

시변 환경에 적합한 PAST알고리즘

임준석

세종대학교 전자공학과

Auto Tuning PAST Algorithm for Time-Varying Signals

Jun-Seok Lim

Dept. of EE in Sejong University, jslim@sejong.ac.kr

요 약

본 논문에서는 PAST(Projection Approximation Subspace Tracking)에 기반 한 새로운 부공간(subspace) 추적 알고리즘을 제안하고자 한다. 빠른 시분할 대상의 목표물의 방위각을 추정하는 것이 필요하다. 그러나 PAST 기법은 고속의 시분할 환경에서는 잘 동작하지 않는다. 따라서 가변망각 인자를 도입하여 빠르게 변화하는 부공간의 비정제(Nonstationary) 상태에 잘 적응시켜 PAST 성능 향상을 보고자 한다.

I. 서 론

최근 레이더, 소나뿐 아니라, 이동통신 시스템에서도 빠른 시변 목표물, 즉, 제거나 움직이는 목표물 및 이동하는 송수신자 등에 대한 방위각 추정이 필요하게 되었다.

위와 같은 비정제(nonstationary) 상태에서 방위각 추정을 위해서는 부공간을 재귀적으로 갱신하는 것이 필요하여, 이 분야의 새로운 알고리즘들을 연구하여 왔다^[1].

그중에서도 PAST (Projection Approximation Subspace Tracking)기법은 대표적인 재귀적 부공간 갱신 알고리즘들 중 하나이다. 그러나 PAST 알고리즘은 고속의 시변 환경이나 정제/비정제(stationary/nonstationary) 상태가 복합된 환경 하에서는 성능이 떨어지는 경향이 있다. 그 같은 현상의 이

유는 고정 망각 인자를 사용하는 것으로 생각할 수 있다.

본 논문에서는 고정 망각 인자 대신 가변 망각 인자를 도입하여 빠르게 변하는 비정제(Nonstationary) 환경에서 PAST가 신호 부공간을 추정하는 성능을 향상시키고자 한다.

II. 가변망각인자를 도입한 PAST

PAST 알고리즘은 다음의 오차 에너지로 된 비용함수를 최소화하는 데 그 기반을 둔다.

$$\begin{aligned}
 J(W(t)) &= \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} \|X(i) - W(t)W^H(t)X(i)\|^2 \\
 &= \text{tr}[C(t)] - 2\text{tr}[W^H(t)C(t)W(t)] \\
 &\quad + \text{tr}[W^H(t)C(t)W(t)W^H(t)W(t)]
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

여기서 $C(t)$ 는 상관 행렬 샘플이며, $W(t)$ 는 $N \times r$ 행렬이다. $J(W(t))$ 는 $W(t) = V_s(t)Q$ 로서 지역 최소(local minima)가 없는 전역 최소(global minimum)를 가지고 있다는 것이 증명되었다^[4]. $V_s(t)$ 는 $C(t)$ 의 r 개의 신호 고유벡터들(eigenvectors)을 포함하고 있는 행렬이며, Q 는 임의의 단위행렬이다. 위의 결과는 반복적인 방법을 통해 $J(W(t))$ 을 최소화함에 의해서 $C(t)$ 의 신호 부공간을 찾을 수 있음을 말해준다. 지역 최소가 없기 때문에 전역 수렴(global

convergence)은 보증할 수 있다.

B. Yang은 새로운 센서 출력 벡터 $X(t)$ 에서 $W(t-1)$ 로부터 $W(t)$ 를 재귀적으로 계산하는 알고리즘을 제안하였다^[2]. 이런 목적을 위해서 식 (1)에 $W^H(t)X(t)$ 는 시간 t 에서 $1 < i < t$ 에 대해 계산될 수 있는 식 $y(i) = W^H(i-1)X(i)$ 이 의해 근사화한다. 이로써 다음과 같은 변형된 비용함수를 얻었다.

$$J(W(t)) = \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} \|X(i) - W(t)y(i)\|^2 \quad (2)$$

