

선형 스위칭 시스템의 관측기 기반 제어

Observer-based Control for Switched Linear Systems

염동희*, 임기홍*, 최진영**
(Yeom Dong-Hae, Im Ki-Hong, and Choi Jin-Young)

Abstract - In the previous work, we proposed a new stability criterion for the stability of switched linear systems. By the proposed criterion, we could simply check the stability of switched linear systems because the criterion is applicable to each individual subsystem without need to consider the overall system. Using this criterion, we provided the methods that design a state feedback control when full states are available. In this paper, we apply the same criterion to the case when full states are not available. Unlike existing method such as dwelling time analysis, the proposed method is suitable to a fast switching process because there is no need to consider dwelling time. And we can easily achieve designing multi-controller, multi-estimator, and the supervisor by means of the proposed method.

Key Words : Switched linear systems, Stability criterion, Output feedback control, Multi-controller, Multi-estimator

1. 서론

스위칭 시스템이란 스위칭 신호에 따라 다른 시스템으로 전환되는 시스템을 말한다. 특히, 주어진 부시스템들이 선형 시스템인 경우, 선형 스위칭 시스템이라 부른다. 이러한 선형 스위칭 시스템이 주목받는 이유는 비선형 시스템을 비롯한 많은 제어시스템이 비교적 단순한 LTI 시스템간의 스위칭으로 구현가능할 뿐 아니라 성능향상도 기대되기 때문이다[4].

이전의 논문[11]에서는 선형 스위칭 시스템의 안정성을 판별하는 새로운 판별법을 제시하였으며, 이를 이용하여 상태 제한 스위칭 제어를 설계하는 방법을 제안하였다. 이 경우, 시스템의 상태변수를 모두 알고 있어야 한다는 가정이 필요했으며, 특별한 경우에 한해 출력만을 이용한 출력 제한 제어기의 설계가 가능하였다. 그러나 많은 경우, 비용 또는 물리적 한계로 인해 시스템의 모든 상태변수를 파악하기는 어려우므로, 상태변수를 추정하기 위한 관측기가 요구된다. 여기서 주어진 프로세서 자체가 몇 개의 LTI 시스템으로 구성된 스위칭 시스템이므로 각 부시스템에 해당하는 다수의 관측기(multi estimator)를 설계하여야 하며, 제어기 역시 각 관측기에 대응하는 다수의 제어기(multi controller)를 갖추어야 한다. 그리고 이와 같이 구현된 다수의 관측기와 제어기중 어느 것을 사용할 것인가를 결정하는 감독기(supervisor)가 필요하다. 일반적으로 이와 같은 제어시스템은 그림 1과 같은 구조를 갖는다. 본 논문에서는 기존의 결과[11]를 이용하여, 모든 상태변수를 알 수 없는 경우, 출력 제한으로부터 다중관

측기, 다중제어기 및 감독기를 설계하는 문제를 다룬다.

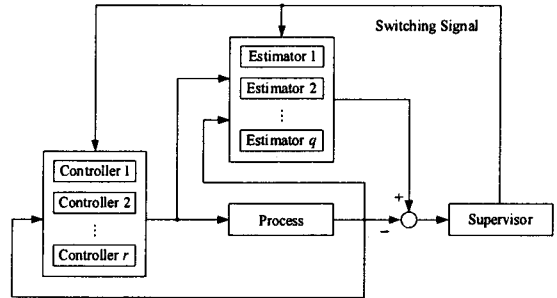


그림 1. 대상 시스템의 개념도

이 문제와 관련하여 이미 많은 연구결과[1-10]들이 보고되어있으며, 그 중에서도 거주시간(dwelling time) 해석이 대표적인 방법이다. 이 방법은 스위칭으로 인해 야기되는 바람직하지 못한 과도현상이 충분히 감쇄될 만큼 스위칭이 느리게 일어난다면 전체 시스템의 안정성을 도모할 수 있다는 사실에 근거한다. 즉, 각 스위칭사이에 적어도 거주시간이상의 시간간격이 존재해야 한다. 그러나 필요한 거주시간을 보장하기 위해서 시스템의 스위칭을 억제해야 하므로 다음과 같은 몇 가지 문제점을 가지고 있다.

첫째, 특정한 순간에 목적에 부합하는 가장 적절한 제어기로 스위칭해야 할 필요에도 불구하고 거주시간동안 스위칭이 허용되지 않으므로 시스템의 성능이 저하된다. 둘째, 다중 관측기로부터 얻어진 추정오차중 최소의 오차를 가지는 관측기를 사용한다는 일반적인 필요와 너무 빈번한 스위칭은 허용되지 않는다는 거주시간의 제약이 서로 상충된다. 셋째, 이와

저자 소개

* 準 會 員 : 서울大學 전기컴퓨터工學科 博士課程

** 正 會 員 : 서울大學 전기컴퓨터工學科 副教授 · 工博

같이 서로 상충되는 조건을 모두 만족시키기 위한 감독기를 구현하기 위해 인위적이며 복잡한 논리를 사용하여야 한다. 넷째, 필요한 거주시간보다 빠른 스위칭 특성을 가진 프로세서에는 부적합하다.

