특이시스템의 강인 관측기 기반 H_∞ 제어

Robust observer-based H_∞ control for singular systems

김 종 해
(Jong Hae Kim)

Abstract - This paper provides an observer-based H_∞ controller design method for singular systems with and without time-varying delay by just one LMI condition. The sufficient condition for the existence of controller and the controller design method are presented by perfect LMI (linear matrix inequality) approach. The design procedure involves solving an LMI. The observer-based H_∞ controller in the existing results can be constructed from the coupled two or more conditions while the proposed controller design method can be obtained from an LMI condition, which can be solved efficiently by convex optimization. Since the obtained condition can be expressed as an LMI form, all variables including feedback gain and observer gain can be calculated simultaneously by Schur complement and changes of variables. An example is given to illustrate the results.

Key Words : Singular systems, observer-based control, H_∞ control, parameter uncertainty, LMI

1. 서 론

표준 상태공간의 H_∞ 제어 문제가 수십 년 동안 상당한 관심을 가지고 연구되었다. H_∞ 제어이론이 비교적 잘 정립되어 왔지만, 대부분의 경우가 상태공간 시스템에 기초를 두었다. 최근에, 특이시스템(singular system)에 대한 상태공간 접근을 위한 H_∞ 제어이론의 관심분야중 하나는 특이시스템에 대한 확장문제이다. 상태공간 모델은 매우 유용하지만 다양한 시스템의 동특성을 표현하지는 못한다. 특히 임펄스나 히스테리시스 등의 회로 시스템에서의 물리적 현상은 상태공간 시스템을 가지고서는 표현의 한계를 가지고 있다[1,2]. 최근, 특이시스템의 특별한 성질로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동 이론, 제약적 기계 시스템 등에서 상당한 관심을 끌고 있다. 따라서, 특이 형태는 선형 동역학 시스템의 자연스러운 표현이고, 또한 상태공간 방정식이 해석하는 것보다 많은 종류의 시스템에 대한 해석을 가능하게 한다.

최근, Wang 등[3]은 2개의 일반적인 리카티(Riccati) 방정식을 기초로 유한 실계 정리(bounded real lemma)를 이용하여 특이 시스템의 H_∞ 제어를 위한 필요충분조건을 제시하였다. Cobb[4]은 특이시스템에서 가제어성, 가관측성, 쌍대성 등의 문제를 다루었다. Lewis[5]는 특이시스템의 최적제어문제를 다루었다. 최근에는 특이시스템의 H_∞ 제어기 설계 문제가 많은 연구자들에 의하여 다루어지고 있다. 특히, Masubbuchi 등[1]은 특이시스템의 몇 가지 가정들을 없애기 위하여 임펄스 모드와 $j\omega$축 영점을 가지는 특이시스템에 대한 H_∞ 제어문제를 고려하였다. Lin[6]은 상태궤환 접근방법을 이용하여 불확실 선형 특이시스템의 안정성 문제를 해결하였다. Rhem과 Allgöwer[7]는 시스템 행렬에 노옴 한계를 가지는 불확실성이 있는 비정규적(non-regular) 특이시스템에 대한 H_∞ 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만 특이시스템에 대하여 상태를 모두 측정할 수 없는 경우인 출력궤환 문제를 다루는 논문은 없는 실정이다. 특이시스템에서 모든 상태가 관측되지 않는 경우인 출력궤환 문제에 대해서는 기존의 논문 결과로는 적용할 수가 없다. 또한, 조건의 최적의 해를 보장하지 못하는 비볼록성(non-convexity) 때문에 해를 구하기가 쉽지 않다.

본 논문에서는 변수 불확실성(parameter uncertainty)을 가지는 특이시스템의 강인 관측기 기반 H_∞ 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계방법을 단 하나의 선형행렬부등식 접근방법으로 제시하고자 한다. 따라서, 구하고자 하는 조건이 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식으로 표현되기 때문에 관측기 기반 제어기에서 제어이득과 관측이득을 포함하는 모든 해가 한번에 구할 수 있다.

