

평판 진동 해석에 대한 파워흐름해석법의 실험적 연구

이 병철*·길 현권*·이 효행*·이 용현*·홍 석윤**

* 수원대학교 기계공학과, **서울대학교 조선해양공학과

Experimental Study on the Power Flow Analysis of Vibration of a Plate

Byoung-Chul Lee*, Hyun-Gwon Kil*, Hyo-Haeng Lee*, Yong-Hyun Lee*, Suk-Yoon Hong**

* Department of Mechanical Engineering, University of Suwon

** Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University

(*dhdark@hotmail.com)

1. 요약

파워흐름해석법은 진동에너지 흐름 형태에 따른 에너지배방정식을 이용하는 방법으로서, 진동에너지의 공간적인 분포와 전달 경로 등을 제시할 수 있는 방법이다. 이러한 파워흐름해석법은 고주파수 대역의 진동을 해석하기 위하여 효과적으로 적용될 수 있다. 본 연구에서는 평판 구조물 진동에 대한 파워흐름해석법의 예측 결과를 실험 결과와 비교하여 분석하였다. 분석할 진동 특성들은 손실계수, 주파수 응답함수 등을 포함한다. 그리고 이러한 분석 결과로부터 파워흐름해석법이 고주파수 진동에 효과적으로 적용될 수 있음을 보였다.

2. 서론

복합구조물의 진동을 줄이고 또한 방사되는 소음을 줄이기 위하여서는 진동에너지의 공간적 분포와 에너지 흐름의 경로를 알기 위한 해석이 필요하다. 진동에너지 해석을 위하여 일반적으로 저주파수 영역에서는 유한요소해석법[1]이 그리고 고주파수 영역에서는 통계적 에너지해석법[2]이 널리 사용되고 있다. 유한요소 해석법의 경우는 진동수가 증가하게 되면 진동장을 형성하는 파동의 파장이 작아지므로 구조체를 더욱 작은 요소로 나누어야 한다. 따라서 고주파수 영역에서의 적용은 많은 계산 시간을 요하게 된다는 단점이 있다. 통계적 에너지해석법의 경우에는 복합구조물 각 요소의 진동에너지에 대한 공간적인 평균값만을 제공하게 된다는 단점이 있다.

유한요소법과 통계적 에너지해석법의 한계점들을 보완하기 위한 여러 근사법들 중에서 최근에 국외에서 연구가 활발히 진행되고 있는 파워흐름해석법 (Power

Flow Analysis, PFA)을 들 수가 있다. 이 방법은 Belov등[3]에 의하여 제안되었으며, 진동에너지 흐름 형태에 따른 고유의 에너지배방정식을 정립하고 해석함으로써 진동에너지의 공간적인 분포와 전달 경로 등을 제시할 수 있는 방법이다. 이러한 파워흐름해석법은 주로 고주파수 대역에서 적용되어지나, 중주파수 영역에까지 확대 적용될 수 있는 방법으로 인식되어 왔다[4,5].

그러나 파워흐름해석법의 수치 해에 대한 신뢰성은 해석이 가능한 구조물의 해석 해와의 비교를 통하여 평가되어 왔다. 따라서 본 논문에서는 실험에 의한 결과와 파워흐름해석해와의 비교를 통하여, 파워흐름해석법의 신뢰성을 검증하고 해석상의 특징들을 검토하고자 한다. 실험에서는 자유 지지되어 진동하는 평판의 손실계수를 측정하여, 파워흐름해석법 의 입력 데이터를 활용하였다. 그리고 평판의 여러 지점에 대한 주파수 응답함수(FRF, Frequency Response Function)를 측정하고 파워흐름해석 해와 비교를 하였다. 이러한 비교를 통하여, 파워흐름해석법이 중고주파수 대역의 구조 진동을 해석하기 위하여 효과적으로 활용될 수 있음을 보였다.

