

FWLS 적용 알고리듬을 이용한 시변 볼테라 시스템 식별

Adaptive Identification of a Time-varying Volterra system using the FWLS (filtered weighted least squares) Algorithm

안 규 영*, 정 인 석**, 남 상 원***
(K.Y. Ahn , I.S. Jeong , S.W. Nam)

Abstract - In this paper, the problem of identifying a time-varying nonlinear system in an adaptive way was considered, whereby the time-varying second-order Volterra series was employed to model the system and the filtered weighted least squares (FWLS) algorithm was utilized for the fast parameter tracking capability with low computational burden. Finally, the performance of the proposed approach was demonstrated by providing some computer simulation results.

Keywords : Adaptive system identification, time-varying Volterra system, FWLS(filtered weighted least squares) algorithm

I. 서 론

시스템 식별 문제는 digital signal processing, process control, communications 등 많은 분야에서 다루고 있는데, 관측된 시스템의 입출력 데이터로부터 동적 시스템의 수학적 모델을 구하는데 그 목적이 있다[1]. 즉, 시스템 특성 분석이나 제어를 위해, 대상 시스템의 수학적 모델을 선정하고 식별하고 평가하는 것이다. 특히, 많은 경우에 대상 시스템이 시불변 선형 시스템을 가정하였다. 그러나, 많은 실제 시스템은 시변이며 비선형이다[2,3]. 그러한 점에서 시변 비선형 시스템의 식별 문제 또한 중요하다. 예를 들어 시스템의 시변 특성은 무선 통신 시스템 등에서 나타난다. 즉, 이동전화 시스템에서 다경로 전파와 사용자의 이동은 채널의 분산, 시변 특성을 야기한다[4]. 또한, 위성 통신에서 TWT 증폭기의 비선형성의 영향 및 선형화에 대해 많이 연구되고 있다[5].

2. 시변 볼테라 급수 모델링

본 논문에서는 이산 시변 2차 Volterra 시스템을 고려한다. Volterra 급수는 메모리를 갖는 Taylor 급수의 확장된 형태이다. Volterra 시스템의 출력은 시스템 커널들에 대해서 선형성을 유지하므로, 기존의 선형 필터 이론을 비선형 시스템 분석에 적용할 수 있다[6-8].

본 논문에서는 2차 볼테라 모델을 고려할 것이고 이러한 2차 볼테라 모델은 간단하면서도 여러 분야의 비선형 시스템을 표현하는데 이용될 수 있다. 시변 특성을 갖는 2차 Volterra 모델은 다음과 같이 표현된다.

저자 소개

* 安 奎 英 : 漢陽大學 電子通信電波 工學科 碩士課程

** 鄭 仁 錫 : 漢陽大學 電子通信電波 工學科 碩士課程

***南 尚 沎 : 漢陽大學 電子通信電波 工學科 正教授 · 博

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_1(n,i)u(n-i) + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i}^{N-1} h_2(n,i,j)u(n-i)u(n-j) + v(n) \quad (1)$$

여기서, $u(n)$ 은 입력 신호이고, $y(n)$ 은 출력 신호이다. 그리고 $h_1(n,i)$ 과 $h_2(n,i,j)$ 은 1차, 2차 시변 Volterra 커널 (kernel)이고 비선형 커널(즉, $h_2(n,i,j)$)은 대칭이라고 가정한다. 특히, 식 (1)의 입-출력 관계는 다음의 벡터 형식으로 간단히 표현할 수 있다.

$$y(n) = \varphi^T(n)\theta(n) + v(n) \quad (2)$$

여기서 Volterra 커널 벡터 $\theta(n)$ 은 1차, 2차 커널들로 구성되며, Volterra 입력 벡터 $\varphi(n)$ 은 1차, 2차 입력들로 각각 구성된다. 그리고 $v(n)$ 은 백색 측정 잡음이다. 즉,

