LMI를 이용한 축소차수 H∞ 제어기 설계

Design of a reduced-order H∞ controller using an LMI method

김 석 주*, 정 순 현*, 천 종 민*, 김 춘 경*, 이 종 무*, 권 순 만**
Seog-Joo Kim, Soon-Hyun Chung, Jong-Min Cheon,
Chun-Kyung Kim, Jong-Moo Lee, Soonman Kwon

Abstract - This paper deals with the design of a low order H∞ controller by using an iterative linear matrix inequality (LMI) method. The low order H∞ controller is represented in terms of LMIs with a rank condition. To solve the non-convex rank-constrained LMI problem, a linear penalty function is incorporated into the objective function so that minimizing the penalized objective function subject to LMIs amounts to a convex optimization problem. With an increasing sequence of the penalty parameter, the solution of the penalized optimization problem moves towards the feasible region of the original non-convex problem. The proposed algorithm is, therefore, convergent. Numerical experiments show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key Words :linear matrix inequality, reduced-order control, H∞ control, rank condition

1. 서 론

저차원 제어기 설계는 비볼록(non-convex) NP-Hard 문제로 많은 연구가 계속되고 있는 분야이다. 잘 알려진 바와 같이 이 문제는 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality: LMI)을 이용하여 표현하면 양선형행렬부등식(Bilinear Matrix Inequality: BMI)이나 또는 계수조건(rank condition)이 있는 LMI 문제로 표현된다.

계수조건이 있는 비볼록 LMI 또는 BMI 문제를 푸는 방법으로 Goh 등[1]은 한정과 분기(branch-and-bound)에 의해 전역적으로 해를 탐색하는 방법을 제안하였다. 전역적 방법은 시간이 많이 걸리기 때문에 여러 가지 지역적 방법이 제안되었고, 대표적인 것이 좌표강하법(coordinate decent method)과 선형화법(linearization method)이다. 좌표강하법은 비선형 계수조건으로 결합되어 있는 LMI 변수중 한쪽 변수를 고정하고 나머지 한쪽을 구하는 과정을 교대로 반복하는 방법이다[2-5].

Ghaoui 등[6]은 선형화에 기초한 지역적 방법인 CCL(Cone Complementarity Linearization) 법을 제안하였고 CCL 법은 기존의 지역적 방법 중 수치적인 계산 성능이 가장 좋은 것으로 평가되었다[7]. 또한 최근에 Fazel 등[8]은 로그-행렬식을 이용하여 계수조건을 가지는 일반적인 행렬의 LMI 문제에 관하여 연구하였다.

본 논문에서는 CCL 법과 같이 간단하게 구현이 가능하면서 최적화 문제에도 직접 적용이 가능한 반복 알고리즘을 제안하고자 한다. 이를 위하여 먼저 비볼록 계수조건을 선형 페널티 함수를 이용하여 목적함수로 나타내는 방법을 제시한다. 그리고 이 목적함수를 최적화시키는 해를 구하고 페널티 함수를 갱신하는 방법을 반복함으로써 비볼록 LMI 문제의 해를 얻는 알고리즘을 제시하고자 한다.

* 正 會 員 : 韓國電氣硏究院 硏究員
** 正 會 員 : 韓國電氣硏究院 그룹장

2. 축소차수 H_∞ 제어기 설계

저차원 제어기는 시스템 첨가(augmentation) 기법[6]에 의해 정적출력 제어기로 표현될 수 있다. 이를 위해 먼저 다음과 같은 상태방정식으로 표시되는 일반화된 플랜트에 대해서 생각해보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \tag{1}$$

여기서 $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^{n_w}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$는 각각 시스템의 상태, 외부입력, 제어입력, 제어하고자 하는 제어변수 및 측정 벡터이고 행렬 A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}은 주어지는 데이터 행렬이다. 이때 다음과 같이 n_c 차 H∞ 제어기를 구하는 문제를 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \tag{2}$$

여기서 H∞ 제어문제는 제어법칙 (2)로 (1)의 폐루프 시스템을 안정화시키면서 H∞ 놈 $\|T_{zw}\|_\infty$ 를 최소화시키는 제어기 행렬 K

$$K = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \tag{3}$$

를 구하는 문제가 된다.