3. 파워흐름해석(PFA)

구조 진동의 경우 여러 특성을 갖는 면외 및 면내 파동의 전파에 의하여 발생된다. 파워흐름해석법의 경우, 각 파동과 관련된 진동에너지 흐름 형태에 따른 고유의 에너지배방정식을 정립하고 해석함으로써 진동에너지의 공간적인 분포와 전달 경로 등을 제시할 수 있는 방법이다. 일반적으로 진동에너지 방정식은 진동수 ω 에서 공간-시간 평균 진동 에너지 밀도 $\langle e \rangle$ 에 대하여 다음과 같이 표시된다.

$$-\frac{c_p^2}{\eta\omega} \nabla^2 \langle e \rangle + \eta\omega \langle e \rangle = \Pi_{in} \quad (1)$$

여기서 η 는 구조감쇠에 의한 내부에너지 손실계수, c_g 는 해당 파동의 에너지 전파 속도, 그리고 Π_{in} 는 가진력에 의한 입력 파워를 나타낸다. 또한 진동 인텐시티 벡터는 $\langle q \rangle$ 다음과 같이 진동에너지밀도로 표시된다.

$$\langle q \rangle = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla \langle e \rangle \quad (2)$$

식(1)과(2)에 해당 구조물의 경계에서의 경계조건을 적용함으로써 진동에너지 밀도와 진동인텐시티 벡터를 구할 수 있게 된다. 적용 방법으로는 해석적 방법을 이용할 수 있으며, 또한 식(1)과(2)의 해를 구하기 위하여 유한요소법을 이용하는 파워흐름유한요소법(PFFEM, Power Flow Finite Element Method)[7]을 적용할 수 있다. 본 논문에서는 해석적 방법을 적용하기로 한다.

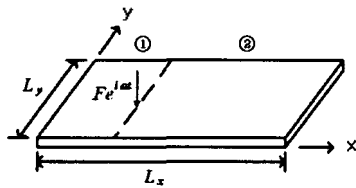


그림 1. 면의 점가진력에 의하여 진동하는 평판

적용 예로서 면의 가진력에 의하여 진동하는 자유 지지된 평판의 경우를 고려한다. 그림 1과 같이 가진력에 의해 파워가 입력되는 위치를 기준으로 ①과 ②영역으로 나누어, 각 영역에서 굽힘파에 대한 진동에너지밀도와 진동인텐시티를 $\langle e_j \rangle$ 과 $\langle q_j \rangle$ ($j=1,2$)으로 나누어 표시하기로 한다. x 축에 평행한 경계선 $y=0$ 와 $y=L_y$ 을 따라 입력 파워가 없다고 가정할 수 있으므로, 각 영역에서 각 파동의 에너지 밀도는 cosine 급수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\langle e_j \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_{nj}(x_j) \cos k_{ny}y \quad (3)$$

여기서 $k_{ny} = n\pi/L_y$ 이다. 식(3)을 에너지지배방정식(1)에 대입하면, 다음과 같이 E_{nj} 에 대한 관계식을 얻는다.

$$-\frac{d^2 E_{nj}(x_j)}{dx_j^2} + (k_{nx}^2 + \Phi_m^2) E_{nj}(x_j) = 0 \quad (4)$$

여기서

$$\Phi = \frac{\eta\omega}{c_g}, \quad k_{nx}^2 = k_{ny}^2 + \Phi_m^2$$

를 고려하면 식(1)의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$E_{nj}(x) = A_{nj}^+ e^{-k_{nx}x} + A_{nj}^- e^{k_{nx}x} \quad (5)$$

그러므로 에너지 밀도는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\langle e_j \rangle = \langle e_j \rangle^+ + \langle e_j \rangle^- \quad (6)$$

여기서

$$\langle e_j \rangle^+ = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj}^+ e^{-k_{nx}x_j} \cos k_{ny}y \quad (7)$$

$$\langle e_j \rangle^- = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj}^- e^{k_{nx}x_j} \cos k_{ny}y \quad (8)$$

