

# 연속계 Deadbeat제어를 적용한 도립전자 제어

(Control of Inverted Pendulum Using Continuous Time Deadbeat Control)

김진용\*, 김성열, 이금원

(Jin-Yong Kim · Seung-Youal Kim · Keum-Won Lee)

(관동대학교 IT공학부(E.mail : kwlee@kwandong.ac.kr))

## Abstract

Due to the asymptotic property, deadbeat control can hardly applied to the continuous time system control. But some delay element method can deal such a problem. Except delay element method, well-known digital deadbeat control can be used with the aid of som smoothing elements..

In this paper, 2nd order smoothing element is used for the smoothing of the digital deadbeat controller. And this element is argumented to the plant, and so control problem is to control digitally the argumented system. We simulated this control system using Matlab language and finally apply this algorithm to the rotary inverted pendulum system.

**Keywords:** Continuous-time Deadbeat Controller, Smoothing elements, Inverted Pendulum, Pole Placement, .

## 1. 서 론

디지털시스템에 일반적으로 잘 알려져 있는 deadbeat제어기는 연속계에서는 점근성 때문에 적용하기가 어렵고 따라서 만일 연속계에 적용을 하려면 지연지연요소 등 특별한 개념을 사용하여 해결방법을 찾아야 한다.[1]-[2]

이런 지연요소를 이용하는 방법외에도 디지털 deadbeat제어를 사용할 수도 있는데 즉 우선 설계가 용이한 디지털 형태의 제어기를 만들고 제어기 출력단에 저차의 평활요소를 두면 아날로그 유한정제어 효과를 나타낼 수 있다. 이 평활요소는 제어기의 출력단도 되지만 플랜트의 입력단도 되기 때문에 플랜트의 입력단으로 볼 경우 확대계라고 할 수 있으며 이 확대계에 대한 연속계 deadbeat 제어장치를 설계하고, S/W적인 계산에 따라 얻은 이산치 조작량을 평활하여 만든 연속조작량을 제어대상에 부가한다면, 샘플치계와 융합으로 연속시간 deadbeat제어기 용이하게 실현된다.[3]-[9]

본 논문에는 상태기환 루프에 디지털 형태로 보상기를 구성한 디지털 deadbeat제어기의 설계법을 연구한다. 특히, 디지털 형태의 조작량에 ZOH를 인가하고 이의 출력이 평활요소로 사용된 2차 평활요소에 입력된다. 대상 플랜트로는 4차의 로터리형의 도립진

자를 사용하였으며, 4차의 극중에서 우반면에 존재하는 극은 극배치법을 이용하여 좌반면에 위치시켰다 [10]. 이때의 새로 만든 플랜트와 2차 평활요소를 확대계라 정의한다. 디지털 deadbeat제어기는 펄스열전달함수를 사용하여 제어기로 구성한다. 제어기는 MATLAB언어로 시뮬레이션 하였으며 DC모터를 사용하여 도립진자를 대상으로 실험한다.

## 2. 본 론

### 2.1. 연속 시간 파라미터

연속계 deadbeat 제어량을 얻기 위해서는 여러 가지 방법이 연구되고 있는데, 예를 들면 다항식접근법이 있지만 본 연구에서는 제어분야에서 잘 알려져 있는 표준형의 2차 지연요소를 평활요소로 사용한다.[3][5][6]

$$G_f(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (1)$$

여기서  $\zeta$ 는 감쇄인자이고,  $w_n$ 은 고유주파수이다.

### 2.2. 문제의 설정

그림 1의 제어시스템 블록도에서 연속계 deadbeat

제어기를 설계하기 위해 상태 귀환 루프중에  $D_F(z)$ 을 도입하고,  $D_f(z)$ 는 직렬 보상기로 확대계  $G(s) = G_c(s)G'(s)$ 에 대한 스텝상 목표치  $r$ 로 한 1형의 디지털 deadbeat 제어기 형태를 만든다.  $f$ 는 귀환요소에 대한 이득에 해당된다.

