_{\frac{1}{2}}$는 격자 경계면에서 계산된 마하수이고, Φ는 대류 플럭스 벡터이다. 식(1) 대신 연속 구간과 불연속 구간을 구분할 수 있는 다음과 같은 플럭스 형태가 사용될 수 있다.

$$\mathbf{F}_{\frac{1}{2}} = m_{\frac{1}{2}} c_{\frac{1}{2}} \mathbf{\Phi}_{L\ or\ R,\frac{1}{2}} \tag{2}$$

여기서 아래첨자 $\frac{1}{2}$은 격자 경계면에서 정의된 물성치임을 나타내며, 대류 플럭스 벡터 $\Phi_{L,R,\frac{1}{2}}$는 아래의 요구조건을 만족하도록 결정된다.

조건1. 연속 구간에서 해의 정확도를 높이기 위해 연속 구간과 불연속 구간을 구별해야 한다.
조건2. 단조 조건(monotonic condition)을 만족시켜야 한다.
조건3. 초음속 유동에 대해 upwind characteristic을 유지해야 한다.

조건1.은 본 연구의 주요 목표이며, 조건2.는 불연속 구간에서 발생하는 oscillation을 막기 위해 필요하다. 또한 조건3.은 초음속 유동영역에서의 물리 현상을 올바르게 나타내기 위해 필요한 조건이다.

우선 물성치의 연속 구간과 불연속 구간을 구별하는 기준을 마련하기 위해 두 영역 각각의 특성을 살펴보자. 일단 기준이 마련되면 격자 경계면에서의 대류 플럭스 값은 기준에 따라 재계산(re-evaluated)된다. 물리량들의 실제 분포에 대한 정보를 얻기 위해, 먼저 TVD 내삽 기법을 분석해 보자. minmod 제한자는 물성치 분포가 완만하게 변화하는 것으로 인식하여 격자 경계면에서 내삽된 값이 다음과 같은 관계를 만족시키도록 한다.

$$\mathbf{\Phi}_i < \mathbf{\Phi}_L < \mathbf{\Phi}_R < \mathbf{\Phi}_{i+1} \tag{3}$$

반면 superbee 제한자는 분포가 급격히 변하는 것으로 인식하며, 아래의 관계를 만족시키도록 격자 경계면에서 내삽된 값을 결정한다.

$$\mathbf{\Phi}_i < \mathbf{\Phi}_R < \mathbf{\Phi}_L < \mathbf{\Phi}_{i+1} \tag{4}$$

그러므로 TVD 내삽 기법을 통해 얻은 값들이 식(3)을 만족한다면 물성치가 연속적으로 변화하는 영역으로 고려할 수 있으며, 식(4)를 만족한다면 불연속적으로 변화하는 영역으로 생각할 수 있다. 본 연구에서는 이를 바탕으로 수학적 분석을 통해 다음과 같은 기준을 제안하고자 한다.

(Proposition) 내삽 기법을 통해 얻은 $\Phi_{L or R}$값들이 식(3)의 조건을 만족한다면, 격자 경계면은 연속 구간에 있는 것으로 고려할 수 있으며, 대류 플럭스 값은 $\mathbf{\Phi}_{L,i+\frac{1}{2}} = \mathbf{\Phi}_{R,i+\frac{1}{2}} = 0.5(\mathbf{\Phi}_L + \mathbf{\Phi}_R)$ 으로 수정된다. 반면 $\Phi_{L or R}$값들이 식(4)를 만족한다면 불연속 구간으로 고려하여 플럭스 값은 수정되지 않는다. 그러므로 격자 경계면에서 재계산된 대류 플럭스 값은 단순히 내삽된 값보다 항상 실제 물리량에 더 가까우며, 따라서 이는 물리량의 분포가 연속적인 영역과 불연속적인 영역 모두에 대해 해의 정확도를 향상시킨다.

