

루프 형성 기법을 이용한 IMC-PID 제어기 동조

IMC-PID Controller Tuning using Loop Shaping Method

김창현*, 임동균**, 서병설***
 (Chang-Hyun Kim, Dong-Kyun Lim and Byung-Suhl Suh)

Abstract - This paper proposed new IMC-PID controller design method that use loop shaping method. It could consider such design specifications as gain margin, phase margin, sensitivity function etc by applying the loop shaping method for tuning IMC-PID controller whose structure has only one design parameter and guarantees internal stability. To shape desirable loop gain, the relation between these design specification and parameter is derived by mathematical basis. And the availability of proposed in this paper tuning method that can regard design specifications is checked through example comparison and analysis.

Key Words : IMC-PID, loop shaping method, internal stability, stability robustness, performance-robustness

1. 서론

시스템의 제어는 단순히 출력의 성능과 안정도만으로 평가되어 질 수 없고 내부 안정도, 성능-강인성 뿐 아니라 안정-강인성 등도 같이 고려되어 져야 한다. 또한 제어기 설계에 있어서의 간편성 역시 중요하게 다루어 져야만 한다. 이러한 면에서 Morari와 Zafiriou(1989)^[1]가 제안한 IMC (internal model controller) 구조의 PID 제어기가 내부 안정성(internal stability)이 보장되며 출력이 입력을 완전하게 추종하는 완전 제어(perfect control)를 보장할 수 있는 장점과 설계 변수가 한 개라는 편리성을 갖고 있다. 구조상으로는 모델링 오차에도 불구하고 완전 제어를 하지만 실제로 모델링 오차가 커지면 내부 안정성(internal stability)이 보장되지 않아 결국 전체 시스템이 불안정하게 되기 때문에 명령추종은 모델링 오차가 전체 폐루프 시스템을 불안정하게 하지 않는 범위 내에서만 유지된다. 그러므로 실제 플랜트와 최소한의 오차만을 가지는 모델의 선정과 추종 성능과 모델링 오차에 대한 강인성 사이의 성능-강인성을 갖게 하는 제어기의 설계 변수 값 선정이 IMC-PID 제어기의 설계 절차라 하겠다. 본 논문에서는 시스템 식별은 Suh-Lim (1997)^[2]방법을 사용하였고 IMC-PID 제어기의 동조에 있어서는 루프 형성 기법을 적용함으로써 이득 여유, 위상 여유, 감도함수 등의 설계 사양과 설계 파라미터 사이의 관계를 수학적 근거에 의해서 유도하여 해석적으로 루프 이득을 형성하는 방법을 제안하였다.

2. IMC-PID 제어기 설계

2.1 IMC-PID 제어기의 구조와 설계

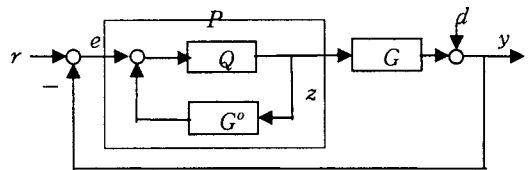


그림 2.1 일반적인 제어기 구조의 IMC제어기

G : 제어 대상 플랜트 G^o : 플랜트의 모델
 Q = FQ^o F : 강인성 필터

Q^o : G = G^o라는 가정 하에서 설계된 공칭 제어기
 IMC 제어 구조로 PID 제어기 설계 절차를 유도하기 위해 고려한 일반적인 IMC 구조는 그림 2.1과 같다.