본 논문에서는 이상에서 언급된 문제를 해결하기 위해 이전의 논문[11]에서 제안한 새로운 안정성 판별법과 상태 궤환 제어기 설계방법을 이용한다. 그리고 스위칭에도 불구하고 전체 시스템의 가관측성(detectability)이 유지됨[8]을 이용하여 시스템의 점근 안정성을 보인다. 제안된 방법의 장점은 임의의 스위칭 신호에 대해 전체 시스템의 안정성을 보장함으로써, 거주시간의 제약을 받지 않는다는 것이다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. 2장에서는 다루고자 하는 문제를 구체적으로 기술하고, 기존의 거주시간 해석을 간단히 소개한다. 3장에서는 새로운 안정성 판별법을 이용하여 다중 관측기, 다중 제어기 및 감독기를 설계한다. 4장에서는 결론과 향후 연구과제에 대해 언급한다.

2. 기존의 관측기 기반 제어기

관측기 기반의 스위칭 제어기에 관해 많은 연구가 수행되어 왔다[1,6,7]. 대부분의 경우, 그림 2와 같은 구조를 가지는 시스템을 대상으로 한다. 이와 같은 구조를 가지는 제어 시스템의 착상은 매우 단순하며 자연스러운 것이다. 즉, 다수의 LTI 시스템으로 구성된 프로세서의 모든 상태변수를 알 수 없으며 단지 출력만이 측정 가능한 경우, 다중 관측기의 후보군 \hat{A} 로부터 가장 적절한 관측기를 선택한다. 그리고 제어기 역시 다중 제어기 후보군 \hat{A} 로부터 선택된다. 이와 같은 관측기 또는 제어기의 선택은 논리 기반의 감독기 \hat{O} 가 생성하는 스위칭 신호 σ 에 의해 결정된다.

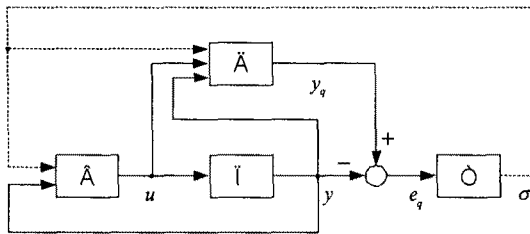


그림 2. 관측기 기반의 제어시스템

이러한 시스템의 제어기법중 가장 대표적인 기법은 거주시간 해석을 통한 방법이다. 이 방법은 안정한 각 부시스템간의 스위칭으로 인해 발생하는 과도현상이 충분히 감쇄될 때까지 다음 스위칭을 억제함으로써 전체 시스템의 안정성도도모한다는 것이 기본적인 발상이다. 거주시간 해석의 결과 [5]를 간단히 소개하면, 먼저 다음과 같은 시스템의 집합을 생각하자.

$$\dot{x} = A_p x, p \in P$$

여기서 p 는 시스템의 인덱스(index)이다. 만약 아래의 조건을 만족하는 미분 가능한 함수 $V_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 와 클래스 K_∞ 함수 α_1 과 α_2 , 그리고 양의 상수 ξ 와 μ 가 존재한다고 가정하면

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V_p(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \forall x, \forall p \in P,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_p}{\partial x} A_p(x) &\leq -\xi V_p(x) \quad \forall x, \forall p \in P, \\ V_p(x) &\leq \mu V_q(x) \quad \forall x, \forall p, q \in P. \end{aligned}$$

다음과 같은 거주시간을 만족하는 임의의 스위칭 신호에 대해 전체 스위칭 시스템은 전역적 점근적으로 안정하다.

$$\tau_D > \frac{\log \mu}{\xi}$$

서론에서 언급한 바와 같이, 위의 결과는 일단 스위칭이 발생하면 적어도 주어진 거주시간동안 다음 스위칭이 발생해서는 안된다는 제약으로 인해 제어기와 관측기를 선택하는 가장 적절한 스위칭 타이밍을 보장할 수 없다. 물론 거주시간 τ_D 는 ξ 와 μ 의 선정에 따라 충분히 작은 값으로 조정할 수 있으나 이들은 위의 부등식들을 만족하는 상수이어야 하므로 임의의 값으로 선정할 수는 없다.

본 논문에서는 거주시간을 고려할 필요가 없는 스위칭기법을 소개함으로써 스위칭 시스템의 성능향상과 보다 단순한 논리기반의 감독기의 구현, 그리고 빠른 스위칭 특성을 가지는 프로세서의 제어문제 등 기존 방법의 단점들을 극복할 수 있는 제어기법을 제안한다.