위의 proposition을 수식으로 표현하기 위해, 식(3)을 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$(0.5(\mathbf{\Phi}_L + \mathbf{\Phi}_R) - \mathbf{\Phi}_L)(\mathbf{\Phi}_{L,superbee} - \mathbf{\Phi}_L) \geq 0 \tag{5}$$

여기서 대류 플럭스 값은 다음과 같이 결정된다.

$$0.5(\mathbf{\Phi}_R - \mathbf{\Phi}_L)(\mathbf{\Phi}_{L,superbee} - \mathbf{\Phi}_L) \geq 0 \text{ 이면, } \quad \mathbf{\Phi}_{L,i+\frac{1}{2}} = 0.5(\mathbf{\Phi}_L + \mathbf{\Phi}_R) \tag{6}$$

$$0.5(\mathbf{\Phi}_R - \mathbf{\Phi}_L)(\mathbf{\Phi}_{L,superbee} - \mathbf{\Phi}_L) < 0 \text{ 이면, } \quad \mathbf{\Phi}_{L,i+\frac{1}{2}} = \mathbf{\Phi}_L \tag{7}$$

다음으로 단조성(monotonic characteristics)에 대한 조건2.를 만족시키기 위해서는 격자 경계면에서 계산된 물성치가 다음의 식을 만족해야만 한다.

$$\min(\mathbf{\Phi}_{L,\min\bmod}, \mathbf{\Phi}_{L,superbee}) < \mathbf{\Phi}_{L,i+\frac{1}{2}} < \max(\mathbf{\Phi}_{L,\min\bmod}, \mathbf{\Phi}_{L,superbee}) \tag{8}$$

식(8)의 단조 조건(monotonic condition)을 식(6)과 (7)에 적용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{\Phi}_R - \mathbf{\Phi}_L)(\mathbf{\Phi}_{L,superbee} - \mathbf{\Phi}_L) \geq 0 \text{ 이면, } \quad \mathbf{\Phi}_{L,i+\frac{1}{2}} = \mathbf{\Phi}_L + sign(\mathbf{\Phi}_{L,superbee} - \mathbf{\Phi}_L)\min(|0.5(\mathbf{\Phi}_R - \mathbf{\Phi}_L)|, |\mathbf{\Phi}_{L,superbee} - \mathbf{\Phi}_L|) \tag{9}$$

$(\Phi_R - \Phi_L)(\Phi_{L,superbee} - \Phi_L) < 0$ 이면,

$$\Phi_{L,i+\frac{1}{2}} = \Phi_L \tag{10}$$

요약하여 정리하면, 격자 경계면에서의 플럭스는 다음과 같은 형태로 씌여질 수 있다.

$$\Phi_{L,\frac{1}{2}} = \Phi_L + \frac{\max[0,(\Phi_R - \Phi_L)(\Phi_{L,superbee} - \Phi_L)]}{|\Phi_R - \Phi_L|(\Phi_{L,superbee} - \Phi_L)} \min\left[\frac{|\Phi_R - \Phi_L|}{2}, |\Phi_{L,superbee} - \Phi_L|\right] \tag{11}$$

$$\Phi_{R,\frac{1}{2}} = \Phi_R + \frac{\max[0,(\Phi_L - \Phi_R)(\Phi_{R,superbee} - \Phi_R)]}{|\Phi_R - \Phi_L|(\Phi_{R,superbee} - \Phi_R)} \min\left[\frac{|\Phi_R - \Phi_L|}{2}, |\Phi_{R,superbee} - \Phi_R|\right] \tag{12}$$

수치적으로 계산된 플럭스는 초음속 유동 영역에서 upwind characteristic을 만족시켜야 하기 때문에, 격자 경계면에서의 $\Phi_{i+\frac{1}{2}}$은 격자 경계면이 아음속 영역에 있는지 초음속 영역에 있는지를 고려하여 결정되어야 한다. 이러한 유동 영역의 판별을 위하여 마하수를 기반으로 하여 구성된 함수 a를 도입하였다. 따라서 본 연구에서 제안하는 격자 경계면 플럭스는 최종적으로 다음과 같이 씌여질 수 있으며, 이는 앞에서 언급한 조건1, 2, 3을 모두 만족시킨다.

$$\Phi_{L,\frac{1}{2}} = \Phi_L + \frac{\max[0,(\Phi_R - \Phi_L)(\Phi_{L,superbee} - \Phi_L)]}{|\Phi_R - \Phi_L|(\Phi_{L,superbee} - \Phi_L)} \min\left[a\frac{|\Phi_R - \Phi_L|}{2}, |\Phi_{L,superbee} - \Phi_L|\right] \tag{13}$$

$$\Phi_{R,\frac{1}{2}} = \Phi_R + \frac{\max[0,(\Phi_L - \Phi_R)(\Phi_{R,superbee} - \Phi_R)]}{|\Phi_R - \Phi_L|(\Phi_{R,superbee} - \Phi_R)} \min\left[a\frac{|\Phi_R - \Phi_L|}{2}, |\Phi_{R,superbee} - \Phi_R|\right] \tag{14}$$

여기서 $a = 1 - \min(1, \max(|M_L|,|M_R|))^2$ 이며, 마하수가 영(zero)이 될 때 그 미분 값이 연속이 되도록 하기 위해 a를 마하수에 대한 이차함수 형태로 선택하였다.