공칭모델 G^o(s) = G^{o_m}G^{o_nm}으로 분리 되는데 여기서 G^{o_m}은 최소 위상, G^{o_nm}은 크기는 1인 비최소 위상이라고 가정한다. 필터 Q는 공칭폐루프 전달함수를 설계자가 원하는 형태가 되고 공칭모델의 최소 위상 부분을 보상할 수 있도록 식 (1)과 같이 선정하고 제어기 P는 식 (2)과 같다.

$$Q(s) = \frac{F(s)}{G^o_m(s)}, \quad F(s) = \frac{1}{(T_F s + 1)^n} \quad (1)$$

여기서 n은 G^{o_m}의 차수

$$P(s) = \frac{Q(s)}{1 - G^o(s)Q(s)} = \frac{F(s)}{G^o_m(s) - G^o(s)F(s)} \quad (2)$$

공칭 모델 G^o가 식 (3)이라면 G^{o_m}와 F는 식 (4)가 된다.

$$G^o(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} e^{-d_m s} \quad (3)$$

$$G^o_m(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1}, \quad F(s) = \frac{1}{T_F s + 1} \quad (4)$$

저자 소개

* 學生會員 : 漢陽大學 電氣工學科 碩士課程

** 正會員 : 漢陽Cyber大學 컴퓨터工學科 教授

*** 正會員 : 漢陽大學 電子電氣컴퓨터工學部 教授(교신 책임자)

식 (3)과(4)를 식(2)에 대입하고 $e^{-d_m s}$ 를 1차 파데 근사하고 정리하면 식(5)과 같다.

$$P(s) = \frac{1}{K_m(d_m + T_F)s} \frac{(\tau_m s + 1)(\frac{d_m}{2}s + 1)}{\frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)}s + 1} \quad (5)$$

PID 제어기의 전달함수는 식(6)과 같고 PID 제어기 설계 변수는 식(5)으로부터 식(7),(8),(9) 그리고 (10)와 같이 유도할 수 있다.

$$P(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}}) \quad (6)$$

$$T_i = \tau_m + \frac{d_m}{2} - \frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} \quad (7)$$

$$T_d = \frac{\tau_m d_m}{2 T_i} - \frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} \quad (8)$$

$$K_p = \frac{T_i}{K_m(d_m + T_F)} \quad (9)$$

$$N = \frac{2 T_d(T_F + d_m)}{T_F d_m} \quad (10)$$

위 식으로부터 IMC-PID 제어기의 설계변수는 T_F 이고 이 값을 선정하면 IMC-PID 제어기가 설계되는 것이다.

Morari와 Zafriou는 설계변수 T_F 를 선정하는 조직적인 방법을 제시하지 못하였고 단지 $T_F = 0.25d_m$ 를 제시 하였다. Maffezzoni - Rocco^[3] 는 T_F 를 선정하기 위해 H_∞ 제어 기법을 이용하여 성능-강인성(performance-robustness)을 보장하고자 했으나 응답 시간이 길어지는 것과 가중치 함수를 구해야하는 단점이 있어 이를 개선하기 위한 연구로 루프 형성 기법(loop shaping method)을 이용한 강인한 IMC-PID 제어 기 동조 방법을 제안한다.

2.2 루프 형성 기법을 이용한 방법

제어 시스템의 주파수 영역에서 성능을 나타내는 여러 설계 사양의 성능 조건과 안정도-강인성 조건을 만족하는 루프 전달 함수를 만들기 위해 설계변수 T_F 를 선정하는 것이 루프 형성 기법을 이용한 파라미터 동조 방법이다. 바람직한 루프 형상을 만들기 위하여 우선적으로 고려해야 하는 이득 여유와 위상 여유뿐만 아니라 시스템의 수행 성능의 지표인 $\|S\|_\infty$, $\|T\|_\infty$ (감도함수, 페루프 전달함수의 최대치)를 모델링 오차가 없다는 가정 하에 수학적으로 유도함으로 수행 성능과 안정도-성능을 절충 할 수 있는 T_F 값을 선정한다.