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= [u(n), \dots, u(n-N+1), u^2(n), u(n)u(n-1), \dots, u(n)u(n-N+1), \\ &\quad u^2(n-1), \dots, u(n-1)u(n-N+1), u^2(n-2), \dots, u^2(n-N+1)]^T \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \theta(n) &= [h_1(n,0), \dots, h_1(n,N-1), h_2(n,0,0), h_2(n,0,1), \dots, h_2(n,0,N-1), \\ &\quad h_2(n,1,1), \dots, h_2(n,1,N-1), h_2(n,2,2), \dots, h_2(n,N-1,N-1)]^T \\ &= [\theta_1(n), \theta_2(n), \dots, \theta_{\frac{N(N+1)}{2}}(n)]^T \end{aligned} \quad (4)$$

3. 시변 볼테라 시스템 식별

3.1 Weighted Least Squares Estimation

WLS (weighted least squares) 방법에서는 weighting sequence $\{w(i)\}$ 를 이용하여 cost function $J(n)$ 을 다음과

같이 정의하고 그 cost function을 최소로 하는 $\theta(n)$ 을 찾아내는 것이 목적이다.

$$J(n) = \sum_{i=0}^{n-1} w(i)[y(n-i) - \phi^T(n-i)\theta]^2 \quad (5)$$

$$\hat{\theta}(n) = \arg \min_{\theta} \sum_{i=0}^{n-1} w(i)[y(n-i) - \phi^T(n-i)\theta]^2 = R^{-1}(n)s(n) \quad (6)$$

여기서

$$R(n) = \sum_{i=0}^{n-1} w(i)\phi(n-i)\phi^T(n-i), \quad s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} w(i)y(n-i)\phi(n-i)$$

실제에서 빈번하게 사용되는 window는 exponential window이다.

$$w(i) = \lambda^i, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (7)$$

즉, 식 (7)의 exponential window를 사용하면, 식 (5)의 cost function을 최소로 하는 Volterra 커널 벡터는 다음과 같이 적응적으로 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(n) &= \hat{\theta}(n-1) + L(n)\varepsilon(n) \\ \varepsilon(n) &= y(n) - \phi^T(n)\hat{\theta}(n-1) \\ L(n) &= \frac{P(n-1)\phi(n)}{\lambda + \phi^T(n)P(n-1)\phi(n)} \\ P(n) &= \frac{1}{\lambda}[P(n-1) - L(n)\phi^T(n)P(n-1)] \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $P(n) = R^{-1}(n)$.

3.2 Weighted Basis Function Estimation

시스템의 식별에서 일반적으로 사용되는 알고리듬(예를 들어, LMS (least mean squares), WLS (weighted least squares) 등)은 파라미터 변화에 대한 명확한 수학적 모델이 고려되지 않는다. 이와는 반대로 BF (basis function) 알고리듬[2]은 파라미터 변화를 명확한 모델로 표현하는 것에 기초하고 있다. 즉, 각 파라미터의 변화가 알려진 시간 함수의 선형 결합으로 나타내어질 수 있다고 가정한다. 그 시간 함수를 basis function $\{f_1(t), \dots, f_k(t)\}$ 이라고 하며 basis function을 이용하여 파라미터 즉, 식(4)의 Volterra 커널들을 표현하면 다음과 같다.

$$\theta_i(n) = \sum_{j=1}^k c_{ij} f_j(n), \quad i=1, \dots, m \quad (m=N+\frac{(N+1)N}{2}) \quad (9)$$

가장 빈번하게 사용되는 basis function에는 시간의 지수승으로 표현되는 Legendre basis

$$f_j(n) = n^{j-1}, \quad j=1, \dots, k \quad (10)$$

와 sine과 cosine 함수가 혼합된 다음의 modified Fourier basis 등이 있다.

