정보 및 제어 심포지엄(ICS'04) 2004. 5. 22

연속선형계의 PD 안정화기의 전체 이득 셋 결정

A Note on All Stabilizing PD Controllers for Continuous LTI Systems

김 근 식*, 김 영 철**
(Keunsik Kim, YoungcDattal Kim)

Abstract - Recently, Datta at al. [1] have developed a metDattad of obtaining the complete set of stabilizing PI, PID controllers for a given LTI system, in which tDattase are determined by solving a set of linear inequalities parameterized by the proportional(P) gain. In this paper, we provide a note about Dattaw Datta's idea can be extended to the problem of finding all stabilizing PD controllers and about an improved metDattad that allows us to calculate the admissible range of P gain more rigorously. An illustrative example is given.

Key Words : PD controller, Stabilizer, Linear time invariant (LTI) system

1. 서 론

최근 약 20년 동안, H_∞ 제어이론[3,4]과 그 줄기인 μ이론[4,5]은 많은 주목을 받았다. 이는 H_∞-*norm* 을 최소화하는 개념을 근거로 하고 있는데, 강인성과 안정도와 성능을 동시에 고려할 수 있다는 장점을 가지고 있다. 그러나 이 설계법은 이론적으로 난해하고, 설계된 제어기의 차수가 플랜트의 차수에 비해 지나치게 높을 수밖에 없는 구조적 결점을 가지고 있다. 따라서 아직도 산업현장 설계자들의 거의 대부분은 저차제어기인 PD 또는 PID 구조의 제어기를 선호하고 있다.

저차제어기의 주된 장점은 그 단순성과 그로인한 물리적 강인성에 있지만 2개 혹은 3개의 파라미터만으로 시스템의 안정은 물론 성능 요구조건을 만족시켜야 한다는 것이다. 따라서 먼저 저차제어기 파라미터만으로 시스템을 안정하게 하는 모든 셋을 구하고, 그 셋 내에서 성능 요구조건을 만족하는 부분셋을 구할 필요가 한다. 다행이도, 최근에 Datta[1]는 Hermite-Biehler정리를 일반화하여 특성다항식 근 공간의 좌반면(LHP)에 분포된 근의 개수와 우반면(RHP)에 있는 근의 개수를 구하는 방법을 제시하였다. 이를 Generalized Hermite-Biehler정리라고 부른다. 이 정리는 n차의 폐루프 특성다항식 $\delta(s)$를 복소평면으로 사상한 $\delta(j\omega)=p(\omega)+jq(\omega)$에 대하여 다음 2 가지 방법으로 근의 분포 개수를 얻는 방법을 제시하였다.

1) $q(\omega)=0$일 때의 주파수를 $p(\omega)$에 대입하여 근의 분포를 얻는 방법,

2) $p(\omega)=0$일 때와 주파수를 $q(\omega)$에 대입하여 근의 개수를 얻는 방법.

Datta는 Generalized Hermite-Biehler정리의 1)의 방법 즉, $q(\omega)=0$ 인 경우를 이용하여 주어진 플랜트를 안정하게 하는 모든 PI, PID 모든 이득 셋을 구하는 알고리즘을 제안하였다. 그렇지만 Datta는 이 정리를 PD제어기의 경우에는 확장하지 않았다.

본 논문에서는 Generalized Hermite-Biehler정리의 2)번 방법인 $p(\omega)=0$인 경우를 이용하여 시스템을 안정하기 하는 모든 PD제어기 이득 셋을 결정하는 알고리즘을 제시하고자 한다. 시스템을 안정하게 하는 PD 제어기 이득 셋의 결과로부터 이 셋 내에서 성능 요구조건과 일치하는 제어기를 선택하는 현대제어기로의 확장하는데 매우 유용할 것이다[2].