[정리1] IMC-PID에서 위상 교차 주파수 w_p 와 이득 여유 GM은 식 (11), (12)과 같다.

$$w_p = \frac{2\sqrt{d_m T_F + T_F^2}}{d_m T_F} \quad (11)$$

$$GM = \sqrt{\frac{(-d_m T_F w_p^2)^2 + (2(d_m + T_F) w_p)^2}{4 + (d_m w_p)^2}} \quad (12)$$

[증명] 개루프이득 함수 식(13)에서 w_p 는 위상 각이 180° 인 주파수이므로 식(14)를 만족해야 한다.

$$L(s) = P(s)G(s) = \frac{(-\frac{d_m}{2}s + 1)}{\frac{d_m T_F}{2}s^2 + (d_m + T_F)s} \quad (13)$$

$$-\tan^{-1}(\frac{d_m}{2} w_p) - \tan^{-1}(\frac{d_m T_F w_p}{2(d_m + T_F)}) - 90^\circ = -180^\circ \quad (14)$$

식(14)의 양변에 \tan 를 취해서 정리하면 식(15)이고 이 식을 만족하는 w_p 는 분모를 0으로 만드는 식 (16)이다.

$$\frac{(\frac{d_m}{2} w_p) + (\frac{d_m T_F w_p}{2(d_m + T_F)})}{1 - (\frac{d_m}{2} w_p)(\frac{d_m T_F w_p}{2(d_m + T_F)})} = \infty \quad (15)$$

$$w_p = \frac{2\sqrt{d_m + T_F}}{d_m \sqrt{T_F}} = \frac{2\sqrt{d_m T_F + T_F^2}}{d_m T_F} \quad (16)$$

그리고 이 주파수에서 GM은 식(17)과 같이 구할 수 있다.

$$GM = \left| \frac{-d_m T_F w_p^2 + j 2(d_m + T_F) w_p}{2 - j d_m w_p} \right| \quad (17)$$

Q.E.D

[정리2] IMC-PID에서 이득 교차 주파수 w_c 와 위상 여유 GM은 식 (18), (19)와 같다.

$$w_c = \sqrt{\frac{-(4(d_m + T_F)^2 - d_m^2) + \sqrt{(4(d_m + T_F)^2 - d_m^2)^2 + 16d_m^2 T_F^2}}{2d_m^2 T_F^2}} \quad (18)$$

$$PM = 180^\circ + [\tan^{-1}(\frac{-d_m w_c}{2}) - \tan^{-1}(\frac{2(d_m + T_F)}{d_m T_F w_c})] \times \frac{180^\circ}{\pi} \quad (19)$$

[증명] $|P(jw_c)G(jw_c)| = 1$ 인 이득 교차 주파수 w_c 는 식(20)를 만족하고 이를 정리하면 식(21)이 얻어진다.

$$\left| \frac{2 - j d_m w_c}{-d_m T_F w_c^2 + j 2(d_m + T_F) w_c} \right| = 1 \quad (20)$$

$$d_m^2 T_F^2 w_c^4 + (4(d_m + T_F)^2 - d_m^2) w_c^2 - 4 = 0 \quad (21)$$

식 (21)을 풀면 이득 교차 주파수 w_c 는 식(18)이 되고 위상 여유는 식(22)이므로 정리하면 식(23)을 거쳐 (24)가 된다.

$$PM = 180^\circ + \angle L(jw_c) \quad (22)$$

$$= 180^\circ + \angle \left| \frac{2 - j d_m w_c}{-d_m T_F w_c^2 + j 2(d_m + T_F) w_c} \right| \quad (23)$$

$$= 180^\circ + [\tan^{-1}(\frac{-d_m w_c}{2}) - \tan^{-1}(\frac{2(d_m + T_F)}{d_m T_F w_c})] \times \frac{180^\circ}{\pi} \quad (24)$$

Q.E.D

[정리3] 감도 함수의 최대값 $\|S\|_\infty$ 과 공진 주파수 w_r , 대역폭 w_{BS} 은 다음과 같다.