첨자 + 와 - 는 +x 와 -x 방향으로의 에너지 전달을

의미한다. 이러한 관계들을 이용하면, 인텐시티의 일반 해도 식(2)로부터 다음과 같이 표시된다.

$$\langle q_j \rangle_x = \langle q_j \rangle_x^+ - \langle q_j \rangle_x^- \quad (9)$$

$$\langle q_j \rangle_y = \langle q_j \rangle_y^+ - \langle q_j \rangle_y^- \quad (10)$$

여기서

$$\langle q_j \rangle_x^+ = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj}^+ k_{nx} e^{-k_{nx}x_j} \cos k_{ny}y \quad (11)$$

$$\langle q_j \rangle_x^- = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj}^- k_{nx} e^{k_{nx}x_j} \cos k_{ny}y \quad (12)$$

$$\langle q_j \rangle_y^+ = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj}^+ k_{ny} e^{-k_{nx}x_j} \sin k_{ny}y \quad (13)$$

$$\langle q_j \rangle_y^- = -\frac{c_g^2}{\eta\omega} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nj}^- k_{ny} e^{-k_{nx}x_j} \sin k_{ny}y \quad (14)$$

점가진력에 의한 입력 파워도 에너지 밀도와 마찬가지로 y 의 cosine 급수로 전개되어야한다. 지점 (x_o, y_o) 에 작용하는 점가진력에 의한 파워의 시간 평균값은 다음과 같이 표시된다.

$$\langle \Pi_{in} \rangle \delta(x-x_o) \delta(y-y_o) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(x) \cos k_{ny}y \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Pi_n(x) &= \frac{\Pi_n}{L_y} \delta(x-x_o) & (n=0) \\ &= 2 \frac{\Pi_n}{L_y} \cos k_{ny}y_o \delta(x-x_o) & (n \neq 0) \end{aligned} \quad (16)$$

입력 파워의 시간 평균값은 가진 지점의 임피던스 Z_m 를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Pi_m = \frac{1}{2} |F|^2 \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z_m} \right\} \quad (17)$$

그리고 중고주파수 영역을 고려하는 경우, 무한 평판에 대한 임피던스 값을 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$Z = 8\sqrt{B\rho h} \quad (18)$$

여기서 $B = k^3/[12(1-\nu^2)]$, h 와 ν 는 평판의 두께와 Poisson비를 나타낸다.

진동에너지 밀도와 인텐시티의 해를 구하기 위해서는, 두 영역을 고려하면 n 번째 성분에 대하여 총 4개의 미지수 A_{nj}^+, A_{nj}^- ($j=1,2$)를 결정하여야 한다. 이들 미지수들은 다음과 같은 경계 조건들을 이용하여 결정할 수 있다. 먼저 y 축에 평행한 모서리 $x=0$ 와 $x=L_x$ 에서 외부로부터 입력되는 파워가 없다는 조건으로부터 다음의 2 관계식들을 얻는다.

$$\langle q_1(0, y) \rangle \geq 0, \quad \langle q_2(L_x, y) \rangle = 0 \quad (19)$$

또한 파워가 입력되는 위치, 즉 영역 ①과 ②의 경계선 $x=x_o$ 에서는 에너지 밀도의 연속성과 파워의 평형 조건을 다음과 같이 만족하여야 한다. 이로부터 다음과 같은

$$\langle e_1 \rangle = \langle e_2 \rangle$$

$$\langle q_2 \rangle = \langle q_1 \rangle + \langle \Pi_{in} \rangle \delta(y-y_o) \quad (20)$$

2 관계식을 얻는다. 그러므로 식(19)과 (20)의 조건들을 이용하여 에너지 밀도의 n 번째 성분이 포함하고 있는 4개의 미지수들을 결정할 수 있다. 또한 이들을 이용하여 각 영역에서의 시간 및 공간에 대한 에너지 밀도와 인텐시티를 구할 수 있다.