위의 과정에서는 1차원 유동을 기반으로 하여 격자 경계면에서의 대류 플럭스를 정확히 계산하는 방법을 유도하였다. 그러나 최종적으로 얻어진 식의 수치 점성에 대해 수학적으로 분석해본 결과 다차원 유동에서 발생하는 과도한 수치점성을 효과적으로 제거할 수 있음이 밝혀졌다. 따라서 이 기법을 다차원 유동 문제에 적용할 경우 해의 정확도가 향상되며, 이는 수치 실험 결과를 통해 잘 드러난다. 또한 앞에서 제안된 proposition은 ENO[2]와 같이 단조성을 가지는 모든 다른 내삽 기법에 대해서도 일반적으로 성립된다.

2.2 Complete monotonicity

정상 충격파 불연속면에 대한 수렴 특성을 향상시키고 격자 의존성을 줄이기 위하여, AUSM 계열 공간차분기법의 압력 분리 함수(pressure splitting function)에 대한 수정을 수행하였다. 수치적으로 충격파 형상을 구현하는데 있어서 가장 유용한 관계식은 Rankine-Hugoniot 관계식과 Prandtl 관계식이다. Roe의 FDS에서 사용되는 Rankine-Hugoniot 관계식은 밀도, 압력, 온도 등 열역학적 변수들 간의 관계를 모두 포함하므로 가장 이상적인 관계식이지만, AUSM 계열 공간차분기법에서는 대류 플럭스와 압력 플럭스 항을 각각 분리하여 다루기 때문에 사용될 수 없다. 대신 AUSM 계열 공간차분기법에서는 Prandtl 관계식을 이용하여 충격파를 인지한다. 그러나 Rankine- Hugoniot 관계식과는 달리 Prandtl 관계식은 열역학적 변수들의 관계에 대한 정보를 포함하지 않으므로 단조성을 파괴하는 overshoot을 발생시키거나 다소 확산된 형태의 충격파 계산 결과를 도출할 우려가 있다. 따라서 본 연구에서는 지배방정식으로부터 충격파 전후의 압력 차이에 관한 관계식을 직접 유도해 냄으로써 이러한 결점을 보완하였다. 유도된 결과는 다음과 같다.

$M_{L,s} > 1$, $0 < M_{R,s} < 1$, $M_{L,s}M_{R,s} < 1$ 이면,

$$P_R^- = \max\left(0, \min\left(0.5, 1 - \frac{\rho_L U_L (U_L - U_R) + p_L}{p_R}\right)\right) \tag{15}$$

$-1 < M_{L,s} < 0$, $-1 < M_{R,s}$, $M_{L,s}M_{R,s} < 1$ 이면,

$$P_L^+ = \max\left(0, \min\left(0.5, 1 - \frac{\rho_R U_R (U_R - U_L) + p_R}{p_L}\right)\right) \tag{16}$$

위의 압력 분리 함수를 사용함으로써 완전 단조특성(complete monotonic characteristic)을 획득하고, 격자 의존성을 줄일 수 있다.

3. 결과 및 고찰

3.1 Vortex flow

이 수치실험은 약한 와류 유동에 해당하며, 와류 내부 반지름은 0.2m이고 각속도는 2를 초기조건으로 부과하였다. Fig.1은 초기 조건에 해당하는 등 밀도 선도(contour)와 line AB를 따른 압력 분포를 나타낸 것이다. 1000번 반복(iteration) 후의 결과이며, Roe의

FDS와 AUSM+ 기법은 다소 확산된 형태로 서로 유사한 결과를 보이고 있다. 본 연구에서 제안된 방법은 훨씬 향상된 결과를 보여주고 있으며, 다차원 유동에 있어서 유용함을 알 수 있다.