디지털 제어입력  $\bar{u}_i$ 는 최적의 의미를 갖고 있는데,  $Q, R$ 을 정정대칭인  $(N+1) \times (N+1)$  하중행렬로 한 경우, 편차와 조작량에 관한 최소화할 2차 평가함수는

$$P = \frac{1}{2} (e^T Q e + u_k^T R u_k) \quad (2)$$

식(2)를 최소화하는 조작량에 해당된다.

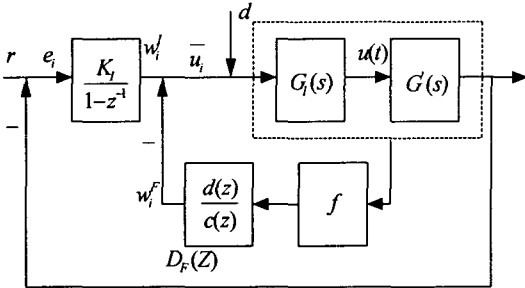


그림 1. 연속계 deadbeat 제어 시스템의 블록도.

이에 따라 구한  $\bar{u}_i$ 에 대해  $y = G\bar{u}_i$ 가 출력이 되며 따라서 이를 폐루프의 요구응답으로 하고, 이 최적  $\bar{u}_i$ 값이 나오도록 귀환루프상에 있는 귀환 보상기  $D_F(z)$ 와 전향경로상에 있는 적분 보상기  $D_f(z)$ 를 구한다.

### 3. 연속계 deadbeat 제어기의 설계

#### 3.1. 제어기 유도

디지털 deadbeat 제어기의 유한정정되기 직전까지의 제어단수를  $N$ , 플랜트의 차수를  $n$ , 2차평활요소로 2차로 하고, 추가자유도를  $k$ 로 한다.

일반적으로 작은  $N$ 의 경우는 큰 값의 제어량이 계산되어 나오는 경향이 있기 때문에 설계자가 취사선택을 해야 한다.

따라서  $N = n + 2 + k (k \geq 0)$ ,  $u_i (i = 0 \sim N-1)$ 의 조작량으로 출력응답  $y_i (i \geq 1)$ 이,  $N$ 단 이후 스텝상 목

표치에 유한정정된다는 것은  $y_i = 1.0 (i \geq N)$ ,  $u_{N+a} = u_N (a \geq 1)$ 가 된다는 의미이다. 따라서 이 조건을 사용하여 입출력에 관해 식을 세우면 다음과 같다.

$$i = J_k u_k \quad (3)$$

단,  $u_k = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_N]^T$

$$J_k = \begin{bmatrix} g_N & g_{N-1} & \dots & g_{n+3} & g_{n+2} & \dots & g_1 & 0 \\ g_{N+1} & g_N & \dots & g_{n+4} & g_{n+3} & \dots & g_2 & h_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ g_{N+n+2} & g_{N+n+1} & \dots & g_{2n+5} & g_{2n+4} & \dots & g_{n+3} & h_{n+2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

← k → (n+3) →

한편,  $y_i (i = N \sim N+n+2)$ 에 대해서는 유한정정을 하여야하므로

$$i = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \quad (5)$$

여기서  $g_i$ 는 임펄스응답열이며,  $g_i = h_i - h_{i-1}$ 로서  $h_i$ 는 계단응답열이다. 최단시간 연속계 deadbeat제어 ( $k=0$ )의 경우 식(4)와  $(n+3) \times (n+3)$ 행렬과 식(5)로부터

$$u_0 = J_0^{-1} i = [u_0 \ u_1 \ \dots \ u_{n+2}]^T \quad (6)$$

여기서  $k \geq 1$ 의 경우는 (4)로부터  $\text{rank } J_k \neq n+3$  이여서  $u_k$ 는 유일하게 결정되지 않기 때문에, (5)식으로부터  $i - J_k u_k = 0$ 의 구속조건을 사용하여 Lagrange미정계수법을 이용하여 해를 구한다.