2. PD제어기 셋 결정

제어시스템의 안정도 관점에서 제어기 파라미터의 범위를 구하는 방법으로는 잘 알려진 근 궤적법이나 Routh-Hurwitz 판별법은 저차의 플랜트에 대하여는 유용하지만 고차의 경우에는 많은 부등식을 풀어야만 한다. 시스템의 안정도를 판별하는 또 다른 Hermite-Biehler 정리는 복소공간으로 사상된 특성다항식이 교차성질(interlacing property)을 만족하면 시스템이 안정하다는 것이다[6]. 그러나 이 정리는 시스템이 불안정할 때 근이 근공간의 RHP에 얼마나 분포되는지에 대한 정보는 제공하지 못한다. 최근에 Datta[1]는 Hermite- Biehler정리를 일반화하여 근의 공간에서 LHP의 근의 개수와 RHP의 근의 개수를 구하는 방법을 제시하였다. 복소평면으로 사상된 n차의 특성다항식 $\delta(s)$를 다음과 같이 표기하기로 한다.

$$\delta(j\omega)=p(\omega)+jq(\omega) \tag{2.1}$$

정리 1 (Generalized Hermite-Biehler 정리)[1] : 실 계수를 갖는 특성다항식 $\delta(s)$를 복소평면으로 사상한 $\delta(j\omega)$에 대하여, $p(\omega)=0$이 성립하는 근 중에서 양의 실수이며 중복되지 않은 근을, $0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_{l-1}$로 놓자. 그리고 $\omega_l=\infty$로 한다. 그러면 근공간에서 특성다항식의 근의 개수는

저자 소개
* 正 會 員 : 大川大學 인터넷정보계열 副敎授 · 工博
** 正 會 員 : 忠北大學 전기전자컴퓨터공학부 敎授 · 工博

다음과 같다.

$$\sigma(\delta)=\begin{cases}-\{2sgn[q(\omega_1)]-2sgn[q(\omega_2)]+\cdots+(-1)^{l-2}2sgn[q(\omega_{l-1})]\}\cdot \\ (-1)^l sgn[p(\infty)],\ if\ n\ is\ even \\ -\{2sgn[q(\omega_1)]-2sgn[q(\omega_2)]+\cdots+(-1)^{l-2}2sgn[q(\omega_{l-1})] \\ +(-1)^{l-1}sgn[q(\omega_l)]\}\cdot(-1)^l sgn[p(\infty)]\ if\ n\ is\ odd\end{cases}$$

이 때 $\sigma(\delta)=$ "근공간에서 LHP의 근의 수 - RHP의 근의 수"이며 우리는 이를 상대 좌반면의 근의 개수라고 부르기로 한다. 만일 시스템이 안정하다면 $\sigma(\delta)=n$ 이다. ■

정리 1을 이용하여 주어진 플랜트를 안정하게 하는 모든 PD 이득 셋을 구하기로 한다. 먼저, 플랜트의 전달함수를 $P(s)=N(s)/D(s)$, PD 제어기를 $C(s)=k_p+sk_d$ 라고 하자. 이때 플랜트의 분자 항과 분모 항은 서로소(coprime)이며, $N(s)$의 차수를 m 이라고 가정한다. 주어진 플랜트의 분모 항과 분자 항을 짝수차수 항과 홀수차수 항으로 분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}N(s)&=N_e(s^2)+sN_o(s^2)\\ D(s)&=D_e(s^2)+sD_o(s^2)\end{aligned}\tag{2.2}$$

(2.2)에서 $s\rightarrow -s$를 대입한 또 다른 함수를 정의한다.

$$N^*(s)=N(-s)=N_e(s^2)-sN_o(s^2)\tag{2.3}$$

PD제어기를 포함한 n차의 폐루프 특성다항식 $\delta(s,k_p,k_d)$에 $N^*(s)$를 곱하고, 그 결과를 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma(\delta(s,k_p,k_d)N^*(s))&=\sigma(\delta(s,k_p,k_d))+\sigma(N^*(s))\\ &=\sigma(\delta(s,k_p,k_d))+\sigma(N(-s))\\ &=\sigma(\delta(s,k_p,k_d))-\sigma(N(s))\end{aligned}\tag{2.4}$$

n차의 폐루프 특성다항식의 상대 좌반면의 근의 개수 $\sigma(\delta(s,k_p,k_d))=n$ 일 때 Hurwitz 필요충분조건을 만족한다. 그러므로 아래의 보조정리를 얻는다.