$$w_r = \sqrt{\frac{-b^2 - \sqrt{b^4 - (a^2 - 2b - c^2)c^2 b^2}}{a^2 - 2b - c^2}} \quad (25)$$

$$\|S\|_\infty = \frac{\sqrt{w_r^4 + c^2 w_r^2}}{\sqrt{(b - w_r^2)^2 + a^2 w_r^2}} \quad (26)$$

$$w_{BS} = \sqrt{\frac{(a^2 - 2b^2 - 2c^2) + \sqrt{(a^2 - 2b^2 - 2c^2)^2 + 4b^2}}{2}} \quad (27)$$

$$a = \frac{d_m + 2T_F}{d_m T_F} \quad (28), \quad b = \frac{2}{d_m T_F} \quad (29), \quad c = \frac{2(d_m + T_F)}{d_m T_F} \quad (30)$$

[증명] 감도 함수 $S(s)$ 는 식 (31)이다.

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)G(s)} = \frac{s^2 + cs}{s^2 + as + b} \quad (31)$$

여기에 $s = jw$ 을 대입하면 그 크기는 다음 식(32)과 같고 감도함수를 최대로 하는 주파수가 최대 공진 주파수 w_r 이다.

$$|S(jw)| = \frac{\sqrt{w^4 + c^2 w^2}}{\sqrt{(b - w^2)^2 + a^2 w^2}} \quad (32)$$

감도 함수를 최대로 만드는 w_r 는 식 (33)을 만족하므로 이를 정리하면 식(34)가 얻어지고 이를 풀면 w_r 는 식(25)로 유도된다. 여기서 유도된 w_r 를 식(32)에 대입하면 식(26)이다.

$$\frac{d|S(jw_s)|}{dw} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{(2w_s^3 + c^2w_s)\sqrt{(w_s^2 - b)^2 + a^2w_s^2}}{\sqrt{w_s^4 + c^2w_s^2}} + \frac{(2w_s(b - w_s^2) - a^2w_s)\sqrt{w_s^4 + c^2w_s^2}}{\sqrt{(b - w_s^2)^2 + a^2w_s^2}} = 0 \quad (34)$$

감도 함수의 대역폭 w_{BS} 는 이득이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이 되는 주파수므로

$$|S(jw_{BS})| = \frac{\sqrt{w_{BS}^4 + c^2w_{BS}^2}}{\sqrt{(b - w_{BS}^2)^2 + a^2w_{BS}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (35)$$

이 되고 이를 만족하는 w_{BS} 는 식 (27)로 구해진다. Q.E.D 수학적으로 증명된 위의 설계 사양들을 고려해서 설계변수 T_F 를 선정하면 IMC-PID 제어가 설계되는데 본 논문에서는 $\|S\|_{\infty} \leq 1.5$ 를 만족하는 T_F 값을 선정했다.^[4]

3. 시뮬레이션 및 결과 비교

사례 연구에서는 비교적 큰 지연 시간을 갖는 시스템으로 Yuwana-Seborg(1982)^[5], Chen(1989)^[6], Lee(1990)^[7]등에 의해 시뮬레이션상 서로의 우수성을 입증하기 위하여 비교 대상이 되어 온 대표적인 시스템을 선정하였다.

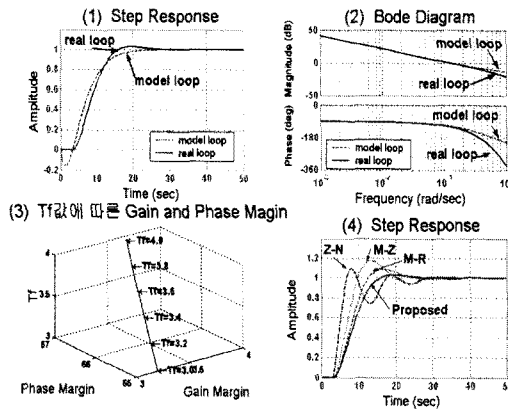
$$G_p(s) = \frac{e^{-3s}}{(s+1)^2(2s+1)} \quad (36)$$

플랜트 응답 데이터로부터 Suh-Lim(1997) 방법으로 구한 추정 모델의 변수 값은 표 3.1과 같다.