4. 실험 및 실험 해석

실험 모델은 그림 2와 같이 자유 지지된 평판으로 면외진동을 고려한다. 평판의 모드 특성은 모드밀도 n 을 측정함으로써 알 수 있으며, 이를 위하여 다음과 같은 관계를 이용할 수 있다 [8].

$$n(f_c) = \frac{1}{f_2 - f_1} \int_{f_1}^{f_2} 4m A \operatorname{Re}(Y) df \quad (21)$$

여기서 m, A, Y 는 단위 면적당 질량, 면적 및 입력지점의 모빌리티를 각각 나타낸다. 그리고 f_c 는 주파수 대역 $f_1 \leq f \leq f_2$ 의 중심주파수를 나타낸다. 그러므로 입력지점의 모빌리티를 측정함으로써 모드밀도를 구할 수 있다. 그러므로 해당 주파수 대역에 대한 모드 수는 다음과 같이 구하여진다.

$$N(f_c) = \int_{f_1}^{f_2} n(f) df \quad (22)$$

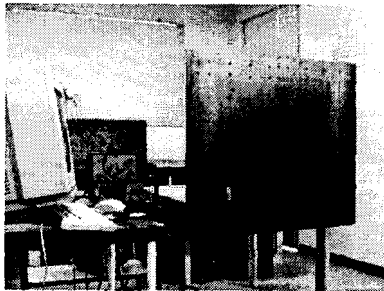


그림 2. 자유지지된 평판의 진동 측정 실험 배열

평판의 손실계수를 측정하기 위하여 다음과 같이 파워주입법(power injection method)을 이용할 수 있다[8].

$$\eta(f_c) = \frac{1}{f_2 - f_1} \int_{f_1}^{f_2} \frac{\langle \Pi_{in} \rangle 2\pi f}{\langle \bar{a}^2 \rangle mA} df \quad (23)$$

여기서 $\langle \Pi_{in} \rangle$, $\langle \bar{a}^2 \rangle$ 는 입력파워와 가속도의 시간에 대한 평균값 및 공간 평균값을 나타낸다. 그러므로 이 둘 값을 측정함으로써 손실계수를 구할 수 있다. 파워흐름해석법에서는 실험에 의한 손실계수 값들을 식(1)의 입력 데이터로써 이용하게 된다.

본 논문의 모드밀도와 모드 수를 구하기 위한 실험에서 가진 조건으로 충격해머를 이용하였다. 가진 지점으로 3지점을 선정하여 가진 지점에 대한 모빌리티를 구한 후, 식(21), (22)에 의하여 모드밀도와 모드 수를 구한 후 평균값을 취하였다.

손실계수를 구하기 위한 실험으로서는 3 가진 지점을 선정하고 입력 파워를 측정하고, 각 가진지점을 가진 하면서 34 지점에서 가속도를 측정하였다. 각 가진 지점을 고려하여 식(23)에 의하여 손실계수를 구하였으며, 3 손실계수 값에 대한 평균값을 취하였다. 이 경우에도 가진 조건으로 충격해머를 이용하였고, 가역성의 원리를 이용하여 가진 지점에 가속도계를 부착시키고, 충격해머를 이용하여 34 지점을 차례로 가진시키면서 주파수응답함수 값을 측정하였다. 그러므로 단위 가진력에 대한 입력 파워 및 가속도 값으로 고려한 경우에 해당한다.

5. 결과 및 고찰

그림 3은 1/3 옥타브 주파수 대역에 대한 모드 수를 보여준다. 실험 결과가 이론 예측 결과에 비교적 잘 일치하는 결과를 나타내주고 있다. 그리고 중심주파수 300 Hz를 갖는 대역에

이러야 모두 수 5-6개 정도의 모드 수를 갖게 됨을 알 수 있다.