잘 알려진 바와 같이 (2)와 같은 시스템 행렬을 가지는 시스템의 H_∞ 놈 $\|T_{zw}\|_\infty$를 최소화하는 정적출력 제어기를 설계하는 문제는 다음과 같은 LMI를 만족하는 양한정 행렬 P, Q와 양의 실수 γ를 구하는 문제로 표현된다.

$$\min_{P,Q} \ \gamma \qquad \text{subject to}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_2^T \\ \tilde{D}_{21}^T \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} P\tilde{A} + \tilde{A}^T P & P\tilde{B}_1 & \tilde{C}_1^T \\ \tilde{B}_1^T P & -\gamma I & \tilde{D}_{11}^T \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C}_2^T \\ \tilde{D}_{21}^T \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ \tilde{D}_{12} \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} \tilde{A}Q + Q\tilde{A}^T & Q\tilde{C}_1^T & \tilde{B}_1 \\ \tilde{C}_1 Q & -\gamma I & \tilde{D}_{11} \\ \tilde{B}_1^T & \tilde{D}_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ \tilde{D}_{12} \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} \ge 0$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} = n \qquad (5)$$

LMI (4)와 계수조건 (5)를 만족하는 P, Q가 얻어지면 제어이득 K는 수치적인 방법이나 해석적인 방법으로 쉽게 구할 수 있다.

여기서 마지막 (5)의 비선형 대수 방정식이 이 문제를 비볼록으로 만드는 계수조건이며 본 논문에서는 이와 같은 형태의 선형행렬부등식 문제를 푸는 방법을 제시하고자 한다.

3. 페널티 함수를 이용한 비볼록 LMI 문제의 해법

계수조건이 있는 LMI 최적화 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\min && c^T x \\ &\text{subject to} && X(x) \ge 0, L(x) > 0 \\ & && \operatorname{rank}\ (X(x)) \le r \end{aligned} \qquad (6)$$

여기서 x는 구하고자 하는 변수(decision vector)이고 $X(x), L(x)$는 x에 관한 아핀(affine) 함수이다. 또한 r은 X의 전계수(full rank)보다 작다고 가정한다.

문제 (6)에서 페널티 함수를 고려한 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\varphi(x;\rho,\mu,V) = \rho c^T x + \mathbf{tr}\ (\mathrm{X}) + \mu \mathrm{p}(\mathrm{x};\mathrm{V}) \qquad (7)$$

여기서 μ는 페널티 변수이고 페널티 함수 $p(x;V)$는

$$p(x;V) = \mathbf{tr}\ (V^T X V) \qquad (8)$$

이며 ρ는 최적화를 위한 하중값이다. 또한 $\mathbf{tr}(X)$는 다른 고유치에 대한 상대적인 하중을 주기 위해서 추가되었다. 만약 X의 고유치가 $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$ 이라고 하면 (7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\varphi(x;\rho,\mu,V) = \rho c^T x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \mu \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \qquad (9)$$

목적함수 (7)의 의미는 (9)로 보면 분명해진다. 즉, X의 작은 순서로 $(n-r)$개의 고유치를 최소화시키는 함수를 페널티 함수로 선택한 것이다.

(7)에서 페널티 변수를 변화시키면서 $p(x;V) = 0$이 되는 x를 구하면 주어진 계수조건을 만족하는 해가 얻어지고 계속해서 하중값 ρ를 변화시키면 지역적으로 최적인 해를 얻을 수 있다. 따라서 계수조건이 있는 문제 (6)은 다음과 같이 계수조건이 없고 페널티 함수가 포함된 목적함수의 최적화 문제로 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \varphi(x;\rho,\mu,V) \\ &\text{subject to} && x \in \Omega \end{aligned} \qquad (10)$$

여기서

$$\Omega = \{ x : X(x) \ge 0,\ L(x) > 0 \}$$

이다.