위 식은 $W(t)$ 에 대한 2차식이다. 그러나 stationary 상태 또는 천천히 변화하는 신호에서 $W^H(t)X(i)$ 와 $W^H(i-1)X(i)$ 의 차이는 매우 작으므로, 식(2)의 $J(W(t))$ 가 $J(W(t))$ 에 대해 좋은 근사값임을 알 수 있다. 따라서 $J(W(t))$ 를 최소화 하는 $W(t)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W(t) &= C_{xy} C_{yy}^{-1}(t), \\ C_{xy}(t) &= \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} X(i)y^H(i) \\ &= \beta C_{xy}(t-1) + X(t)y^H(t), \\ C_{yy}(t) &= \sum_{i=1}^t \beta^{t-i} y(i)y^H(i) \\ &= \beta C_{yy}(t-1) + y(t)y^H(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$N \times r$ 행렬 $C_{xy}(t)$ 와 $r \times r$ 행렬 $C_{yy}(t)$ 의 재귀적 계산은 $O(Nr)$ 과 $O(r^2)$ 연산이 필요하다. $C_{xy}(t)$ 와 $C_{yy}(t)$ 로부터 $W(t)$ 의 계산은 추가적인 $O(Nr) + O(r^3)$ 연산이 요구된다. 좀더 효율적이고 좀더 강인한 방법은 $C_{yy}(t)$ 의 역함수를 계산하기 위해 재귀적으로 행렬 역 정리를 적용시키는 것이다. 연산자 $\text{Tr}\{\cdot\}$ 는 $P(t) = C_{yy}^{-1}(t)$ 의 상 또는 하 삼각 부분에 계산되고 그것의 허미션(Hermitian) 전치가 또 다른 상 또는 하 삼각 부분에 복사된다는 것을 나타내고 있다.

PAST 알고리즘은 수정할 때 마다 단지 $3Nr + O(r^2)$ 의 연산이 필요하다.

표 1. PAST 요약

$P(0)$, and $W(0)$
 For $t = 1, 2, \dots$ Do
 $y(t) = W^H(t-1)X(t)$
 $h(t) = P(t-1)y(t)$
 $g(t) = h(t)/[\beta + y^H(t)h(t)]$
 $P(t) = \frac{1}{\beta} \text{Tri}\{P(t-1) - g(t)h^H(t)\}$
 $e(t) = X(t) - W(t-1)y(t)$
 $W(t) = W(t-1) + e(t)g^H(t)$
 END

위 표1에 요약된 PAST 알고리즘은 고정된 망각인자 β 를 가지고 nonstationary 상태를 조절한다. 실제적인 DOA 추정 상황은 nonstationary 상태 또는 stationary 와 nonstationary 상태가 혼합된 상태가 되기 쉽다. 그 결과 단일 고정 망각 인자로는 이런 다양한 경우를 효과적으로 조절하지 못하는 결과를 낳는다.

본 논문에서는 nonstationary 상태 하의 신호 부공간 추정을 위해서 PAST 알고리즘에 가변 망각인자를 도입한다. 이를 위해서 식(1)에서 보인 오차 벡터 ϵ 를 가지고 식(4)와 같은 목적함수를 세우고 이로부터 가변 망각인자를 도출한다.

$$J(t) = E\{\epsilon^H \epsilon\} \quad (4)$$

여기서, $\epsilon(t) = X(t) - WW^H X(t)$
 $= (I - WW^H)X(t)$

$$\begin{aligned} J(t) &= \text{tr}\{(I - WW^H)R_{xx}(t)(I - WW^H)\} \\ &= \text{tr}\{(I - WW^H)(\beta(t)R_{xx}(t-1) \\ &\quad + X(t)X^H(t))(I - WW^H)\} \\ &= \text{tr}\{(I - WW^H)(\beta(t)R_{xx}(t-1))(I - WW^H)\} \\ &\quad + \text{tr}\{(I - WW^H)X(t)X^H(t)(I - WW^H)\} \\ &= \beta(t)J(t-1) + \text{tr}\{(I - WW^H)X(t)X^H(t)(I - WW^H)\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \frac{J(t)}{J(t-1)} \\ &= \frac{\text{tr}\{(I - WW^H)X(t)X^H(t)(I - WW^H)\}}{J(t-1)} \end{aligned} \quad (6)$$

오차 에너지는 충분히 수렴되었다면, 다음을 만족한다.