2. 문제설정

변수 불확실성을 가지는 선형 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= [A+\Delta A(t)]x(t)+[B_1+\Delta B_1(t)]u(t)+B_2w(t) \\ z(t) &= C_1x(t)D_1u(t) \\ y(t) &= [C_2+\Delta C_2(t)]x(t)D_2w(t) \end{aligned} \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(t)\in R^n$은 상태, $z(t)\in R^l$은 제어될 출력, $y(t)\in R^q$는 측정출력, $u(t)\in R^m$는 제어입력, $w(t)\in R^p$는 외란, E는 $rank(E)=r\le n$를 만족하는 특이 행렬이고, 모든 행렬은 적절한 차원을 가진다. 그리고, D_1은 완전 열 계수이고, 변수 불확실성은

$$\Delta A(t)=N_1F_1(t)H_1,\ \Delta B_1(t)=N_2F_2(t)H_2,\ \Delta C_2(t)=N_3F_3(t)H_3 \tag{2}$$

正 會 員 : 鮮文大學校 電子情報通信工學部 助教授 · 工博

이고, $N_i,(i=1,2,3)$와 $H_i,(i=1,2,3)$는 알고 있는 행렬이고 $F_i(t)$는

$$F_i(t)^T F_i(t) \le I \tag{3}$$

를 만족하는 모르는 행렬이다.

정의 1: $E\dot{x}(t)=Ax(t)$의 시스템에 대한 특이시스템의 성질을 간단히 정리한다.

I) $det(sE-A)\neq 0$이면 $(sE-A)$는 정규적(regular)이다.

ii) 특이시스템이 임펄스프리이기 위한 필요충분조건은 $rank(E)=\deg det(sE-A)$를 만족하는 것이다.

iii) 특이시스템이 가지는 모든 모드가 감소하면 시스템은 점근적으로 안정하다.

불확실 특이시스템 (1)과 관련하여 강인 관측기 기반 H_∞ 제어기를

$$\begin{aligned} E\dot{\zeta}(t) &= A\zeta(t)+B_1u(t)+L[y(t)-C_2\zeta(t)] \\ u(t) &= K\zeta(t) \end{aligned} \tag{4}$$

으로 둔다. 여기서 $\zeta(t)\in R^n$는 관측 상태, L은 관측 이득이고, K는 궤환 이득이다. 오차상태를 $e(t)=x(t)-\zeta(t)$로 잡으면, 오차 동역학(dynamics)은

$$\begin{aligned} E\dot{e}(t) &= [A-LC_2-\Delta B_1(t)K]e(t)+[B_2-LD_2]\omega(t) \\ &\quad +[\Delta A(t)-\Delta B_1(t)K-L\Delta C_2(t)]x(t) \end{aligned} \tag{5}$$

이고, 폐루프시스템의 상태방정식은

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= [A+\Delta A(t)+(B_1+\Delta B_1(t))K]x(t) \\ &\quad -[B_1+\Delta B_1(t)]Ke(t)+B_2\omega(t) \end{aligned} \tag{6}$$

이고, 제어할 출력은

$$z(t)=(C_1+D_1K)x(t)-D_1Ke(t)=C_{1K}x(t)-DKe(t) \tag{7}$$

이고, $C_{1K}=C_1+D_1K$이다. 그리고 H_∞ 성능지수는

$$\int_0^\infty [z(t)^Tz(t)-\gamma^2\omega(t)^T\omega(t)]dt. \tag{8}$$

이다.

3. 강인 관측기 기반 H_∞ 제어기 설계

본 장에서는 강인 관측기 기반 H_∞ 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계 방법을 제안한다.

정리 1: 주어진 $\gamma>0$에 대하여, 다음의 행렬부등식

$$E^TP_c=P_c^TE\ge 0 \tag{9}$$

$$E^TP_o=P_o^TE\ge 0 \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 & -P_c^TB_1K-C_{1K}D_1K & P_c^TB_2 \\ * & \Gamma_2 & P_o^T(B_2-LD_2) \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}<0 \tag{11}$$

을 만족하는 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P_c, P_o, 관측이득 L, 궤환이득 K가 존재하면, (4)는 폐루프시스템에서 정의 1의 성질을 만족하고 H_∞ 노옴 한계를 만족하는 강인 관측기 기반 H_∞ 제어기이다. 여기서, 변수들은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= A^TP_c+P_c^TA+K^TB_1^TP_c+P_c^TB_1K+C_{1K}^TC_{1K}+P_c^TN_1N_1^TP_c \\ &\quad +2P_c^TN_2N_2^TP_c+2H_1^TH_1+2K^TH_2^TH_2K+H_3^TH_3 \\ \Gamma_2 &= A^TP_o+P_o^TA-C_2^TL^TP_o-P_o^TLC_2+K^TD_1^TD_1K+P_o^TN_1N_1^TP_o \\ &\quad +2P_o^TN_2N_2^TP_o+P_o^TLN_3N_3^TL^TP_o+2K^TH_2^TH_2K. \end{aligned}$$