$$u_k = M^{-1} [G^T Q i_r - J_k^T [J_k M^{-1} J_k^T]^{-1} [J_k M^{-1} G^T Q i_r - i]] = [\bar{u}_0 \ \bar{u}_1 \ \dots \ \bar{u}_N]^T \quad (7)$$

단,  $M = [R + G^T Q G]$ ,  $i_r = [1 \ \dots \ 1]^T$

#### 3.2. 제어기 설계

제어기를 그림 1의 블록도에서 스텝상 목표치로  $r$ 를 선택하고, 전체적으로는 1형의 디지털 최적 연속계 deadbeat 제어기를 설계한다.

보상기  $D_F(z)$ 와 귀환이득  $f_i (i = 1 \sim (n+2))$ 는

$$\begin{aligned}
D_F(z) &= \frac{d(z)}{c(z)} \\
d(z) &= d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{N-1} z^{-(N-1)} \\
c(z) &= 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{N-1} z^{-(N-1)} \\
f(z) &= f_1 z^{-1} + \dots + d_{n+2} z^{-(n+2)} \quad (8)
\end{aligned}$$

와 같이 둘 수 있으며, 그림 1에서  $i=0$ 이면, 보상기의 초기치가 '0'이 된다. 여기서  $w_0' = \bar{u}_0$ 가 되므로, 적분기  $D_I(z)$ 의 이득  $K_I = \bar{u}_0$ 와 같이 둘 수 있으며, 스텝입력에 대한 폐루프계의 응답

$$\bar{y}(z) = \bar{u}_0(z) c(z) / (1 - z^{-1}) \quad (9)$$

이며, 여기서 분모에 나타나는 항 중에서

$$\begin{aligned}
R(z) &= \\
(1 - z^{-1}) \{1 + \bar{a}(z) + d(z)f(z)\} + \bar{u}_0 \bar{b}(z) &= 1 \quad (10)
\end{aligned}$$

라고 두면 이 조건이 deadbeat 조건이 된다. 폐루프계의 출력  $\bar{y}_i$ 가  $N = n + l + k$ 단에서 유한정정된다면,  $G_y(z)$ 의 전체의 극과 영점에 배치된다면 좋기 때문에  $R(z) = 1$ 이 성립. 따라서 폐루프계의 단위 스텝응답이  $\bar{y}(z) = \bar{u}_0 \bar{b}(z) \lambda(z) / (1 - z^{-1})$ 로 표시되고, (9)식의  $\bar{y}(z)$ 와 일치.  $\bar{b}(z) = b(z) \lambda(z)$ 가 되기 때문에,  $D_c(z)$ 의 분자  $\lambda(z)$ 와  $G(z)$ 에 따른  $\lambda(z)$ 는 같게 된다.  $\lambda(z)$ 가 정해지면  $f(z), C(z)$ 의 파라미터  $f_i (i=1 \sim n+l), c_j (j=1 \sim k)$ 는 (10)식을 풀어 얻는다 [7]. 예를들면,  $n=2, N=5$  경우 식(10)의  $z^{-1}$ 의 멱승의 계수에 대한 방정식을 세우면

