

최적화 기법에 의한 회전형 역진자 시스템의 LQ-Servo 제어기 설계 및 구현

Design and Implementation of LQ-Servo Controller for Rotational Inverted Pendulum System Using Optimization Method

이강민*, 양지훈**, 서병설***
(Kang-Min, Lee, Ji-Hoon, Yang, Byung-Suhl, Suh)

Abstract - LQ-Servo controller inherits the stability-robustness from rational LQR structure and also, satisfies performance-robustness that is lacking in LQR structure by importing partial output feedback. In this paper, LQ-Servo controller is suggested for strengthening the performance-robustness. For this, Several executings are effectively performed by implementing to the rotational inverted pendulum system.

Key Words : LQR, LQ-Servo, Linear Programming, Rotational Inverted Pendulum, Implementation

1. 서론

제어기 설계에 있어서 안정도-강인성의 보장은 필수적인 조건인 동시에 명명추종 및 외란 제거를 목적으로 하는 성능-강인성을 보장하는 설계방법 또한 중요한 부분을 차지한다. 그리고 실용적인 측면에서 볼 때, 새로운 설계방법이 고안되더라도 실제로 시스템에 적용되어져 운용되는 데는 사실상 많은 제약조건이 존재하고 구현이 난해한 점이 있다. 특히, 다변수 시스템을 다룰 때는 문제의 가중도가 더 심해진다. 본 논문에서는 불안정하고 비선형의 기본 특성을 가진 단일입력 단일출력형의 회전형 역진자 시스템^{[1],[8]}을 사용하여, 고려된 설계방법^[5]이 얼마나 설계목적에 부합하고 유용성이 있는지 시험해 보고, 고찰 하고자 한다.

본 논문에서 고려한 LQ-Servo제어기^[5]는 LQR 구조에 부분적 출력 피드백을 도입하여 LQR 방법의 결여된 성능-강인성을 확보하고 또한 LQR 방법의 안정도-강인의 속성을 그대로 상속 받음으로써, 안정도 및 성능 강인성을 동시에 만족 하도록 함은 물론, 나아가 최적화 기법이 도입된, 향상된 성능-강인성을 확보할 수 있는 설계 구조를 가진다.

본 논문의 내용을 간략히 서술하면, 다음 2절에서 회전형 역진자 시스템의 모델을 제시하고, 3절에서는 기존의 LQ-Servo형 PI 제어기의 설계법^[6]을 서술하였다. 4절에서는 본 논문에서 고려한 제어기 설계기법^[5]에 관해 소개하였으며, 5절과 6절에서는 실험의 절차와 결과를, 끝으로 7절에서는 실험에서 나타난 결과를 바탕으로 검증 절차를 거치고, 향후 연구방향을 제시하였다.

2. 모델링

라그랑즈(Lagrange)역학에 의거한 그림 1의 회전형 역진자 시

자 소개

- * 準 會 員 : 漢陽大學 電氣工學科 碩士課程
- ** 準 會 員 : 漢陽大學 電子電氣컴퓨터工學部 博士課程
- *** 正 會 員 : 漢陽大學 電子電氣컴퓨터工學部 正教授(交信責任者)

스템의 선형화된 상태 공간 모델은 표 1의 시스템 사양에 따라 식 (1)과 같다^[1].

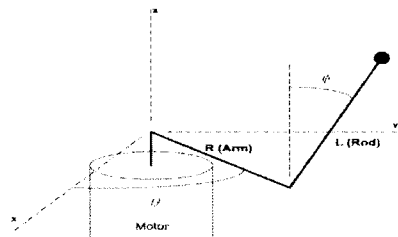


그림 1. 회전형 역진자 시스템

표 1. 회전형 역진자 시스템 사양

Physical Quantity	Value	Units
Pendulum Mass	0.070	Kg
Arm Length(R)	0.20	meter
Rod Length(L)	0.15	meter
Moment of Inertia	0.00394	Kg · m ²
Gear Ratio	51.24	
Armature Resistance	2.21	Ohm
Torque Constant	0.0242	Nm/A
Gravity Acceleration	9.80665	m/sec ²

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -34.8 & -176.5 & 0 \\ 0 & 111.8 & 235.4 & 0 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 142.4 \\ -189.8 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$C_p = [1000]$$