보조정리 1 : 다음은 폐루프 특성다항식이 Hurwitz이기 위한 필요충분조건이다.

$$\sigma(\delta(s,k_p,k_d)N^*(s))=n-\sigma(N(s))$$

이 보조정리의 의미는 다음과 같다. PD제어기를 포함한 폐루프 특성다항식의 모든 근이 LHP에 있다고 가정하면 n은 폐루프의 차수이다. 그리고 n과 $N(s)$의 상대 좌반면의 근의 개수 와의 차이를 구한다. 이 때 $\delta(s,k_p,k_d)N^*(s)$의 상대 좌반면의 근의 개수가 $n-\sigma(N(s))$로 되도록 하는 PD 이득 k_p,k_d를 구하면, 이 셋들이 시스템을 안정화시키는 셋이다.

식(2.4)를 복소평면으로 사상하여 표현하면 실수부는 k_p, 허수부는 k_d만의 함수로 다음과 같이 분리된다.

$$\begin{aligned}\delta(j\omega,k_p,k_d)N^*(j\omega)&=p_1(\omega)+k_pp_2(\omega)+j(q_1(\omega)+k_dq_2(\omega))\\ &=p(\omega,k_p)+jq(\omega,k_d)\end{aligned}\tag{2.5}$$

여기서 $p_1(\omega),p_2(\omega),q_1(\omega),q_2(\omega)$는 다음과 같다.

$$p_1(\omega)=D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2)+\omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)$$

$$p_2(\omega)=N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2)+\omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)$$

정리 1에서 $sgn[\ ]$함수를 간략화하기 위하여 다음과 같은 부호집합을 정의한다.

$$A_t=\begin{cases}\{i_1,i_2,\cdots i_{l-1}\} & \text{for } n+m\ even\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_l\} & \text{for } n+m\ odd\end{cases}\tag{2.6}$$

여기서 $i_j\in\{-1,0,1\}$의 값만을 갖는다. 식(2.5)에서 k_p를 k_p^*로 고정시키고 $p(\omega,k_p^*)=0$을 만족하는 주파수 $\omega_t=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{l-1}\}$를 구하여 식(2.5)에 적용하면 다음과 같이 k_d 만의 함수로 바뀐다.

$$\delta(j\omega,k_d)N^*(j\omega)=jq(\omega_t,k_d)=j(q_1(\omega_t)+k_dq_2(\omega_t))\tag{2.7}$$

식(2.7)을 (2.6)을 고려하여 정리1에 적용하면 보조정리 1을 만족하는 근의 수 $n-\sigma(N(s))$ 는 다음으로부터 찾을 수 있다.

$$n-\sigma(N(s))=\begin{cases}-\{2i_1-2i_2+\cdots+(-1)^{l-2}2i_{l-1}\}\cdot(-1)^l sgn[p(\infty)], \\ \quad \text{if } n+m\ even \\ -\{2i_1-2i_2+\cdots+(-1)^{l-2}2i_{l-1}+(-1)^{l-1}i_l\}\cdot \\ (-1)^l sgn[p(\infty)], \qquad \text{if } n+m\ odd\end{cases}\tag{2.8}$$

먼저 하나의 k_p를 선택 위해서는 적용 가능한 k_p의 범위를 결정하여야 한다. k_p의 범위는 (2.5)식에서 $p(\omega,k_p)=0$이 되도록 하는 k_p를 근 궤적 작도법에서 이탈점을 얻는 방법과 Hurwitz 안정도 필요조건으로부터 찾는다.

전자는 근 궤적 작도 방법 중 근궤적 이탈점간에는 근의 분포 성질이 동일하다는 성질을 이용하는 것이다. 즉, $k_p=-p_1(\omega)/p_2(\omega)$에 대하여 ω로 미분한 결과가 0이 되는 실수 주파수 근을 찾아 $p(\omega,k_p)=0$에 대입하면 근의 분포성질이 동일한 k_p의 범위를 찾을 수 있다. 이 때 실수 값을 갖는 주파수를 선택하는 이유는 k_p 값이 실수 값만을 가지기 때문이다. 또한 Hurwitz 안정도 필요조건을 $\delta(s,k_p,k_d)$의 계수 중에서 k_p만의 함수로 표현되는 s^0 계수에 적용하면 최저 k_p의 범위를 얻을 수 있다. 이 때 구한 k_p 구간은 필요조건이다.