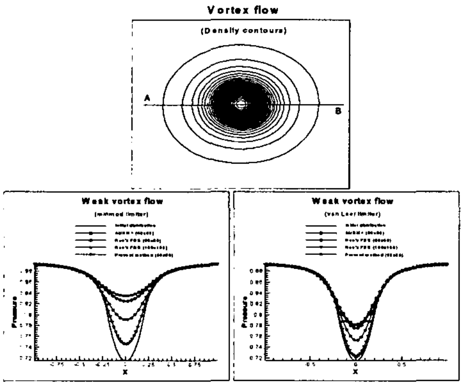
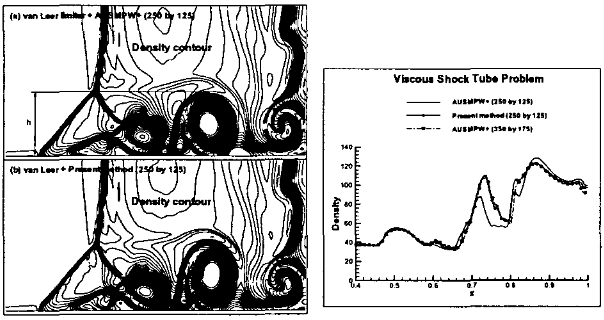


Fig.1 와류 유동의 결과 비교

3.2 Viscous shock tube problem

이 수치실험은 Daru와 Tenaud에 의해 제안된 것과 같은 이차원 점성 충격파 문제이다.



(a) (b)

Fig.2 점성 충격파 문제의 결과 비교

Fig.2(a)는 AUSMPW+와 본 연구에서 제안된 기법을 사용하여 얻은 등 밀도선도를 비교한 것이다. AUSMPW+를 이용해 얻은 결과의 주 와류(primary vortex)는 본 연구에서 제안된 기법을 사용해 얻은 결과와 비교해 볼 때 크기가 작고 덜 회전된 것으로 보인다. Fig.2(b)는 250×125(=31250)개의 격자에 대해 본 연구에서 제안된 방법으로 얻은 결과가 350×175 (=61250)개의 격자에 해당하는 AUSMPW+를 사용하여 얻은 결과와 거의 일치함을 보여준다. 격자수가 거의 2배 가까이 차이가 난다는 점을 감안할 때 이는 현재 제안된 방법의 우수성을 나타내며, 절반 정도의 격자수만을 사용하여도 AUSMPW+나 Roe의 FDS와 같은 이전 기법들과 동등한 정확도의 해를 제공함을 알 수 있다.

4. 결 론

AUSM 계열 공간차분기법의 격자 경계면 대류 플럭스를 다루는 새로운 방법이 개발되었으며, 이 방법은 충격파 영역에서의 해의 정확도를 유지하는 동시에 물성치가 연속적으로 분포된 영역에서는 수치점성을 줄여준다. 본 연구에서 제안된 기법의 핵심 아이디어는 실제 물리 현상과 다차원 현상을 고려함으로써 격자 경계면에서 전파되는 물성치의 값을 수정해 주는 것이다. 본 연구에서 제안된 M-AUSMPW+ 기법은 두 가지 면에서 가장 두드러진 특성을 보인다. 우선 격자 경계면에서의 새로 정의된 값이 이전 기법들에 비해 실제 물리적 수치에 더 가까우며, 또한 유동 현상과 격자가 일치하지 않는 경우에도 수치점성을 효과적으로 제거할 수 있다는 점이 그것이다. 이에 더하여 정상 충격파 문제에 대해 완전 단조 특성을 획득함으로써 수렴 특성과 격자 의존성이 월등히 향상되었다.

수치 실험을 통해 M-AUSMPW+가 이전 기법들과 비교해 볼 때 격자수에 있어서 2배가량 효율적인 것이 보여 졌으며, 더 나아가 3차원 문제에 이를 적용할 경우에는 더욱 향상된 결과를 얻을 수 있을 것으로 기대된다. 또한 본 연구는 AUSM 계열 공간차분기법을 기반으로 수행되었으나 그 핵심 아이디어는 Roe의 FDS에도 동일하게 적용할 수 있으며, 본 연구 결과에서와 같이 해의 정확도와 효율성 면에서 역시나 좋은 결과를 얻을 수 있을 것으로 예상된다.

후기

본 연구는 두뇌한국 21사업 지원의 일부로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

[1] K. H. Kim, C. Kim and O. H. Rho, "Methods for the Accurate Computations … ," J. of Comp. Physics. A174 (2001), 38-80

[2] Harten, B. Engquist, S. Osher, and Chakravarthy, "Uniformly high order accurate …," J. of Comp. Physics. A71 (1987), 231-303