선형 스위칭 시스템의 안정화

Stabilization of Switched Linear Systems

염 동 회*, 임 기 홍*, 최 진 영**
(Yeom Dong-Hae, Im Ki-Hong, and Choi Jin-Young)

Abstract - In this paper, we propose a novel stability criterion and a guideline of controller design for switched linear systems. Unlike existing criterions such as Lie algebraic method and multiple Lyapunov functions method, the proposed criterion can be applied to each individual system without considering an overall system. By applying the proposed criterion to each individual system separately, a state feedback controller can be easily designed. Stability of the overall system is proved by developing a rule to determine non-increasing Lyapunov functions recursively at each switching instant. An illustrative example is given.

Key Words : Switched linear systems, Stability criterions, State feedback control, Non-increasing Lyapunov functions.

1. 서 론

선형 스위칭 시스템이란 스위칭 신호에 따라 서로 다른 선형시스템으로 전환되는 시스템을 의미한다. 일반적으로 각 선형시스템의 안정성이 전체 시스템의 안정성을 보장하지는 못한다. 즉, 각각의 선형시스템이 안정하더라도 스위칭 신호에 따라 전체 시스템은 불안정해질 수 있다 [6]. 시스템제어 관점에서 특정한 스위칭 신호에 한해 시스템이 안정하다는 것은 상당한 제약조건이다. 따라서, 임의의 스위칭 신호에 대해 선형 스위칭 시스템의 점근안정성을 보이는 문제는 최근 들어 많은 관심을 끌고 있다 [1, 2, 5, 6, 7]. 이러한 시스템의 안정성을 판별하는 몇가지 방법이 알려져 있는데, 리대수(Lie Algebra)를 이용한 방법 [1, 2, 6] 과 다중 리아푸노프 함수 (Multiple Lyaopunv Functions)를 이용한 방법 [5] 등이 대표적이다. 그러나, 리대수를 이용한 방법은 각 개별 시스템의 모든 조합에 대해 조건을 검사해야한다는 번거로움이 있으며, 다중 리아푸노프 함수를 이용한 방법은 각 리아푸노프 함수를 구성하는 양의 행렬을 구하는 체계적인 방법이 주어져 있지 않다. 그리고 두 방법 모두 시스템의 안정을 판별하는 방법만 제시하고 있으며, 제어기 설계에 관한 구체적인 지침이나 언급이 없다. 본 논문에서는 기존의 방법과는 달리 전체 시스템의 점근안정성을 보장하는 , 개별 선형시스템에 적용할 수 있는 새로운 판별법과 선형 상태 궤환 이득을 설계하는 방법을 제시한다.

다음과 같은 선형 스위칭 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = A_\sigma x$$

여기서 $x \in R^n$, $n \times n$ 행렬 $A_i : i \in P$ 들은 엄격히 안정한 행렬들이며, $\sigma : [0, \infty) \to P = 1, 2, \cdots, p$ 는 구분적으로 상수인 스위칭 신호이다. 임의의 스위칭 신호 σ 에 대해, A_i 들로 구성된 리대수 $\{A_i\}_{LA}$가 Abelian이거나 Nilpotent이거나 또는 Solvable이면 주어진 시스템은 지수적으로 안정하다. 예를 들어, 주어진 리대수가 Abelian이기 위해서는 $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i = 0, i \neq j$ 이어야 한다 [2]. 즉, 각각의 시스템 행렬에 대해 교환법칙이 성립해야 한다. 따라서 리대수를 이용해 선형 스위칭 시스템의 안정성을 판별하려면 개별 시스템 행렬의 모든 조합에 대해 위 조건을 검사해야 한다. 한편, 다중 리아푸노프 함수를 이용해 선형 스위칭 시스템의 안정성을 검사하려면, 다음 조건을 만족하는 양의 행렬 M_σ들이 존재해야 한다.

$$A'_\sigma M_\sigma + M_\sigma A_\sigma < C'_\sigma C_\sigma,$$
$$z' M_i z \geq z' M_j z,$$

여기서 모든 (C_σ, A_σ)쌍들은 가관측적이며, z 는 $\sigma = i \to j$ 인 스위칭 순간에 대응하는 상태변수이다 [5]. 그러나 이 방법에서 제시한 두 조건은 서로 독립적인 것으로 첫 번째 조건을 만족하는 양의 행렬들에 대해 두 번째 조건을 만족하는 지 검사해야 하고, 만약 만족치 않으면 새로운 양의 행렬들을 구해야 한다. 즉, M_σ의 존재성을 보이는 체계적인 방법이 주어져 있지 않다.