3. LQ-Servo형 PI 제어기

그림 2에서 볼 수 있듯이 LQ-Servo형 PI제어기는 부분적 상태관측 $x_r(t)$ 을 가진 PI제어기의 형태로 해석 가능하다. 이는 출

력계환 구조로부터 성능강인성을 확보하고 또한, 상태계환의 특성을 보유하여 안정도 강인성 향상에 기여하게 된다. 결론적으로 (3)의 모델과 같은 확장된 형태를 갖고 (4)의 제어법칙을 따르는 안정도-강인성 및 성능-강인성을 동시에 만족할 수 있는 제어기로 설계된다^[6].

$$\begin{aligned} x_p(t) &= [y_p(t) \ x_p(t)]^T \quad y_p(t) \in R^{n-m}, \ x_p \in R^m \\ \dot{z}_p(t) &= Jy_p(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= [z_p(t) \ x_p(t)]^T \quad x(t) \in R^{n+m} \\ \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ C_{\beta} &= \begin{bmatrix} I_{m \times n} & 0_{m \times (n-m)} \\ 0_{(n-m) \times m} & I_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix} \\ C_{\rho} &= \begin{bmatrix} 0 & C_p \\ 0 & A_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_p \end{bmatrix}, \quad \Phi_p(s) = (sI - A_p)^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \{x^T(t) \cdot Q \cdot x(t) + u_p(t) \cdot R \cdot u_p(t)\} dt \\ KA + A^T K + Q - KBR^{-1}B^T K &= 0 \\ G &= [G_z : G_y : G_r] \\ u(t) &= -G \cdot x(t) = -R^{-1}B^T K \cdot x(t) \end{aligned} \quad (4)$$

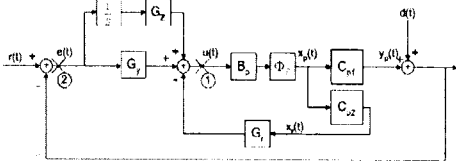


그림 2. LQ-Servo PI 제어기 구조

4. 고려된 설계 방법

본 논문은 트레이드오프(Trade-off)관계^[7]에 있는 제어입력 에너지와 명령 추종 에러의 최적의 조건을 찾아내는 방법을 고려한다^[5]. 고려된 방법^[5]의 절차는 먼저, 해석적인 방법^[3,4] 또는 제어 가능한 제어계인 행렬 G를 선정하여 고정한 후, 설계 가중행렬 [α, β]를 도입하여 선형 계획법(Linear Programming)에 의한 최적의 [α, β]를 선정하여 제어계인 행렬을 재구성한다. 또한, 재구성 과정에서 발생하는 안정도-강인성 손실을 역 최적제어기법을 통하여 회복하고, 새로운 제어법칙을 구성하여 기존의 제어계인 행렬에 비해 성능-강인성을 보강하는 절차를 따른다.

4.1 설계 장벽에 의한 구속 조건의 형성

그림 2.1의 LQ-Servo제어기의 성능-강인성을 시험하기 위해서는 출력 측 또는 추종에러 측인 ②점에서 절단하여 얻어진 다음과 같은 루프전달함수

$$T(s) = C_{\beta}(sI - A_p + B_p G_r C_{\rho})^{-1} B_p (G_y + \frac{1}{s} G_z) \quad (5)$$

를 이용한다. (5)식으로부터 설계 가중치 α, β가 포함된 증첩 형태의 새로운 루프전달 함수

$$\begin{aligned} T(s) &= C_{\beta}(sI - A_p + B_p G_r C_{\rho})^{-1} B_p (\alpha \cdot G_y + \frac{1}{s} \beta \cdot G_z) \\ &= \alpha \cdot C_{\beta}(sI - A_p + B_p G_r C_{\rho})^{-1} B_p G_y \\ &\quad + \beta \cdot C_{\beta}(sI - A_p + B_p G_r C_{\rho})^{-1} B_p \frac{1}{s} G_z \end{aligned}$$

$$= \alpha \cdot T_{\alpha}(s) + \beta \cdot T_{\beta}(s) \quad (6)$$

가 형성된다. 설계 가중치 α, β는 각각 제어계인 행렬 G_y, G_z의 가중치임을 알 수 있고, 다음과 같다.