페널티 함수를 이용하여 비볼록 LMI 최적화 문제의 해를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

[알고리즘 1] 페널티 함수를 이용한 비볼록 LMI 문제의 해법 (Penalty Function Method : PFM)

(단계 1) 초기화. 페널티 변수 $\mu = 0$, $\rho_0 \gg 1$으로 놓고 다음의 LMI 최적화 문제의 해를 구한 후

$$x_0 = \min_x \{ \rho c^{\mathrm{T}} \mathrm{x} + \mathbf{tr}\ (\mathrm{X}) : \mathrm{x} \in \Omega \}$$

$x_k = x_0,\ \mu_k = \mu_0,\ \rho_k = \rho_0,\ \alpha \in (0,1),\ \tau > 1,\ \xi > 1,$ $\epsilon_1 \ll 1, \epsilon_2 \ll 1, \beta \ll 1$ 로 놓는다.

(단계 2) 행렬 V 계산. $X(x_k)$ 로부터 고유치 분해를 이용하여 V_k 행렬을 구한다.

(단계 3) 볼록 최적화 수행. 다음 LMI 최적화 문제를 풀어 x_{k+1}을 구한다.

$$x_{k+1} = \min_x \{ \rho_k c^T x + \mathbf{tr}\ (X) + \mu_k p(x;V_k) : x \in \Omega \}$$

(단계 4) 가능해 여부 시험 (feasibility test). 만약 $p(x_{k+1};V_k) < \epsilon$ 이면 주어진 계수조건을 만족하는 가능해를 얻은 것으로 한다.

(단계 5) 최적해 여부 시험(optimality test). 만약 x_{k+1}이 가능해이고 $|c^T x_{k+1} - c^T x_k| \le \epsilon_2$ 이면 지역적인 최적해를 얻은 것으로 보고 프로그램을 종료한다.

(단계 6) 페널티 변수 갱신. 만약 x_{k+1} 이 가능해가 아니고 $p(x_{k+1};V_k) > \alpha p(x_k;V_{k-1})$ 이면 페널티 변수를 $\mu_{k+1} = \tau \mu_k$ 로 증가시킨다.

(단계 7) 최적화 하중변수 갱신. 만약 x_{k+1} 이 가능해이고 $|c^T x_{k+1} - c^T x_k| \le \beta$ 이면 최적화 하중변수 ρ를 $\rho_{k+1} = \xi \rho_k$ 로 증가시킨다.

(단계 8) 다음 스텝 수행. $k = k+1$ 로 놓고 단계 2 로 간다.

PFM 알고리즘은 고유치 분해 부분을 제외하면 CCL 법과 거의 비슷하다. 하지만 조정 변수인 페널티 변수에 의해서 CCL 법보다 좋은 성능을 가지게 된다.

4. 시뮬레이션

본 논문에서 제안하고 있는 알고리즘을 시험하기 위해서 시뮬레이션을 수행하였다.

[예제] 이 예는 [10,11]에서 사용한 예이다. 시스템 행렬은

지면관계상 생략한다. 이 경우 1차 H_∞ 제어기를 설계하였으며 참고문헌의 설계 결과와 비교하여 표 1에 나타냈다. 표에서 알 수 있는 바와 같이 PFM으로 가장 좋은 결과를 얻었으며 계산에 사용된 변수는 다음과 같았다.

$$\mu_0 = 1200, \alpha = 0.98, \tau = 1.2, \rho = 10^5, \xi = 1.01$$

최종적으로 계산된 제어기는 다음과 같다.

$$A_c = -0.8462, B_c = [-0.0262 \;\; -0.5451]$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 3.5013 \\ 19.8012 \end{bmatrix}, D_c = \begin{bmatrix} 0.7336 & 0.0874 \\ 0.1874 & -1.1911 \end{bmatrix}$$

표 1. 예제 시스템에 대한 계산 결과 비교

	PFM	Apkarian[9]	Calafiore[10]
γ	1.723	1.821	4.8937

그림 1 은 이때 PFM의 계산 특성을 나타내고 있다. 그림 1에서 맨 위는 페널티 함수 대신 $\|PQ-I\|_F$ 를 표시하고 있다.