증명: 폐루프시스템의 점근적 안정성을 위하여, (9)와 (10)을 만족하는 리아푸노프 방정식

$$V(x(t))=x(t)^TE^TP_cx(t)+e(t)^TE^TP_oe(t) \tag{12}$$

를 잡고, H_∞ 성능지수 (8)과 아래의 관계를 이용하면

$$z(t)^Tz(t)-\gamma^2\omega(t)^T\omega(t)+\dot{V}(x(t))<0 \tag{13}$$

$$2x(t)^TPNF(t)Hx(t)\le x(t)^TPNN^TPx(t)+x(t)^TH^THx(t) \tag{14}$$

제어기가 존재할 조건을 구할 수 있다. ■

정리 1의 조건은 구하려는 모든 변수의 견지에서 최적화가 가능한 선형행렬부등식 형태가 아니고 (9)와 (10)에 등호 조건을 포함하고 있어서 해를 구하기가 쉽지 않다. 따라서, 정리 2에서 적절한 방법을 사용하여 등호조건을 제거하고, 모든 변수의 견지에서 볼록최적화 조건으로 변형한다.

정리 2: 주어진 $\gamma>0$에 대하여, 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & \Sigma_2 & \Pi_6 & 0 \\ * & \Sigma_3 & \Sigma_4 & 0 & \Pi_7 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix}<0 \tag{15}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P_1, P_4, 대칭 역행렬 P_3, P_6, 행렬 P_2, P_5, M_1, M_2가 존재하면, 강인 관측기 기반 H_∞ 제어기의 궤환이득과 관측이득은

$$K=-(D_1^TD_1)^{-1}(B_1^TP_c+D_1^TC_1),\quad L=(P_o^T)^{-1}M \tag{16}$$

으로 구해진다. 여기서 변수들은 아래와 같다.

$$\Sigma_1=\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ * & \Pi_3 \end{bmatrix},\ \Sigma_2=\begin{bmatrix} P_1B_{21}+P_2^TB_{22} \\ P_3B_{22} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} \Pi_4 & P_5^T A_4 - M_1 C_{22} - C_{21}^T M_2^T \\ * & \Pi_5 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_4 = \begin{bmatrix} P_4 B_{21} + P_5^T B_{22} - M_1 D_2 \\ P_6 B_{22} - M_2 D_2 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_1 = A_1^T P_1 + P_1 A_1 + C_{11}^T C_{11} + 2H_{11}^T H_{11} + H_{31}^T H_{31},$$

$$\Pi_2 = P_2^T A_4 + C_{11}^T C_{12} + 2H_{11}^T H_{12} + H_{31}^T H_{32},$$

$$\Pi_3 = A_4^T P_3 + P_3 A_4 + C_{12}^T C12 + 2H_{12}^T H_{12} + H_{32}^T H_{32},$$

$$\Pi_4 = A_1^T P_4 + P_4 A_1 - M_1 C_{21} - C_{21}^T M_1^T,$$

$$\Pi_5 = A_4^T P_6 + P_6 A_4 - M_2 C_{22} - C_{22}^T M_2^T,$$

$$\Pi_6 = \begin{bmatrix} P_1 N_{11} + P_2^T N_{12} & \sqrt{2}(P_1 N_{21} + P_2^T N_{22}) & -\sqrt{2}(P_1 B_{11} + P_2^T B_{12} + C_{11}^T D_1)(D_1^T D_1)^{-1} H_2^T \\ P_3 N_{12} & \sqrt{2} P_3 N_{22} & -\sqrt{2}(P_3 B_{12} + C_{12}^T D_1)(D_1^T D_1)^{-1} H_2^T \end{bmatrix}$$

$$\Pi_7 = \begin{bmatrix} -(P_1 B_{11} + P_2^T N_{12} + C_{11}^T D_1)(D_1^T D_1)^{-1} H_2^T & P_4 N_{11} + P_5^T N_{12} & \sqrt{2}(P_4 N_{21} + P_5^T N_{22}) & -\sqrt{2}(P_1 B_{11} + P_2^T B_{12} + C_{11}^T D_1)(D_1^T D_1)^{-1} H_2^T \\ -(P_3 B_{12} + C_{12}^T D_1)(D1^T D_{1)}^{-1} D_1^T & P_6 N_{12} & \sqrt{2} P_6 N_{22} & -\sqrt{2}(P_3 B_{12} + C_{12}^T D_1)(D_1^T D_1)^{-1} H_2^T \end{bmatrix}.$$

증명: 행렬부등식 (11)은 (16)의 궤환이득과 관측이득을 이용하면

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & P_c^T B_2 \\ * & \Lambda_2 & P_o^T B_2 - M D_2 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{17}$$

을 얻는다. 여기서, 변수들은 아래와 같다.