$$[\beta G_z \ \alpha G_y \ G_r] = R^{-1} B^T K_{\alpha, \beta} \quad (7)$$

또한 (6)식에 삼각부등식의 성질과 설계 장벽의 조건을 부여하면,

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}[T(j\omega)] &= \sigma_{\min}[\alpha T_{\alpha}(j\omega) + \beta T_{\beta}(j\omega)] \\ &\approx \alpha \cdot \sigma_{\min}[T_{\alpha}(j\omega)] + \beta \cdot \sigma_{\min}[T_{\beta}(j\omega)] \geq |d(j\omega)| \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}[T(j\omega)] &= \sigma_{\max}[\alpha T_{\alpha}(j\omega) + \beta T_{\beta}(j\omega)] \\ &\approx \alpha \cdot \sigma_{\max}[T_{\alpha}(j\omega)] + \beta \cdot \sigma_{\max}[T_{\beta}(j\omega)] \leq |n(j\omega)| \end{aligned} \quad (9)$$

과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

여기서, 설계 가중치 α, β의 도입 타당성은 (2)의 새로 도입된 변수에 의한 적분제어요소의 기여로 T_β(s)의 값이 T_α(s)의 값보다는 저주파영역에서 매우 크다는 사실에서 얻을 수 있다.^[3]

4.2 역 최적제어(inverse optimal control)에 의한 안정도-강인성 회복

앞에서의 구속부등식 (8), (9)와 목적함수 (6)의 관계로 선형계획법(Linear Programming)의 연산이 수행된다. 이로부터 얻어지는 설계 가중치 행렬 (α, β)의, 제어가중 행렬로의 직접 적용은 제어법칙 (4)의 K행렬의 비대칭을 초래하게 되는데, 이는 상태가중행렬 Q와 입력 가중행렬 R이 각각 반한정 대칭행렬 한정 대칭행렬이며, Riccati 방정식의 해 K가 대칭성을 유지해야하는 조건에 위배되어 안정도-강인성의 속성을 상실하게 된다. 이를 보완하기 위해 확장된 시스템 입력행렬의 특성으로부터 대칭성을 유지하는 수정된 Riccati 방정식의 해 K_{α,β}를 유도한다.

먼저, 확장된 시스템으로부터 구한 제어계인 행렬에 설계가중행렬 [α, β]가 적용된 구조를 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [\beta G_z \ \alpha G_y \ G_r] &= R^{-1} B^T K_{\alpha, \beta} \\ &= \frac{1}{\rho} [0 \ B_{\beta} \ B_{\rho}] \begin{bmatrix} \beta K_{11} & \alpha K_{12} & K_{13} \\ \beta K_{12} & \alpha K_{22} & K_{23} \\ \beta K_{13} & \alpha K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho} [0 \ B_{\beta} \ B_{\rho}] \begin{bmatrix} K_{11} & \beta K_{12} & \beta K_{13} \\ \beta K_{12} & \alpha K_{22} & K_{23} \\ \beta K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서, B^T행렬의 첫 번째 행은 항상 '0'이 됨을 알 수 있다. 이 제어계인 행렬의 구조적인 특성으로부터 설계 가중치 행렬 [α, β]가 적용된 새로운 제어계인 행렬 G_{α,β}를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} G_{y, \alpha} &= \frac{1}{\rho} (\alpha' B_{\beta} K_{22} + B_{\rho} K_{23}) \\ G_{z, \beta} &= \frac{1}{\rho} (\beta B_{\beta} K_{12} + \beta B_{\rho} K_{13}) \\ G_{\alpha, \beta} &= [\beta G_z : \frac{1}{\rho} (\alpha' B_{\beta} K_{22} + B_{\rho} K_{23}) : G_r] \quad (10) \\ &= R^{-1} B^T K_{\alpha, \beta} \end{aligned}$$

5. 실험

실험에 적용된 설계사양은 다음과 같다.

- Sampling Frequency: 500 Hz
- 노이즈 장벽 설계사양: 500 Hz
- 외란 장벽 설계사양: 0.01 Hz
- 상태가중행렬: Q=[15.0 100.0 0.0 10.0 10.0] (11)

-제어가중행렬: $R=3.5$ (12)

-(11), (12)에 의해 선정된 제어게인 행렬:

$$\begin{aligned} G_x &= [-1.3890] \\ G_y &= [-2.8313] \\ G_r &= [-22.5895 \quad -3.0839 \quad -3.0450] \end{aligned} \quad (13)$$

또한, 선형 계획법을 계산하기 위한 목적함수 및 구속방정식은 다음과 같다.