이상의 결과로부터, k_p 구간내에서 선택한 k_p^*에 대하여 시스템을 안정화하는 k_d 범위는 $p(\omega,k_p)=0$을 만족시키는 주파수 ω_t와 식(2.8)로부터 얻은 부호집합을 사용하여 $q(\omega_t)$에 대한 부등식을 구함으로써 얻는다. 만일 부호집합의 원소 값이 $i_1=-1$이면 $q(\omega_1)=q_1(\omega_1)+k_dq(\omega_1)<0$의 부등식을 갖는다. 마찬가지로 나머지 모든 ω_t와 부호집합 원소를 이용하여 연립 부등식을 도출하여 교집합 해를 구하면 k_d 범위를 얻게된다. 이 때 만일, i_j 원소 하나가 0 이면서 $q_1(\omega_t)=q_2(\omega_t)=0$이면 k_p^*에 대하여 k_d가 독립이므로, k_p^*와 모든 k_d 값이 시스템을 안정화하는 셋이다. 또한 i_j 원소가 0이 아닌 경우에 $q_2(\omega_t)=0$이면 마찬가지로 k_d가 독립이므로 $q_1(w_t)$의 부호와 i_j이 부호가 동일하면 모든 k_d 값이 시스템을 안정화는 셋이고 만족하지 않으면 해가 없는 경우이다.

이상에서 언급한 사항을 부연설명 하기위하여, 고정된 k_p^*에서 $p(\omega,k_p^*)=0$를 만족하는 주파수가 $\omega_t=\{\omega_1,\omega_2\}$라고 가정하자. 이 때 폐루프 제어계의 차수가 $n=6$, $N(s)$의 차수가 4이고, $N(s)$의 상대 좌반면 근의 개수 $\sigma(N(s))=2$이라고 가정하면, $n-\sigma(N(s))=4$가 된다. 이때 $\sigma(\delta(s,k_p^*,k_d)N^*(s))=$

$\sigma(q(\omega_t)) = 4$를 만족하는 부호집합을 식(2.8)로부터 찾는다. 이 때 $n - \sigma(N(s)) = -\{2i_1 - 2i_2\}(-1)^3(-1) = 4$를 만족하는 부호집합은 $A_I = \{-1, 1\}$이다. 따라서 다음의 연립부등식의 해를 구함으로써, k_p*에 대한 (k_p^*, k_d) 셋을 얻는다.

$$q_1(\omega_1) + k_d q_2(\omega_1) < 0, \qquad q_1(\omega_2) + k_d q_2(\omega_2) > 0$$

적용 가능한 k_p 범위의 모든 k_p를 이상에서 언급한 방법을 적용하면 시스템을 안정화하는 (k_p, k_d)셋은 제어시스템에 따라 다양한 2차원(k_p, k_d)평면으로 표현될 것이다

3. 적용 예

본 장은 2장에서 제시한 방법이 어떻게 적용되는지를 임의의 플랜트 $P(s)$를 가정하여 보이기로 한다. 이 플랜트는 RHP에 3개의 극점을 가지고 있으며, LHP에 2개의 영점을 가진 불안정한 시스템이다.

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{4s^2 + s + 2}{s^7 + 5s^6 + 10s^5 + 20s^4 + 10s^3 + 5s^2 + 5s - 2}$$

절차 : 1단계 - PD 제어기 $C(s) = k_p + sk_d$ 포함한 특성다항식 $\delta(s, k_p, k_d)$에 $N^*(s) = 4s^2 - s + 2$를 곱하고 복소평면으로 사상하여 식(2.5)의 $p(\omega), q(\omega)$를 얻는다.

$$p_1(\omega) = 19\omega^8 - 80\omega^6 + 50\omega^4 + 3\omega^2 - 4,$$
$$p_2(\omega) = 16\omega^4 - 15\omega^2 + 4$$
$$q_1(\omega) = \omega(4\omega^8 - 37\omega^6 + 40\omega^4 - 35\omega^2 + 12)$$
$$q_2(\omega) = \omega(16\omega^4 - 15\omega^2 + 4)$$

2단계 - $p(\omega, k_p) = p_1(\omega) + k_p p_2(\omega) = 0$으로부터 적용 가능한 k_p를 얻기 위는 단계이다. 먼저 근궤적 작도 방법에서 근의 이탈점인 주파수를 찾기 위하여 $\frac{d}{d\omega}\{p_1(\omega)/p_2(\omega)\} = 0$ 를 만족하는 실수의 주파수를 찾아 $p(\omega, k_p) = 0$에 대입하면 다음과 같은 k_p범위를 얻는다.

$$K_{pi} = \{\{-\infty, -2.38\}, \{-2.38, 1.00\}, \{1.00, 1.27\}, \{1.27, 3.600\}\}$$

또한 폐루프 특성다항식의 s^0 계수의 Hurwitz 필요조건을 적용하면 최소 k_p는 1 이상이어야 한다. 따라서 적용 가능한 k_p 범위 $K_{pi} = \{\{1.00, 1.27\}, \{1.27, 3.600\}\}$이다.