$$\Lambda_1 = A^T P_c + P_c^T A + C_1^T C_1 - K^T D_1^T D_1 K + P_c^T N_1 N_1^T P_c + 2P_c^T N_2 N_2^T P_c + 2H_1^T H_1 + 2K^T H_2^T H_2 K + H_3^T H_3$$

$$\Lambda_2 = A^T P_o + P_o^T A - M C_2 - C_2^T M_2^T + K^T D_1^T D_1 K + P_o^T N_1 N_1^T P_o + 2P_o^T N_2 N_2^T P_o + P_o^T L N_3 N_3^T L^T P_o + 2K^T H_2^T H_2 K.$$

또한, 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & P_c^T B_2 & \Psi_3 & 0 \\ * & \Psi_2 & P_o^T B_2 - M D_2 & 0 & \Psi_4 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{18}$$

이 음의 정부호 행렬이면, 행렬부등식 (17)은 음의 정부호 행렬이다. 여기서, 변수는 아래와 같다.

$$\Psi_1 = A^T P_c + P_c^T A + C_1^T C_1 + 2H_1^T H_1 + H_3^T H_3,$$

$$\Psi_2 = A^T P_o + P_o A - M C_2 - C_2^T M^T,$$

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} P_c^T N_1 & \sqrt{2} P_c^T N_2 & \sqrt{2} K^T H_2^T \end{bmatrix},$$

$$\Psi_4 = \begin{bmatrix} K^T D_1^T & P_o^T N_1 & \sqrt{2} P_o^T N_2 & M N_3 & \sqrt{2} K^T H_2^T \end{bmatrix}.$$

출력궤환 제어기의 존재조건을 단 하나의 선형행렬부등식의 조건으로 표현하고 정리 1의 등호 조건을 없애기 위하여 특이치 분해 방법(singular value decomposition)을 이용한다. 일반성을 상실함 없이, 특이시스템 행렬은

$$E = \begin{bmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix},$$
$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix},\ C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},\ D_1 = D_1,\ D_2 = D_2 \tag{19}$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{12} \end{bmatrix} F_1(t) \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \end{bmatrix},$$
$$\Delta B_1(t) = \begin{bmatrix} N_{21} \\ N_{22} \end{bmatrix} F_2(t) H_2, \tag{20}$$
$$\Delta C_2(t) = N_3 F_3(t) \begin{bmatrix} H_{31} & H_{32} \end{bmatrix}$$

의 구조로 분해된다고 가정한다. 그리고, 구하려는 해를

$$P_c = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix},\ P_o = \begin{bmatrix} P_4 & 0 \\ P_5 & P_6 \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

과 같이 두고, (19)~(21)을 (18)에 대입하면 모든 변수의 견지에서 선형행렬부등식인 조건 (15)를 얻는다.

참조 1: $E = I$인 경우의 일반적인 상태공간 문제는 선형행렬부등식 (18)로부터 직접 구할 수 있다. 따라서, 제안한 특이시스템의 강인 관측기 기반 H_∞ 제어기는 비특이시스템에도 직접 적용할 수 있는 일반적인 알고리듬이다. 대부분의 기존결과에서는 관측기 기반 제어기를 설계하기 위해서는 2개이상의 리카티 방정식을 이용하고 있을 뿐 아니라 제안한 조건이 볼록최적화가 아니므로 최적이 아니다. 하지만, 본 논문에서 제안하는 조건은 모든 변수의 견지에서 단지 하나의 선형행렬부등식으로 관측기 기반 출력궤환 제어기를 구할 수 있다는 장점이 있다.

참 고 문 헌

[1] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp.669-673, 1997.

[2] D. J. Bender and A. J. Laub, "The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems," *IEEE TR. Automat. Cont.*, vol. 32, pp. 672-688, 1987.

[3] H. S. Wang, C. F. Yung and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," *IEE Proc. Cont. Theory & App.*, vol. 145, pp. 316-322, 1998.

[4] J. D. Cobb, "Controllability, observability, and duality in singular systems," *IEEE TR. Automat. Cont.*, vol. 29, pp. 1076-1082, 1984.

[5] F. L. Lewis, "Preliminary notes on optimal control for singular systems," *Proc. IEEE CDC*, 262-272, 1985.

[6] A. Rhem and F. Allgöwer, "H_∞ control of descriptor systems with norm bounded uncertainties in the system matrices," Proc. ACC, 3244-3248, 2000.

[7] C. L. Lin, "On the stability of uncertain linear descriptor systems," J. of the Franklin Inst., vol. 336, pp 549-564, 1999.

[8] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.