표 3.1 사례 연구에 대한 추정 모델의 변수

추정모델변수	K_m	τ_m	d_m
크 기	1.0	1.54	4.93

IMC-PID 설계 변수, T_F 는 $\|S\|_{\infty} \leq 1.5$ 를 만족하는 T_F 값 중에서 Phase Margin과 Gain Margin을 가장 크게 하는 값으로 $T_F = 3.6$ 을 선정하였다.



모델 루프와 실제 루프와의 주파수 영역 설계 사양은 표 3.2 에서 비교 하였다.

표 3.2 모델 루프와 실제 루프의 설계 사양 비교

설계 사양	Wp	GM	Wc	PM	Ws	$\ S\ _{\infty}$
Model loop	0.625	3.461	0.121	66.145	0.392	1.500
Real loop	0.371	3.079	0.118	62.424	0.277	1.596

제안된 방법이 다른 동조 방법보다 상승시간은 다소 느리지만 가장 작은 overshoot와 가장 빠른 정착 시간을 보임을 통해 상당히 훌륭한 동조 효과를 나타냄을 알 수 있다.

3. 결 론

Morari-Zafriou(1989)가 제안한 IMC 구조의 PID 제어기 동조 방법은 페루프의 내부에 공칭 모델이 들어있어 이의 출력과 플랜트의 출력의 차를 피드백하는 구조로 이루어져 있기 때문에 제어기 설계 절차가 간단하고 강인성 문제를 명확하게 할 수 있다. 이러한 IMC-PID 제어기의 설계는 공칭 모델의 선정과 설계 인자의 동조가 중요 과제인데 본 논문은 시스템 식별과정에서는 Suh-Lim(1997) 방법을 사용하였고 IMC -PID 제어가 동조 방법에는 루프 형성 기법을 도입하여 수학적 근거에 의해 유도된 이득 여유, 위상 여유, 감도 함수 등의 설계 사양을 만족하는 루프 형상을 해석적으로 선정할 수 있는 조직적인 방법을 제시하였는데 그 의의가 있다. 앞으로의 과제로는 모델링 오차로 인해 발생하는 실제 플랜트의 주파수응답과의 차이를 줄이는 방법과 시간영역에서의 설계 사양을 고려 할 수 있는 제어 인자의 선정, 다변수인 경우에도 적용 할 수 있는 연구가 추가로 수행되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Morari, M., Zafriou, E., " Robust process control", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1989.
- [2] Suh, B. S., Lim, D. K. " New PID identification algorithm based on frequency scaling ",Circuits and Systems, 1997. Proceedings of the 40th Midwest Symposium on , vol. no. 1, pp. 654-658, 1998
- [3] Maffezzoni, C. and Rocco, P., " Robust Tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification", European Journal of Control, pp. 125-136, Mar. 1997.
- [4] Skogestad, S. and Postlethwaite, I., " Multivariable Feedback Control : Analysis and Design", John Wiley & Sons, 1996.
- [5] Yuwana, M. and D. E. Seborg, "A New Method for On-Line Controller Tuning", AIChE, pp. 434-440 Jour. 1982.
- [6] Chen, C.L., "A Simple Method for On-Line Identification and Controller Tuning", AIChE., pp. 2037-2039, Jour. 1989.
- [7] Lee, J. T. and Cho, W. H. and Edgar, T. F. "An Improved Technique for PID Controller Tuning from Closed-Loop Tests", AIChE, pp.1891-1895, Jour. 1990.
- [8] Ziegler, J. G. and N. B. Nichols, "Optimum Settings for Automatic Controllers", Trans. ASME, vol 64, pp. 759 - 768, 1942