3. 출력 궤환 제어기 및 관측기

기존의 연구[11]에서, 모든 상태변수가 사용가능한 경우 즉, 관측기가 필요 없는 제어 시스템에 대해 충분히 논의하였다. 여기에서는 출력을 제외한 프로세서의 내부 상태변수를 알 수 없는 경우에 대해 논의한다. 다음과 같이 가안정적(stabilizable)이고 가관측적(detectable)인 LTI 시스템으로 구성된 프로세서 \hat{I} 를 생각하자.

$$? : \begin{cases} \dot{x} = A_p x + b_p u \\ y = c_p^T x \end{cases}, p \in$$

여기서 p 는 시스템의 인덱스이다. 프로세서의 내부 상태변수를 알 수 없을 지라도, 특정시간에 어느 부시스템이 활성화되는가에 대한 정보를 즉시 알 수 있다면 문제는 매우 단순해진다. 즉, 활성화된 부시스템에 해당하는 관측기와 제어기를 매 순간 선택하는 것만으로 시스템의 점근 안정성문제는 해결된다. 그러나 일반적으로 상태 의존적인 스위칭의 경우, 스위칭이 발생하는 정확한 순간과 경로는 상태변수에 의해 결정된다[5]. 시스템의 내부 상태변수를 알 수 없는 경우를 대상으로 하고 있으므로, 언제 어떤 부시스템이 활성화되는가에 대한 정보는 알 수 없다. 따라서 관측기와 감독기를 이용하여 어느 부시스템이 현재 활성화되어 있는지 추정하여야 한다.

프로세서의 동력학은 주어져 있으므로, 그림 2와 같이 제어기의 출력과 프로세서의 출력을 입력으로 하고 y_p 를 출력으로 하는 다중 관측기 \hat{A} 는 일반적인 Luenberger 관측기를 사용하여 다음과 같이 구현한다.

$$\hat{A} : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_q = A_q \hat{x} + b_q u + k_q (y - \hat{y}_q) \\ \hat{y}_q = c_q^T \hat{x} \end{cases}, q \in$$

여기서 q 는 시스템의 인덱스이다. 다중 제어기 \hat{A} 는 프로세서의 출력을 입력으로 하고 제어입력을 출력으로 하는 다음과 같은 동력학으로 구현한다.

4. 결론

여기서 r 는 시스템의 인덱스이다. 끝으로, 감독기 σ 는 프로세서 출력과 다중 관측기 출력사이의 오차중 최소값을 가지는 인덱스를 출력으로 하는 다음과 같이 단순한 논리로 구현한다.

$$\sigma(t) = \arg \min_{r \in \mathcal{P}} |e_r(t)|, \quad e_r = y_r - y$$

적절한 제어기와 관측기를 선택하는 가장 간단한 방법은 최소 오차를 가지는 감독기의 출력 인덱스 σ 를 직접 스위칭 신호로 사용하는 것이다. 따라서 결과적인 다중 제어기와 다중 관측기는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{A}: \begin{cases} \dot{x}_{\sigma} = F_{\sigma}x + g_{\sigma}y \\ u = h'_{\sigma}x_{\sigma} + d_{\sigma}y \end{cases} \\ \hat{A}_{\sigma}: \begin{cases} \dot{x}_{\sigma} = A_{\sigma}x + b_{\sigma}u + k_{\sigma}y \\ y_{\sigma} = c'_{\sigma}x_{\sigma} \end{cases} \end{aligned}$$

여기서 $x_{\sigma} = [x'_{\sigma} \ x']$ 라 두고, 추정 오차식 $e_{\sigma} = y_{\sigma} - y$ 를 이용하여 위 시스템을 통합하면 다음과 같이 확장된 시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\sigma} &= \begin{bmatrix} F_{\sigma} & g_{\sigma}c'_{\sigma} \\ b_{\sigma}h'_{\sigma} & A_{\sigma} + k_{\sigma}c'_{\sigma} + b_{\sigma}d_{\sigma}c'_{\sigma} \end{bmatrix} x_{\sigma} - \begin{bmatrix} g_{\sigma} \\ k_{\sigma} + b_{\sigma}d_{\sigma} \end{bmatrix} e_{\sigma} := \bar{A}_{\sigma}x_{\sigma} + \bar{b}_{\sigma}e_{\sigma} \\ y &= [0 \ c'_{\sigma}]x_{\sigma} - e_{\sigma} \\ u &= [h'_{\sigma} \ d_{\sigma}c'_{\sigma}]x_{\sigma} - d_{\sigma}e_{\sigma} \end{aligned} \quad (1)$$