$$f_1(n) = 1, \quad f_{2i}(n) = \sin \omega_i n, \quad f_{2i+1}(n) = \cos \omega_i n, \quad i=1, 2, \dots \quad (11)$$

$\gamma = [\gamma_1^T, \dots, \gamma_m^T]^T$, $\gamma_i = [c_{i1}, \dots, c_{ik}]^T$ 은 파라미터 표현을 위해 사용되는 모든 계수(coefficients)들을 모아둔 벡터 ($mk \times 1$), $f(n) = [f_1(n), \dots, f_k(n)]^T$ 은 basis function 벡터 ($k \times 1$), $\psi(n) = \phi(n) \otimes f(n)$ 은 generalized input 벡터 ($mk \times 1$)라고 하자. 이렇게 정의한 벡터와 식 (2), 식 (9)을 이용하면 시스템의 출력 $y(n)$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(n) = \psi^T(n)\gamma + v(n) \quad (12)$$

식 (12)에 weighted least squares 방법을 적용하면 추정값 γ 을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(n) &= \arg \min_{\gamma} \sum_{i=0}^{n-1} w(i)[y(n-i) - \psi^T(n-i)\gamma]^2 \\ &= R_*^{-1}(n)s_*(n) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$R_*(n) = \sum_{i=0}^{n-1} w(i)\psi(n-i)\psi^T(n-i), \quad s_*(n) = \sum_{i=0}^{n-1} w(i)y(n-i)\psi(n-i)$$

식 (13)에 기반을 두어 Volterra 커널 벡터 $\theta(n)$ 을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\hat{\theta}(n) = H(n)\hat{\gamma}(n) = (I_m \otimes f^T(n))\hat{\gamma}(n) \quad (14)$$

앞에서 언급한 exponential window, $w(i) = \lambda^i$ 을 이용하면 식 (13)을 만족하는 γ 의 추정 값들은 WBF (weighted basis function) 알고리듬을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(n) &= \hat{\gamma}(n-1) + L_*(n)\varepsilon(n) \\ \varepsilon(n) &= y(n) - \psi^T(n)\hat{\gamma}(n-1) \\ f(n) &= A f(n-1) \\ \psi(n) &= \phi(n) \otimes f(n) \\ L_*(n) &= \frac{P_*(n-1)\psi(n)}{\lambda + \psi^T(n)P_*(n-1)\psi(n)} \\ P_*(n) &= \frac{1}{\lambda}[P_*(n-1) - L_*(n)\psi^T(n)P_*(n-1)] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $P_*(n) = R_*^{-1}(n)$.

3.3 Filtered Weighted Least Squares Estimation

3.2 절에서 언급한 BF (basis function) 적응 알고리듬은 추정 파라미터 수가 늘어날수록 선형 결합의 전개 항 수도 늘어나 계산량이 많아지는 단점이 있다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 최근 시변 선형 시스템 식별 기법으로 FWLS (filtered weighted least squares) 알고리듬이 제안되었다[9]. 이 기법의 기본 아이디어는 BF (basis function) 알고리듬을 추정과 필터링의 두 단계로 나누어서 파라미터를 추정하는 것이다. 첫 번째 단계에서는 WLS (weighted least squares) 알고리듬이 적용되고, 두 번째 단계에서는 첫 번째 단계의 결과로부터 추정된 파라미터에 WLS의 inverse filtering이 적용되어지고, 그리고

BF (basis function) estimation과 유사한 추정 방법이 적용된다. 두 번째 단계에서의 filtering은 첫 번째와 두 번째 단계 전체의 impulse response를 BF (basis function) estimation과 같게 만든다. 이렇게 제안된 FWLS (filtered weighted least squares) 알고리듬은 BF (basis function) 알고리듬만큼의 파라미터 추정 능력을 갖는 동시에 WLS (weighted least squares) 알고리듬만큼의 낮은 계산량을 보인다.