$$\frac{J(t)}{J(t-1)} \approx 1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \beta(t) &= 1 - \frac{\text{tr}\{(I - WW^H)X(t)X^H(t)(I - WW^H)\}}{J(t-1)} \\ &= 1 - \alpha \text{tr}\{(I - WW^H)X(t)X^H(t)(I - WW^H)\} \\ &= 1 - \alpha \epsilon^H(t)\epsilon(t) \end{aligned} \quad (8)$$

표 2. VFF-PAST 요약

$P(0)$, α and $W(0)$
 For $t = 1, 2, \dots, Do$
 $y(t) = W^H(t-1)X(t)$
 $h(t) = P(t-1)y(t)$
 $g(t) = h(t)/[\beta(t-1) + y^H(t)h(t)]$
 $P(t) = \frac{1}{\beta(t-1)} \text{Tri}\{P(t-1) - g(t)h^H(t)\}$
 $\epsilon(t) = X(t) - W(t-1)y(t)$
 $\beta(t) = 1 - \alpha \{\epsilon^H(t)\epsilon(t)\}$
 $W(t) = W(t-1) + \epsilon(t)g^H(t)$

END

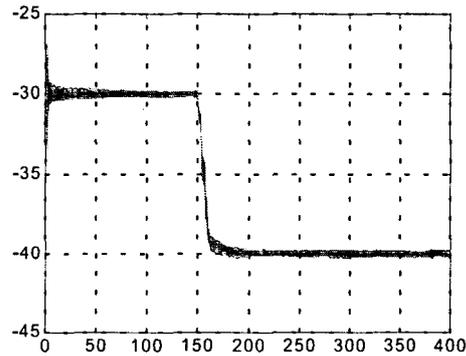
는 망각 인자를 가진 PAST는 1에 가까운 큰 망각 인자를 가지는 경우보다 빠르게 수렴한다. 가변 망각인자의 경우 그림 1(a)와 같이 그림 1(b)와 거의 유사한 수렴 성능을 보인다. 이런 성능을 추정 분산의 측면에서 보면 그림 1(d)에서 보듯이 큰 값의 망각 인자를 가진 PAST는 작은 값의 망각 인자를 가진 것보다 상대적으로 적은 추정 분산 값을 가진다. 반면에 제안된 알고리즘의 경우 분산은 큰 망각인자를 사용한 경우와 같이 적은 추정 분산의 결과를 냈다. 종합하면 수렴 성능은 작은 망각 인자를 가지고 있는 PAST와 양립할 수 있고 추정 분산은 큰 망각인자를 가지고 있는 PAST를 가지고 있는 것과 거의 같다고 할 수 있다. 따라서 시간 변화가 적으면 망각 정도를 적게 조절하고 시간 변화가 심하면 망각 정도를 크게 조절함을 알 수 있다. 즉 상황에 빠르게 대처하고 또 추정 값의 안정도가 높다고 할 수 있다.

III. 실험 및 고찰

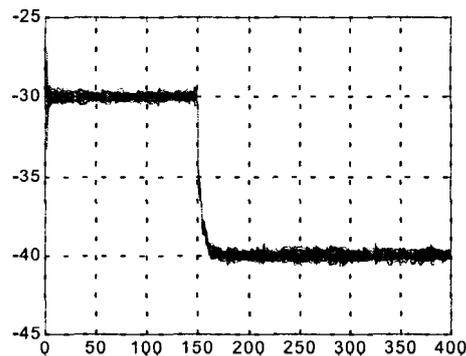
본 절에서는 시변 상황에서의 부공간 추정 능력을 보이기 위해서 DOA추정을 통하여 그 성능을 보인다. DOA에 쓰일 수 있는 여러 추정 방법중 ESPRIT은 식 (1)에 $W(t)$ 의 열이 직교되지 않아도 되는 이점을 가지고 있어서 본 실험에서 채용하였다. 신호 발생 시나리오는 1개의 평면파가 -30° 방향에서 도래하다 200번째 시간 스텝에서 -40° 방향으로 갑자기 변하는 가상적인 상황을 잡았다. 수신하는 선배열의 요소 수는 8개로 하였다. 신호의 SNR은 20dB로 하였다. 비교를 위해 고정 망각인자를 사용한 PAST 알고리즘을 망각인자를 0.97과 0.8로 고정시키고 비교실험을 하였다. 실험 결과는 100번의 독립적인 반복 실험으로 얻었다. 초기치를 위해서 $\lambda(0)$ 는 1로 set하고 $W(0)$ 는 identity 행렬로 설정하였다.