확장된 시스템의 점근 안정성을 보이기 위해서는 두 가지 조건이 필요하다. 즉, 확장 시스템의 시스템 행렬 \bar{A}_{σ} 의 점근 안정성과 추정 오차 e_{σ} 의 0으로의 수렴성이 요구된다. [11]의 정리 2.1을 이용하여, 각 부시스템의 제어기가 다음조건을 만족하도록 설계하면 \bar{A}_{σ} 의 점근 안정성이 보장된다.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda(\bar{A}_{\sigma}) &< -1/2, \\ \lambda(\bar{A}_{\sigma} + \bar{b}_{\sigma}) &< -1. \end{aligned}$$

관측기 부분의 설계 파라메타인 k_{σ} 는 $A_{\sigma} + k_{\sigma}c'_{\sigma}$ 가 안정하도록 설정되어야 한다. 한편, 추정오차 e_{σ} 는 [1,5,9]에서 보인 바와 같이, 아래의 부등식을 만족하는 충분히 작은 $\eta > 0$ 와 프로세서 출력측의 측정잡음과 제어입력측의 외란에 의존하는 양의 상수 B_1, B_2 , 그리고 시스템의 초기조건에 의존하는 양의 상수 C_1, C_2 가 존재한다는 사실로부터 그 크기가 제한된다.

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{2\eta\tau} e_{\sigma}^2(\tau) d\tau &\leq B_1 e^{2\eta t} + C_1, \\ |e_{\sigma}(t)| &\leq B_2 + C_2 e^{-\eta t} \end{aligned}$$

문제를 단순화하기 위해 잡음과 외란이 없는 간단한 경우를 고려하자. 그러면 B_1, B_2 는 0이므로 위 식으로부터 추정오차 e_{σ} 가 0으로 수렴함을 알 수 있다. 따라서 확장된 관측기-제어기 동역학의 점근 안정성이 보장되며 식(1)로부터 제어입력 u 와 프로세서의 출력 y 가 0으로 수렴함을 알 수 있다.

주어진 프로세서를 구성하는 각 LTI 시스템이 가관측적이고 제어기가 관측기를 점진적으로 안정화시키면 프로세서의 가관측성이 유지된다(certainty equivalence stabilization theorem)[1,8]. 결과적으로, 프로세서는 가관측적이며 프로세서의 입출력이 모두 0으로 수렴하므로 내부 상태변수들도 0으로 수렴한다.

본 논문에서는 제안한 새로운 안정도 판별법을 이용하여 선형 스위칭 시스템의 점근 안정성을 보장하는 출력 궤환 제어기와 관측기 그리고 감독기를 설계하는 방법을 제시하였다. 제안하는 방법은 기존의 거주시간을 이용한 제어기법과는 달리 거주시간에 대한 제약이 없으므로 기존 방법의 문제점을 극복할 수 있다.

참고 문헌

- [1] J. P. Hespanha, "Tutorial on Supervisory Control," *Lecture Notes for the Tutorial Workshop*, the 40th Conference on Decision and Control, Orland, Dec. 2001.
- [2] J. P. Hespanha, D. Liberzon, A. S. Morse, B. D. Anderson, T. S. Brinsmead, and F. D. Bruyne, "Multiple Model Adaptive Control -Part 2: Switching," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11 : 479-496, 2001.
- [3] J. P. Hespanha, and A. S. Morse, "Stability of Switched Systems with Average Dwell-Time," *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pp. 2655-2660, Arizona USA, 1999.
- [4] D. J. Leith, R. N. Shorten, W. E. Leithead, O. Mason, and P. Curran, "Issues in the Design of Switched Linear Control Systems: A Benchmark Study," *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 17: 103-118, 2003.
- [5] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, Birkhauser, 2003.
- [6] A. S. Morse, "Supervisory Control of Families of Linear Set-Point Controllers-Part 1: Exact Matching," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 10, pp. 1413-1431, 1996.
- [7] A. S. Morse, "Supervisory Control of Families of Linear Set-Point Controllers-Part 2: Robustness," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42, No. 11, pp. 1500-1515, 1997.
- [8] A. S. Morse, "Toward a Unified Theory of Parameter Adaptive Control - Part II : Certainty Equivalence and Implicit Tuning," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 1, pp. 15-29, 1992.
- [9] C. D. Persis, F. D. Santis, and A. S. Morse, "Further Results on Switched Control of Linear Systems with Constraints," *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2810-2815, Nevada UAS, 2002.
- [10] Zhendong Sun, "Stability and Insensitivity of Switched Linear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, No. 7, pp. 1133-1137, 2004.
- [11] D. H. Yeom, K. H. Im, and J. Y. Choi, "Stabilization of Switched Linear Systems," *Proceedings of Information and Control Symposium*, Seoul, 2004.