구체적으로, forgetting constant가 λ_1 인 WLS (weighted least squares) 알고리듬 (8)을 고려해보자. [10] 결과에 따르면 입력 신호가 stationary인 경우에, WLS를 이용하여 추정된 파라미터의 평균값과 실제 파라미터 값 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\bar{\theta}(n) \cong \frac{1}{k_n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1^i \theta(n-i) \quad (16)$$

여기서 $\bar{\theta}(n) = E[\hat{\theta}(n)]$ 이고, k_n 은 exponential window의 유효 길이라고 정의한다.

$$k_n = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_1^i = \lambda_1 k_{n-1} + 1 \quad (17)$$

식 (16)을 이용하여

$$k_n \bar{\theta}(n) \cong \lambda_1 k_{n-1} \bar{\theta}(n-1) + \theta(n) \quad (18)$$

라고 표현할 수 있으며, 따라서

$$\theta(n) \cong k_n \bar{\theta}(n) - \lambda_1 k_{n-1} \bar{\theta}(n-1) \quad (19)$$

이다. 여기서 다음과 같은 inverse filter식을 얻는다.

$$\tilde{\theta}(n) = k_n \hat{\theta}(n) - \lambda_1 k_{n-1} \hat{\theta}(n-1) \quad (20)$$

또한, inverse filter를 통과한 출력 $\tilde{\theta}(n)$ 은 실제 파라미터에 잡음이 있는 sequence로 간주될 수 있다. 즉,

$$\tilde{\theta}(n) = \theta(n) + e(n) \quad (21)$$

식 (21)에서 잡음을 최소한으로 줄이기 위하여 우리는 basis function 방법을 적용시킬 수 있다.

또한, 파라미터 벡터 즉, Volterra 커널 벡터의 j번째 성분은 basis function의 선형결합으로 표현될 수 있다고 가정하자.

$$\theta_j(n) = f^T(n) \gamma_j \quad (22)$$

$\tilde{\theta}_j(n)$ 은 $\theta_j(n)$ 에 잡음이 첨가된 파라미터라고 간주하고

γ_j 값을 추정해내기 위하여 WLS (weighted least squares) 방법을 사용하면 다음과 같다.

$$\theta_j^*(n) = f^T(n) \hat{\gamma}_j(n) \quad (23)$$

여기서

$$\hat{\gamma}_j(n) = \operatorname{argmin}_{\gamma_j} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i [\tilde{\theta}_j(n-i) - f^T(n-i) \gamma_j]^2 = F^{-1}(n) g_j(n) \quad (24)$$

이고

$$F(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i f(n-i) f^T(n-i), \quad g_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \tilde{\theta}_j(n-i) f(n-i)$$

식(23)에서 $\theta_j^*(n)$ 은 γ_j 의 추정값으로 만들어진 파라미터이다.

식 (24)에 기반을 둔 식 (23)의 파라미터는 다음과 같은 방법으로 적용적으로 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} \theta_j^*(n) &= f^T(n) \hat{\gamma}_j(n) \\ \hat{\gamma}_j(n) &= \hat{\gamma}_j(n-1) + K(n) \varepsilon_j(n) \\ \varepsilon_j(n) &= \tilde{\theta}_j(n) - f^T(n) \hat{\gamma}_j(n-1) \\ f(n) &= A f(n-1) \quad j=1, 2, \dots, m \\ K(n) &= \frac{G(n-1) f(n)}{\lambda + f^T(n) G(n-1) f(n)} \\ G(n) &= \frac{1}{\lambda} [G(n-1) - K(n) f^T(n) G(n-1)] \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $G(n) = F^{-1}(n)$.