3단계 - K_{pi}에서 하나의 k_p를 선택한다. 여기서 $k_p^* = 2$를 선택하기로 한다. 그리고 $p(\omega, k_p^*) = 0$을 만족하는 주파수를 구하면 $\omega_t = \{0.956, 1.694\}$이다. 이 때 $\delta(s, k_p^*, k_d)N^*(s)$의 차수가 홀수이므로 $w_3 = \infty$로 한다. 보조정리 1로부터 근의 수 $n - \sigma(N(s)) = -\{2i_1 - 2i_2 + i_3\}(-1)^3 = 5$를 만족하는 부호집합은 $i_i = \{1, -1, 1\}$이다. 따라서 구하고자 하는 다음의 k_d의 연립부등식을 풀면 $k_d = \{3.29 \sim 3.91\}$를 얻는다.

$$q_1(0.956) + k_d q_2(0.956) > 0,\ q_1(1.694) + k_d q_2(1.694) < 0,$$
$$q_1(\infty) + k_d q_2(\infty) > 0,$$

같은 방법으로 k_p 범위에서 또 다른 k_p의 선택하여 3단계를 반복한다. 그 결과는 다음과 같다.

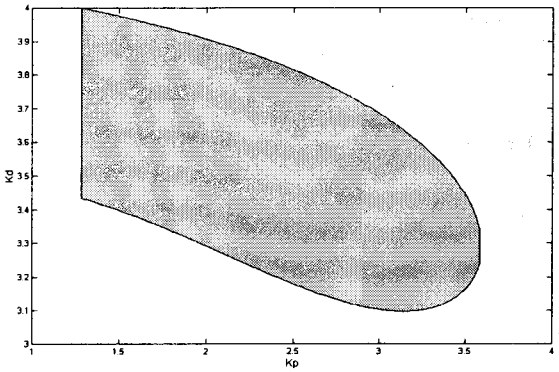

그림 1 시스템을 안정화하는 전체 PD 이득 셋
Fig. 1 All stabilizing region for a PD Controller

4. 결 론

제어기 설계의 관점에서 현대적 접근방식은 시스템을 안정화는 제어기의 셋을 구한 후 이 셋 속에서 성능조건을 만족하는 최적 해를 구한다. 본 논문은 산업현장의 제어기 설계자가 선호하는 저차제어기 중 현대제어기 설계 관점에서 PD제어기의 모든 셋을 구하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 Datta가 제시한 Generalized Hermite-Biehler정리에 근거하고 PD제어기를 포함한 폐루프 특성다항식을 k_p만의 함수와 k_d만의 함수로 분리하여 얻을 수 있었다. 최종해는 고정한 k_p에 대하여 k_d만으로 표현되는 부등식들을 연립하여 교집합을 얻었다. 이 결과는 실제 제어기 설계에 있어서 매우 유용하게 적용될 수 있다.

감사의글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호 : R01-2003-000-11738-0) 지원으로 이루어진 연구임.

참 고 문 헌

[1] A. Datta, M. T. Ho, and S. P. Bhattacharyya, *Structure and Synthesis of PID Controllers*, London, U. K. : Springer-Verlag, 2000.

[2] 김근식, 조태신, 김영철, "시간응답 설계규격을 만족하는 PI, PD, PID제어기 설계," 제어·자동화·시스템공학회지 제9권 4호, pp 259-268, 2003.

[3] B. A. Francis, *A Course in H_∞ Control Theory*, Vol. 88 in Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, New York, 1987.

[4] K. ZDattau, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust Control and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J, 1996

[5] A, Packard and J. C. Doyle, "The Complex Structured Singular Value," *Automatica*, Vol. 29, 71-109, 1993

[6] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel, *Robust Control-The Parametric Approach*, Chap. 1, Prentice Hall, 1995