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_1 - 1) + d_0 f_1 + \bar{u}_0 \bar{b}_1 &= 0 \\
(\bar{a}_2 - \bar{a}_1) + (d_0 f_2 + d_1 f_1 - d_0 f_1) + \bar{u}_0 \bar{b}_2 &= 0 \\
(\bar{a}_3 - \bar{a}_2) + (d_0 f_3 + d_1 f_2 + d_2 f_1 - d_0 f_3 - d_1 f_2 \\
- d_2 f_1) + \bar{u}_0 \bar{b}_3 &= 0 \\
(\bar{a}_4 - \bar{a}_3) + (d_0 f_4 + d_1 f_3 + d_2 f_2 + d_3 f_1 - d_0 f_3 - d_1 f_2 \\
- d_2 f_1) + \bar{u}_0 \bar{b}_4 &= 0 \\
(\bar{a}_5 - \bar{a}_4) + (d_1 f_4 + d_2 f_3 + d_3 f_2 + d_4 f_1 - d_0 f_4 - d_1 f_3 \\
- d_2 f_2 - d_3 f_1) + \bar{u}_0 \bar{b}_5 &= 0 \\
-\bar{a}_5 + (d_2 f_4 + d_3 f_3 + d_4 f_2 - d_1 f_4 - d_2 f_3 - d_3 f_2 - d_4 f_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_3 f_4 + d_4 f_3 - d_2 f_4 - d_3 f_3 - d_4 f_2 &= 0 \\
d_4 f_4 - d_3 f_4 - d_4 f_3 &= 0 \\
- d_4 f_4 &= 0 \quad (11)
\end{aligned}$$

가 된다.  $f_2, f_3, f_4 = 0, d_i \neq 0$ 이기 때문에

$$\begin{aligned}
D_F(z) &= \\
\frac{(w_1^F z^{-1} + \dots + w_{N-1}^F z^{-(N-1)} + w_N^F z^{-N}) / (1 - z^{-1})}{(v_1 z^{-1} + \dots + v_{N-1} z^{-(N-1)} + v_N z^{-N}) / (1 - z^{-1})} & \quad (12)
\end{aligned}$$

와 같이 표시한다

#### 4. 회전형 도립전자 시스템의 모델링

Roraty Inverted Pendulum의 구성은 그림 2와 같다. 팬들럼의 각도와 위치 측정은 각각 1024(Pulse)와 2000(Pulse)의 분해능을 가진 엔코더를 사용하였다.

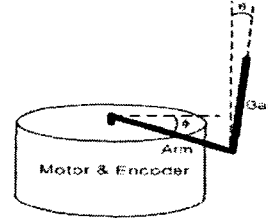


그림 2. 회전형 도립전자

팬들럼의 모델은 다음과 같이 에너지법칙으로 단순화하여 나타낸다.[11]

$$PE_{total} = m_b g \frac{l}{2} \cos \theta \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
KE_{total} &= \\
\frac{1}{2} [J_t \dot{\phi}^2 + m_b l r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + (J_b + J_{ex}) \dot{\theta}^2] & \quad (14)
\end{aligned}$$

여기에서  $J_t = J_{Arm} + m_b r^2 + J_m + J_{ex}$  이고, 위의 단순화되어진 식을 Lagrangian 공식을 이용하여 다음과 같이 시스템의 미분방정식을 얻을 수 있다.[11]

$$T = J_t \dot{\phi} - \frac{1}{2} m_b l r (\dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \sin \theta) \quad (15)$$

$$0 = \frac{1}{2} m_b l r \dot{\phi} \cos \theta - m_b g \frac{l}{2} \sin \theta + (J_b + J_{ex}) \dot{\theta} \quad (16)$$

## 5. 시뮬레이션 및 실험결과 고찰

도립진자를 원천적으로 불안정하여 극배치 알고리즘을 사용하여 극을 재배치 하였으며 따라서 결과의 확장된 시스템을 플랜트로 하면 전체적인 확대계는

$$G(s) = \frac{w_n^2(-8.053s^2)}{(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)(s^4 + 24s^3 + 196s^2 + 720s + 1600)} \quad (17)$$

이다. 그림 3은 이를 사용하여 초기조건 [0 0.01 0 0]으로 움직이는 도립진자를 대상으로 6단에 정정하기 위한 제어입력 최적  $u_k$ 는 구하면 다음과 같다.

$$u_1 = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^T = [-11.1328 \ -6.51563.0000 \ 12.1094 \ -5.8516 \ 1.0889 \ 0.2227]^T \quad (18)$$