또한, 알고리듬 (25)에서 $\hat{\gamma}_j(n)$, $K(n)$, $G(n)$ 을 다음과 같이 변화시키고,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_j(n) &= (A^T)^n \hat{\gamma}_j(n) \\ \tilde{K}(n) &= (A^T)^n K(n) \\ \tilde{G}(n) &= (A^T)^{n+1} G(n) A^{n+1} \end{aligned}$$

이를 이용하면 다음과 같은 수식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \theta_j^*(n) &= f^T(0) \tilde{\gamma}_j(n) \\ \tilde{\gamma}_j(n) &= A^T \tilde{\gamma}_j(n-1) + \tilde{K}(n) \varepsilon_j(n) \\ \varepsilon_j(n) &= \tilde{\theta}_j(n) - f^T(1) \tilde{\gamma}_j(n-1) \quad j=1, 2, \dots, m \\ \tilde{K}(n) &= \frac{\tilde{G}(n-1) f(0)}{\lambda + f^T(0) \tilde{G}(n-1) f(0)} \\ \tilde{G}(n) &= \frac{A^T}{\lambda} [\tilde{G}(n-1) - \tilde{K}(n) f^T(0) \tilde{G}(n-1)] A \end{aligned} \quad (26)$$

4. 모의실험

모의실험에서는 기존의 EWLS (exponentially weighted least squares), EWBFS (exponentially weighted basis functions), FWLS (filtered weighted least squares) 알고리듬들을 적용한 경우의 성능을 비교한다. 시변 비선형 Volterra 시스템은 파라미터가 다음과 같이 정의되는 시스템을 고려한다.

$$h_1(n, i) = \partial_i \cos(2\pi f_0 n) \exp(-\eta n)$$

$$h_2(n, i, j) = \partial_{ij} \cos(2\pi f_0 n) \exp(-\eta n) \quad (27)$$

여기서 파라미터 ∂_i , ∂_{ij} 는 $h_1(n, i)$, $h_2(n, i, j)$ 와 관련된 상수이다. f_0 와 η 은 두개의 상수 값인데 각각

$2\pi f_0 = 0.01$, $\eta = 0.001$ 값을 갖는다. 모의실험은 시변 2차

Volterra 시스템 ($N=3$, $h_2(n,i,j)=0$ if $i \neq j$, $i, j=0,1,2$)에서 다음과 같은 값들을 갖는 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \partial_0 &= 0.2 & \partial_1 &= 0.15 & \partial_2 &= 0.1 \\ \partial_{00} &= 0.2 & \partial_{11} &= 0.15 & \partial_{22} &= 0.1 \end{aligned} \quad (28)$$

입력 신호는 $r_u(i) = (0.8)^{|i|}$ 의 autoregressive 신호이고

측정 잡음의 분산은 $\sigma_v^2 = 0.01$ 이다. 그리고, EWBF, FWLS 적용시 3차 modified Fourier basis를 사용하였다.

그림 1은 FWLS 알고리듬을 이용하여 구한 $h_2(n,0,0)$ 의 추정값을 나타낸 것이고, 그림 2는 각 알고리듬에 따른 mean square error 값을 비교한 것이다. 그림 2에서 알 수 있듯이 빠르게 변화하는 시변 비선형시스템의 식별에 각 알고리듬이 사용될 때, 본 논문에서 제안한 두 단계 과정을 갖는 FWLS 알고리듬이 EWBF 알고리듬과는 약간 차이가 있지만 비슷한 성능을 갖고, EWLS 알고리듬보다는 우수한 성능을 나타내는 것을 알 수 있다.