본 논문에서는 매 스위칭 순간에서 비-증가 리아푸노프 함수를 반복적으로 생성하는 방법을 통해, 개별 선형시스템에 대한 조사만으로 전체 시스템의 안정성을 검사할 수 있는 새

저자 소개
* 正 會 員 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 박사과정
** 正 會 員 : 서울대학교 전기컴퓨터공학부 부교수

로운 판별법을 제시한다. 제안하는 방법은 다중 리아푸노프 함수를 이용한 방법과 개념적으로 유사하지만, 각 구간에서 정의되는 리아푸노프 함수를 명시적으로 구할 수 있으며, 가관측성에 대한 제약조건도 필요치 않다. 또한, 전체 시스템을 안정화시키는, 각 개별 선형시스템의 상태 궤환 이득을 설계하는 지침을 제공한다. 그리고 제안된 방법을 통해 이미 안정화된 선형 스위칭 시스템은 부가적인 불확실성에 대해 강인성을 가짐을 보일 수 있다.

2. 안정성 판별법

본 장에서는 선형 스위칭 시스템의 안정성을 판별하는 새로운 방법을 제안한다. 제안하는 방법은 개별 선형시스템에 대한 조건으로부터 전체 시스템의 안정성을 보장하는 다중 리아푸노프 함수의 존재성을 보인다.

정리 2.1. 아래의 조건을 만족하는 상태궤환이득 F_o가 각각의 시스템에 대해서 존재하면, 전체 선형 스위칭 시스템 $\dot{x}=A_o x+B_o u,\ u=F_o x$ 은 점근적으로 안정하다.

a) 대칭행렬 $(G_o'+G_o)$의 모든 고유값이 -1 보다 작고,

b) G_o의 모든 고유값의 실수부가 -1/2 보다 작다.

여기서, $G_o=A_o+B_oF_o$ 이다.

증명은 지면 사정상 생략한다. 다만, Man의 정리 [3, 9]로부터 리아푸노프 함수를 반복적으로 생성하고 이렇게 생성된 리아푸노프 함수들이 매 스위칭 순간마다 증가함수가 아니면 시스템의 점근안정성을 보장한다는 Pettersson의 정리 [10]를 이용하여 증명할 수 있다.

위 정리는 전체 스위칭 시스템의 점근안정성을 보장하는 개별 시스템의 조건을 제시하고 있을 뿐 아니라, 각 시스템의 상태 궤환 이득을 설계하는 지침도 제공한다.

3. 상태 궤환 이득

본 장에서는 정리 2.1 의 조건을 만족하도록, 개별 선형시스템의 상태 궤환 이득을 설계하는 방법을 소개한다. 일반적으로 두 행렬의 합의 고유값은 명시적으로 주어지지 않으며, 다만 주어진 행렬의 고유값을 기준으로 하는 어떤 범위만 알려져 있다. 여기서는 두 행렬이 서로 전치행렬이며 따라서 각 행렬의 고유값이 동일한 경우를 다룬다.

정리 3.1. P가 G를 대각화한다고 가정하면, $G+G'$의 고유값 ξ는 다음의 원반 중 적어도 하나에 포함된다.

$$\left\{ z : |z-(\lambda_i-\alpha)| \le \inf_{P,R} K(R'P)\max|\lambda_j+\alpha| \right\},\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

여기서, α는 임의의 상수이고 $R=P\mathcal{D}$ 이며, $K(\cdot)$는 주어진 행렬의 컨디션넘버, $\mathcal{D}$는 임의의 정칙인 대각행렬이다.