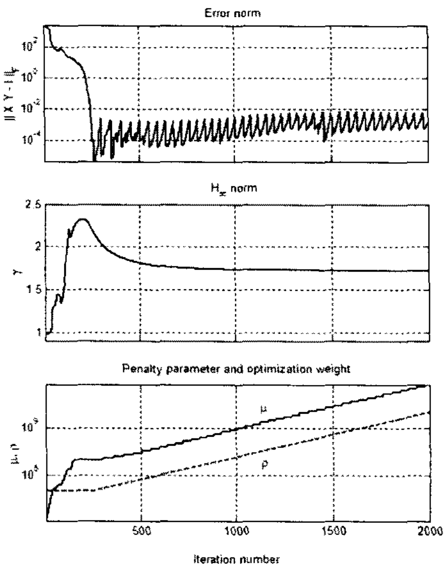

그림 1. 예제 시스템에 대한 PFM의 계산 특성

이상의 결과에서 볼 때 본 논문에서 제안하고 있는 페널티 함수법이 다른 결과와 비교해서 뒤지지 않는다는 사실을 확인할 수 있었다. 따라서 계수조건이 있는 LMI 문제로 표현되는 비슷한 제어기 설계 문제에도 적용할 수 있다고 판단되었다.

5. 결론

본 논문에서는 저차원 H_∞ 제어기를 설계하는 방법에 대해서 연구하였다. 이를 위해 저차원 H_∞ 제어기를 계수조건이 있는 LMI 최적화 문제로 변환하고 변환된 비볼록 LMI 최적화 문제를 페널티 함수를 이용하여 반복적으로 푸는 알고리즘을 제안하였다. 페널티 변수를 증가시키면서 순차적인 LMI 문제의 해를 구하면 그 해는 항상 계수조건을 만족시키려는 방향으로 구해진다는 것을 알 수 있었다.

제시된 방법으로 시뮬레이션을 수행할 결과 충분히 효용성이 입증되었으며 계수조건이 있는 LMI 문제로 표현되는 강인제어 및 다목적 제어 등에도 활용될 수 있는 가능성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] K. C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos, "A global optimization approach for the BMI problem", In Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, pp. 2009-2114, 1994.

[2] J. C. Geromel, C. C. de Souza and R. E. Skelton, "LMI numerical solution for output feedback stabilization", In Proc. of the American Control Conference, pp. 40-44, 1994.

[3] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "The XY-centering algorithm for the dual LMI problem : a new approach to fixed order control design", International Journal of Control, Vol. 62, No. 6, pp. 1257-1272, 1995.

[4] K. M. Grigoriadis and R. E. Skelton, "Low order control design for LMI problems using alternating projection methods", Automatica, Vol. 32, No. 8, pp. 1117-1125, 1996.

[5] T. Iwasaki, "The dual iteration for fixed order control", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, No. 4, pp.783-788, 1999.

[6] L. El Ghaoui, F. Oustry and M. Rami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 42, No. 8, 1171-1176, 1997.

[7] M. C. de Oliveira and J. C. Geromel, "Numerical comparison of output feedback design methods", In Proc. of the American Control Conference, pp. 72-76, 1997.

[8] M. Fazel H. Hindi and S. Boyd, "Log-det heuristic for matrix rank minimization with application to Hankel and euclidean distance matrices", In Proc. of the American Control Conference, pp. 2156-2162, 2003.

[9] D. Noll, M. Torki and P. Apkarian, "Partially augmented Lagrangian method for matrix inequalities constraints", Preprint, Available from http://www-ext.cert.fr/dcsd/cdin/apkarian.

[10] P. Apkarian, D. Noll and H. D. Tuan, "Fixed-order H_∞ control design via a partially augmented Lagrangian method", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 13, pp. 1137-1148, 2003.

[11] G. Calafiore. F. Dabbene and R. Tempo, "Randomized algorithms for reduced order H_∞ controller design", In Proc. of the American Control Conference, pp. 3837-3839, 2000.