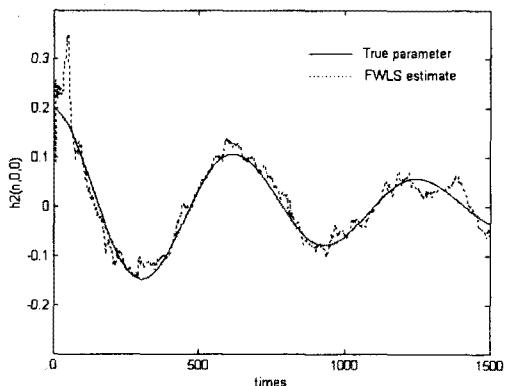


그림 1. FWLS 알고리듬을 이용한 $h_2(n,0,0)$ 의 추정값

Fig. 1. FWLS Estimates for parameter $h_2(n,0,0)$

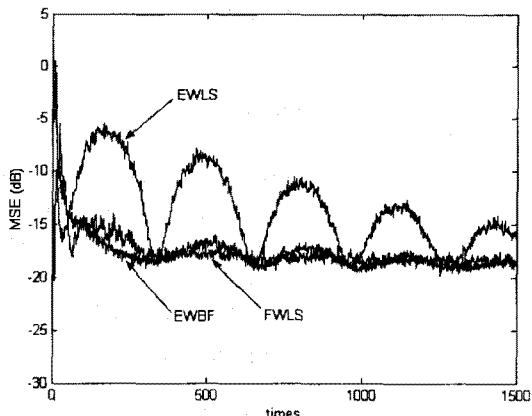


그림 2. EWLS, EWBF, FWLS 알고리듬의 MSE 비교

Fig. 2. Comparison of the mean square errors obtained for three adaptive algorithms : EWLS, EWBF, FWLS

5. 결 론

본 논문에서는 FWLS 알고리듬을 이용한 시변 2차 비선형 Volterra 시스템의 식별 기법을 제안하였다. 기존의 LMS 나 WLS 알고리듬은 시변 시스템에서 파라미터의 변화가 빠를 때 파라미터를 잘 추정하지 못한다. 따라서 빠르게 변화하는 시변 시스템의 식별에는 정교한 BF 알고리듬이 사용되어져야 한다. 그렇지만 BF 알고리듬은 많은 계산량을 요하는 단점이 있다. 따라서, 본 논문에서는 시변 선형 시스템 식별에서 파라미터 추정 능력이 BF 알고리듬과 비견되며, 동시에 WLS 알고리듬만큼의 적은 계산량을 보이는 FWLS 알고리듬을 시변 2차 비선형 Volterra 시스템의 식별에 확장 적용하였다. 모의실험을 통하여 제안된 식별 알고리듬이 시변 비선형 볼테라 시스템의 식별에서도 성능이 우수함을 보였다.

Acknowledgement: This study was supported by a grant of the Korea Health 21 R & D Project, Ministry of Health & Welfare, Republic of Korea (02-PJ3-PG6-EV08-0001).

참 고 문 헌

- [1] C. Richard Johnson, JR., "On the interaction of adaptive filtering, identification, and control," *IEEE Signal Proc. Mag.*, vol.12, pp. 22-37, Mar. 1995.
- [2] M. Niedzwiecki, *Identification of Time-varying Processes*. New York: Wiley, 2000.
- [3] R. Haber and L. Keviczky, *Nonlinear System Identification - Input-Output Modeling Approach*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [4] B. Sklar, "Rayleigh fading channels in mobile digital communication systems Part 1: Characterization," *IEEE Communications Magazine*, pp. 90-100, Jul. 1997.
- [5] S. Benedetto, E. Biglieri, and R. Daffara, "Modeling and performance evaluation of nonlinear satellite links - A Volterra series approach," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 15, pp. 494-507, Jul. 1979.
- [6] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear System*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1980.
- [7] V. J. Mathews, and G.L. Sicuranza, *Polynomial Signal Processing*, John Wiley & Sons, Inc., 2000
- [8] V. J. Mathews, "Adaptive polynomial filters," *IEEE Signal Proc. Mag.*, vol. 8, no. 3, pp. 10-26, Jul. 1991.
- [9] M. Niedzwiecki and T. Klaput, "Fast recursive basis function estimators for identification of time-varying processes," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, pp. 1925-1934, Aug. 2002.
- [10] M. Niedzwiecki, "First-order tracking properties of weighted least squares estimators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, pp. 94-96, Jan. 1988.