위 정리를 이용하면, 정리 2.1의 조건과 각 선형시스템의 폐루프 시스템 행렬 G의 고유값의 범위 사이의 관계를 아래의 정리와 같이 얻을 수 있다.

정리 3.2. 중심 c, 반경 l인 원반내에 고유값을 가지는 행렬 G에 대해서

$$c+l \leftarrow \frac{1}{2},$$

$$1+\inf_{P,R} K(R'P) < \frac{-2c-1}{l}$$

들은 각각 다음을 의미한다.

$$Re[\lambda_i(G)] \leftarrow \frac{1}{2},$$

$$\lambda_i(G+G') \leftarrow 1$$

여기서, c는 음의 상수이고 $G=PDP^{-1}=RDR^{-1}$, $R=P\mathcal{D}$이며, $\mathcal{D}$는 임의의 정칙인 대각행렬이다.

위 정리로부터 개별 선형시스템의 상태 궤환 이득을 다음의 과정을 통해 설계할 수 있다.

Step 1. 각 선형시스템의 고유값을 중심 c, 반경 l을 가지는 원반 위에 있도록 설정한다. 여기서 $c+l < -1/2$가 되도록 한다.

Step 2. 극점배치를 통해 위에서 설정한 고유값을 갖는 상태 궤환 이득을 구한다.

Step 3. 각 선형시스템의 폐루프 시스템에 대해 다음 식을 만족하는지 검사한다.

$$1+K(P) < \frac{-2c-1}{l},$$

여기서 $K(P)$는 $\inf K(R'P)$의 추정값이다.

Step 4. 위 조건이 만족하면 해당하는 선형시스템은 정리2.1의 조건들을 충족시킨다. 그렇지 않은 경우, Step 1로 돌아가 보다 작은 반경과 중심을 갖는 원반에 극점을 배치하고 위 과정들을 반복한다.

4. 강인성

본 장에서는 불확실성을 가지는 선형 스위칭 시스템에 대해 논의한다. 각 선형시스템의 시스템 행렬에 부가적인 불확실성이 인가된 경우, 이미 설계된 상태 궤환 이득에 대해 전체 시스템의 안정성이 유지되는 개별 선형시스템의 불확실성 범위를 명시적으로 구할 수 있다.

정리 4.1. 상태궤환이득 F_o 가 다음의 조건을 만족한다고 가정하자.

$$Re[\lambda_i(G_o)] < -\alpha_o$$

$$\lambda_i(G_o+G_o') < -\beta_o$$

여기서 $\alpha_o \ge 1/2$, $\beta_o \ge 1$ 이다. 이때, 모델 불확실성 ΔA_o가

$$\|\Delta A_o\|_2 < \min\left\{ \frac{\alpha_o-1/2}{\inf K(P_o)},\ \frac{\beta_o-1}{2} \right\}$$

와 같이 제한되면 불확실성을 포함하는 시스템 $\dot{x}=(A_o+\Delta A_o)x+B_o u$ 는 전역적으로 점근 안정성을 가진다. 여기서, P_o는 G_o를 대각화하는 행렬이다.

실제 각 선형시스템 행렬을 대각화하는 행렬의 컨디션 넘버의 임피멈은 구하기 어려우므로, 컨디션 넘버를 추정값으로 해도 논리적으로 문제가 되지 않는다. 다만, 이 경우 실제 강인성보다 좁은 범위가 주어진다.