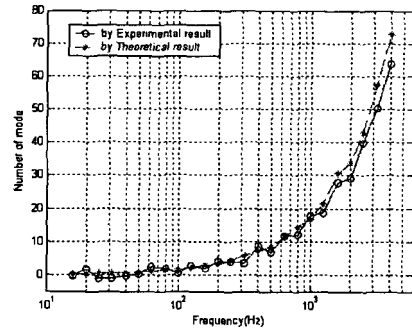


그림 3. 1/3 옥타브 주파수 대역에 대한 평판의 모드 수

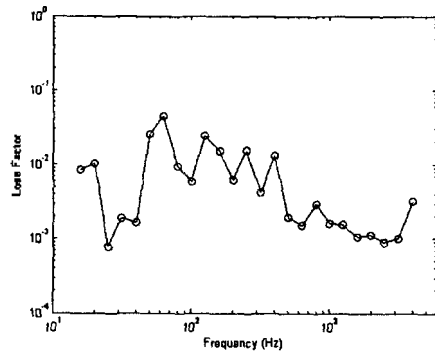


그림 4. 1/3 옥타브 주파수 대역에 대한 평판의 손실계수

그림 4는 평판의 주파수에 따른 손실계수 측정값을 보여 준다. 손실계수의 일반적인 경향은 1 kHz 이 후 주파수 증가에 따라 감소하다가 4kHz에서 증가하고 있음을 알 수 있다. 그러나 본 실험에서는 최대 주파수 5 kHz까지 고려하였으므로, 보다 정확한 경향에 대한 분석은 은 더 높은 주파수 범위까지의 실험 데이터를 필요로 한다.

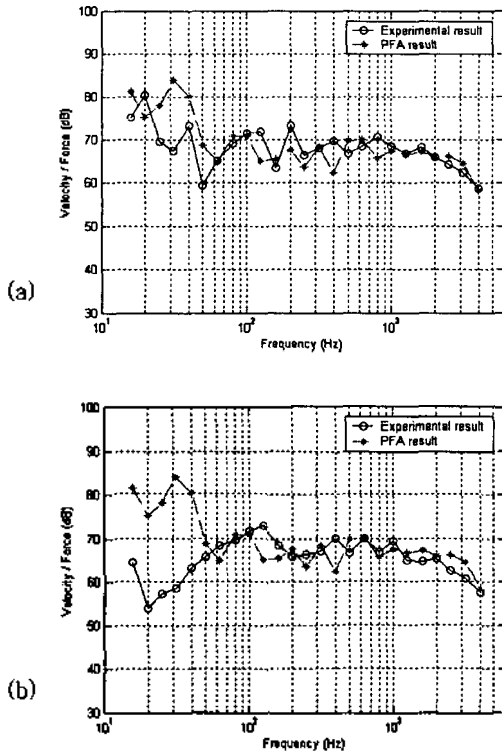
그림 5와 6은 3 가진 지점을 각각 가진하면서 서로 다른 두 지점(No. 1과 No. 2 지점)에서의 속도 값을 보여 주고 있다. 이 경우 단위 가진력을 고려하였으므로 속도 값은 해당 지점에서의 주파수 응답함수를 나타낸다. 실험 결과와 파워흐름 해석 결과를 비교하여 보면, 약 500 Hz 이상부터는 파워흐름 해석 결과가 실험 결과를 잘 예측하고 있음을 알 수가 있다. 또한 약 100 Hz까지도 주파수 의존도를 비교적 잘 예측하고 있음을 알 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 실험에 의한 결과와 파워흐름해석해와의 비교를 통하여, 파워흐름해석법의 신뢰성을 검증하고자 하였다. 실험에서는 자유 지지되어 진동하는 평판의 손실계수를 측정하여, 파워흐름해석법의 입력 데이터를 활용하였다. 그리고 평판의 여러 지점에 대한 주파수 응답함수(FRA, Frequency Response Function)를 측정하고 파워흐름해석 해와 비교를 하였다. 이러한 비교를 통하여, 파워흐름해석법이 중고주파수 대역의 구조 진동을 해석하기 위하여 효과적으로 활용될 수 있음을 보였다.