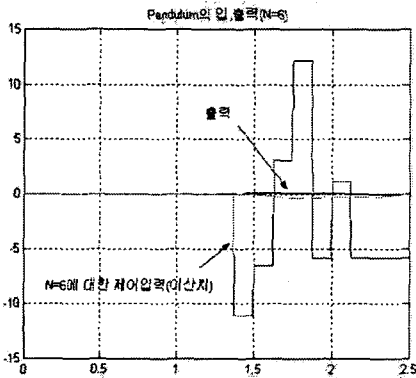


그림 3. Pendulum의 입력 및 출력(N=6)

## 6. 결 론

제어대상으로 도립진자를 선택하고 입력단에 전치한 평활요소를 2차 지연요소로 하는 연속계 deadbeat 제어기 설계법에 관한 연구를 하였다. 제어기로는 상태귀환루프 및 전향경로상에 보상기를 도입했다. 특히 도립진자는 우반면에 불안정한 극을 2개 갖는데, 극배치를 통하여 좌반면으로 재배치한 후 이를 확대계로 적용하였다. 컴퓨터시뮬레이션을 통하여 디지털 유한정정제어에서 2차 지연요소의 결과가 급격한 곡선의 변화가 없는 양호한 연속조작량을 얻는 것을

보였다. 특히 외란이 존재하는 경우에 대해 전체 단수에 따라 정정됨을 보였다.

따라서 종래의 디지털 제어장치의 설계법을 이용하고 아날로그 지연요소를 사용하여 생기는 회로의 복잡성도 피할 수 있으며 실제의 도립진자를 플랜트로 하여 적용함에 있어 연속계 deadbeat제어의 실용성이 증명되었다. 현재 연속계 deadbeat제어를 도립진자 실험이 진행중이며, 이때 생기는 파라메타의 변동에 대한 건실성 해석이 필요하다.

## 참 고 문 헌

- [1] 黒澤, "ウンティニュアスデッドビートル," 電氣學會論文誌D, 111卷, 4号, pp.289-295, 1991.
- [2] 連山·新·北森, "連續時間における有限整定サーボ系の設計," 計測自動制御學會論文集, 28卷, 10号, pp.1201-1208, 1992.
- [3] 村田·原田, "ウンティニュアス 最適有限整定制御系の一設計法," 電氣學會論文誌C, 117卷, 8号, pp. 1107-1112, 1997.
- [4] 曾根·村田, "最適有限整定サーボ系レギュレータの一設計法," 電氣學會論文誌C, 117卷, 2号, pp.117-127, 1997.
- [5] E. Nobuyama et. al., "Design of Continuous Deadbeat Tracking Systems," T-SICE, Vol.28, No.10, pp1201-1208, 1992.
- [6] 村田·相良·和田, "直列フィードバック補償による有限整定制御装置の設計," 計測自動制御學會論文集, 20卷, 10号, pp873-879, 1984.
- [7] 村田·相良, "状態フィードバックによる最適有限整定制御系の設計," 電氣學會論文誌C, 109卷, 6号, pp.432 - 438, 1996.
- [8] 大林·若宮·村田, "2次遅延平滑要素を用いたウンティニュアス最適有限整定制御系の設計," 電氣學會論文誌C, 118卷, 5号, pp765-772, 1998.
- [9] Miyahara et al., "Digital deadbeat control of motor," Nat. Conf. I.E.E., Japan, No. 601, 1981.
- [10] Furuta, K., Kajiwara, H. and Kosuge, K., "Digital Control of a Double Inverted Pendulum on an Inclined Rail," Int. J.Control, Vol.32, No.5, pp. 907-924, 1980
- [11] Astrom, K.J. and K. Furuta. "Swinging Up A pendulum By Energy Control." IFAC 13th. World Congress, San Francisco, California. 1996.