5. 모의실험

본 장에서는 제안된 방법을 이용하여 선형 스위칭 시스템의 점근안정성을 보장하는 각 선형시스템의 상태 궤환 이득을 설계하는 간단한 예를 보인다. 다음과 같이 두 개의 부시스템으로 구성된 선형 스위칭 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u, \quad x\in\Omega_1=\{x|x_1x_2\geq 0\}$$
$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u, \quad x\in\Omega_2=\{x|x_1x_2< 0\}$$

준 시스템에 대해서 극점을 $\{-2.5\pm 0.5i\}$로 설정하면, 즉 $c=-2.5$, $l=0.5$ 이면 $K(P)=6.8541$이므로 Step 3의 관계식을 만족한다. 따라서 전체 시스템을 안정화시키는 개별 선형시스템의 상태궤환이득은 각각 다음과 같이 결정된다.

$$F_1=[-1 \quad -4.5], \quad F_2=[-4 \quad -5/3]$$

다음 그림은 제어된 스위칭시스템의 제어입력과 상태변수의 궤적을 보인다.

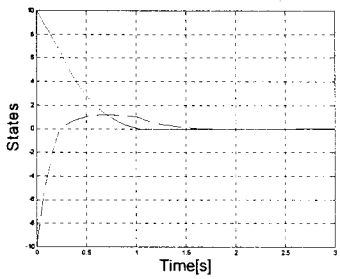

그림 1. 상태변수의 궤적

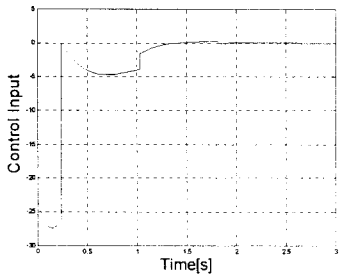

그림 2. 제어입력

아래 그림은 위 시스템의 다중 리아푸노프 함수의 추이를 도시하고 있으며 스위칭 순간마다 함수의 값이 감소하는 특성을 보이고 있다.

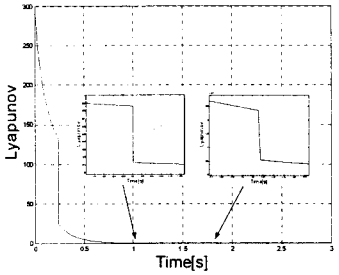

그림 3. 다중 리아푸노프 함수

6. 결 론

본 논문은 선형 스위칭 시스템의 안정성을 검사하는 새로운 판별법을 제시하였다. 제안된 판별법은 개별 선형시스템에 적용되는 방법이로서, 각 선형시스템의 연관성을 고려해야 하는 기존의 방법에 비해 간단히 전체 시스템의 안정성을 검사할 수 있다. 또한 새로운 판별법을 이용하여 전체 시스템의 점근 안정성을 보장하는, 각 선형시스템의 상태 궤환 이득을 설계하는 방법을 제시하였다.

참 고 문 헌

[1] A. Agrachev, and Daniel Liberzon, "Lie Algebra Conditions for Exponential Stability of Switched Systems," Proceeding of the 38th CDC, pp. 2679-2684, 1999.

[2] A. Agrachev, and Daniel Liberzon, "Lie Algebraic Stability Criteria for Switched Systems," SIAM Journal of Optimal Control, Vol. 40, No. 1, pp. 253-269, 2001.

[3] S. Barnett, and F. Man, "Comments on A Theorem on the Lyapunov Matrix Equation," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 15 Issue 2, Apr 1970.

[4] Z. Gajic, Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control, Academic Press, pp. 245-246, 1995.

[5] J. Hespanha, "Extending LaSalle's Invariance Principle to Switched Linear Systems", Proceeding of the 40th CDC, pp. 2496-2501, 2001.

[6] D. Liberzon, Switching in Systems and Control, Brikhauser, Boston, 2003.

[7] D. Liberzon, J. P. Hespanha, and A. S. Morse, "Stability of Switched Systems : A Lie Algebraic Condition," Systems & Control Letters 37, 1999.

[8] P. Lancaster, and M. Tismenetsky, The Theory of matrices, Academic Press, pp.387-390, 1985.

[9] F. Man, "A theorem on the Lyapunov Matrix Equation," IEEE Transactions on Automatic Control, June, 1969.

[10] S. Pettersson, Analysis and Design of Hybrid Systems, Thesis for the degree of doctor of philosophy, Chalmers Univ. of Technology, Göteborg Sweden, 1999.