참고 문헌

- (1) O.C. Zienkiewicz, 1977, The Finite Element Method, 3rd ed. McGraw-Hill, London.
- (2) S.A. Hambric, "Power Flow", (2) R.H. Lyon, Statistical Analysis of Dynamic Systems: Theory and Applications, MIT Press, 1975.
- (3) V.D. Belov, S.A. Rybak, B.D. Tartakovskii, "Propagation of Vibrational Energy in Absorbing Structures," J. Soviet Physics Acoustics, 23(2), pp. 115-119, 1977.
- (4) D.J. Nefske, S.H. Sung, "Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams," J. Vib. Acoustics, Stress and Reliability in Design, 111, pp.94-100, 1989.
- (5) P.E. Cho and R.J. Bernhard, "A Simple Method for predicting Energy Flow Distributions in Frame Structures," 4th International Congress on Intensity Techniques, pp.347-354, 1993.
- (6) O.M. Bouthier, R.J. Bernhard, "Models of Space-Averaged Energetics of Plates," AIAA J., 30(3), pp.616-623, 1992.
- (7) S.S. Seo, S.Y. Hong, Y.H. park, H.G. Kil, "Vibration Analysis of Vehicle Systems in Medium to High Frequency Ranges Using a Newly Developed PPFEM Software," Inter-Noise 2002
- (8) B.L. Clarkson, R.J. Pope, " Experimental Determination of Modal Densities and Loss factors of Flat Plates and Cylinders," J. Sound Vibration, 77(4), pp. 535-549, 1981.



(c)

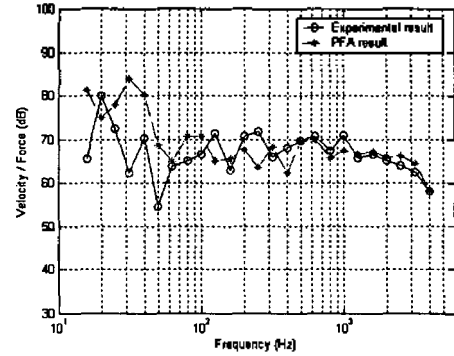
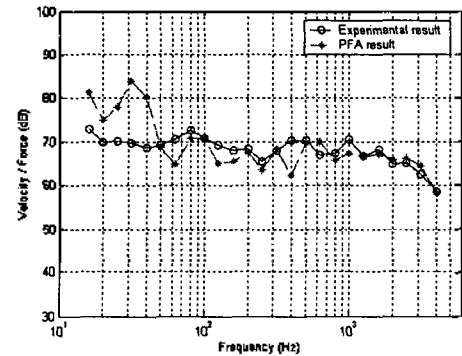
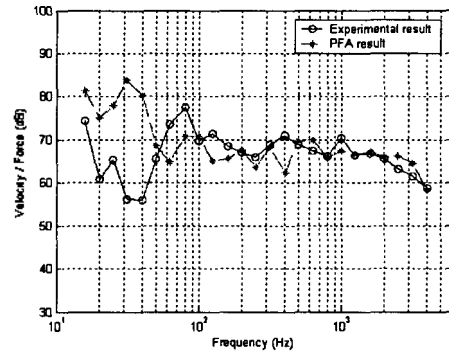


그림 5. 3가지 지점에 대하여 각각 가진 하는 경우 측정 지점 (No. 1)에서의 속도 비교

(a)



(b)



(c)

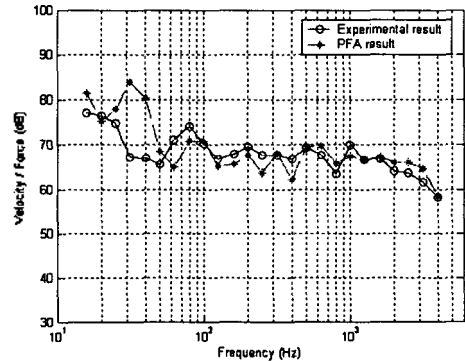


그림 6. 3가지 지점에 대하여 각각 가진 하는 경우 측정 지점 (No. 2)에서의 속도 비교