그림 1(a)는 제안한 가변 망각인자 PAST를 사용한 DOA 추정 결과를 나타내었다. 그림 1(b)는 고정 망각인자 0.8을 사용한 기존 PAST 알고리즘에 의해 추정된 DOA 값을 보여준다. 그림 1(c)는 고정 망각인자 0.98을 사용한 기존 PAST 알고리즘에 의해 추정된 DOA 값을 보여준다. 추정된 DOA 추정을 비교하여 보여주고 있다. 그리고 그림 1(d)는 각 경우의 추정 결과의 분산을 나타내고 있다.

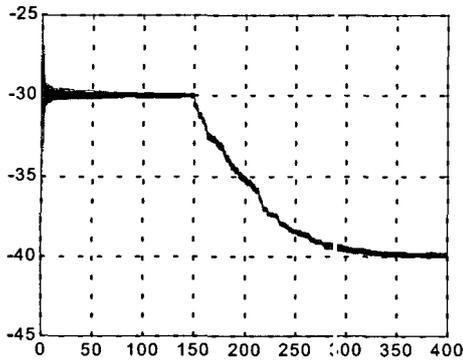
그림 1(b)와 (c)에서 보면 0에 가까운 작은 값을 가지



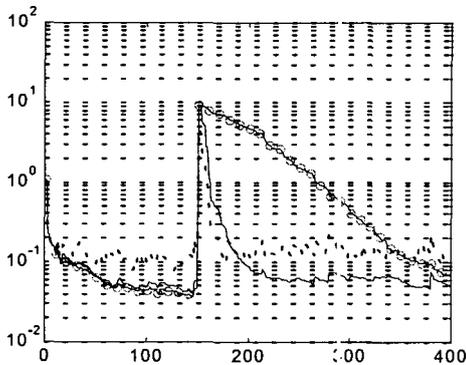
(a)



(b)



(c)



(d)

- (a) 제안된 방법의 DOA 추정 결과
- (b) 0.97 망각인자를 가지는 PAST의 DOA 추정 결과
- (c) 0.8 망각인자를 가지는 PAST의 DOA 추정 결과
- (d) 추정분산 비교 (실선: 제안 알고리즘, 점선: 0.8 PAST, -o-: 0.98 PAST)

그림 1. 추적 성능 비교

N. 결론

본 논문에서 제안된 알고리즘은 효과적으로 빠르게 변화하는 부공간을 추정하기 위해서 FAST 알고리즘에 가변망각인자를 도입하였다. 추적 능력을 설명하기 위해서 제안된 알고리즘과 시분할 DOA 목표를 가진 시나리오에서 PAST를 비교하였다. 제안된 알고리즘은 항상된 시변 부공간 추정 능력이 있음을 보였다. 이 같은

항상된 부공간 추정 능력은 자동항법유도장치, 해저 통신과 같은 시변 현상을 많이 보이는 곳에 적용시킬 수 있다.

참고문헌

- [1] H. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research : The parametric approach," *IEEE Signal Processing Mag.*, Vol. 13, pp. 67-94, July, 1996.
- [2] Bin Yang, "Projection Approximation Subspace Tracking," *IEEE Trans. Signal Proc.*, Vol. 43, No. 1, pp. 95-107, Jan., 1995.
- [3] Javier Sanchez-Araujo and Sylvie Marcos, "An Efficient PASTd Algorithm Implementation for Multiple Direction of Arrival Tracking", *IEEE Trans on Signal Processing*, Vol. 47, No. 8, pp. 2321-2324, Aug., 1999.
- [4] B. Yang, " Projection Tracking based on the projection approach and the recursive least squares method," *ICASSP93*, pp. IV145-IV148, Apr. 1993.
- [5] Simon Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, NJ, 1996.
- [6] T. Soderstrom and P. Stoica, *System Identification*, Prentice-Hall, New York, N.Y., 1989.
- [7] A.R. Figueiras-Vidal, *Digital Signal Processing in Telecommunication*, Springer, London, 1998.