-목적함수: $T(s) = C_{\beta}(sI - A_{\beta} + B_{\beta}G_r C_{\beta})^{-1} B_{\beta}(\alpha \cdot G_y + \frac{1}{s} \beta \cdot G_x)$

$$A_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -34.8 & -176.5 & 0 \\ 0 & 111.8 & 235.4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 142.4 \\ -189.8 \end{bmatrix}$$

$$C_{\beta} = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad C_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-구속방정식: $\alpha \cdot \sigma_{\min}[T_{\alpha}(j\omega)] + \beta \cdot \sigma_{\min}[T_{\beta}(j\omega)] \geq 0.1$
 $\alpha \cdot \sigma_{\max}[T_{\alpha}(j\omega)] + \beta \cdot \sigma_{\max}[T_{\beta}(j\omega)] \leq 500$

앞 절에서 고려된 설계 절차와 설계사양에 의해 먼저, 무프 진달함수 $T_{\alpha}(s)$, $T_{\beta}(s)$ 의 특이값을 구하고, 선형 계획법(Linear Programming)에 의한 설계 가중치 $[\alpha, \beta]$ 를 구하기 위해 MatLab의 linprog를 사용하여, 주파수 0.061Hz에서 계산된 설계 가중치 $[\alpha, \beta] = [-1.2061, 0.1500]$ 를 선정한다. 선정된 $[\alpha, \beta]$ 를 고려된 제어방법^[5] (10)에 대입하여 도출된, 성능 향상된 제어게인 행렬은 다음과 같다.

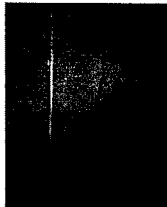
$$G = [-0.2083 \quad -3.7084 \quad -22.5895 \quad -3.0839 \quad -3.0450]$$

이때, 반복되어 계산되어지는 특이값의 주파수는 회전형 역진자 시스템이 실제 운용 가능한 주파수 대역 (0.01~3.0 Hz)을 선정하여 계산상의 부하를 줄이도록 한다.

마지막으로 G 에 의한 2초 주기의 $0^{\circ} \sim 45^{\circ}$ 의 기준 입력에 대한 실제 회전형 역진자 시스템에 적용된 출력은 실험 결과의 그림 6과 같다.

6. 실험 환경 및 결과

6.1 실험 환경



- Motor: 12V 20W DC Brush Motor
- Gear Ratio: 51.24:1 with 2°Backlash
- Rod Sensor: Potentio Meter with 45.5/degree Resolution
- Arm Sensor: Incremental Encoder with 141.6/degree Resolution

그림 3. 회전형 역진자 시스템 및 사양



- Processor: TMS320VC33 (100Mhz)
- Peripheral Logic: EPLD
- A/D Converter: 14bit Resolution
- Counter: 24bit Quad. Counter
- Driver: H-Bridge PWM Module
- Filter: Butterworth 2nd order Analog & Digital Filter

그림 4. 구현된 제어보드 및 사양

6.2 실험 결과

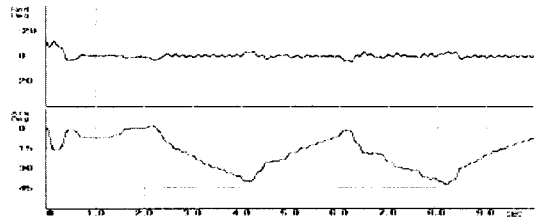


그림 5. [8]에 의한 서보성능

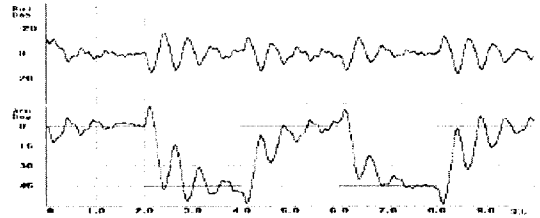


그림 6. 고려된 방법^[5]에 의한 서보성능

7. 결론

고려된 설계 방법^[5]이 실험을 통해 확인 할 수 있듯이 원래의 제어 게인을 성능-강인성 보강의 목적에 부합하도록 수정함을 확인하였다. 또한, 무부하시의 약 2°정도의 기어 백래쉬 열성을 가진 상태에서 수행된 성능검사이므로, 안정도 강인성의 보강도 상당부분 만족됨을 확인 할 수 있다. 그러나 명령 추종에 증점을 둔 결과 역진자의 진동은 조금 더 증가 하는 것을 볼 수 있다. 진동 열성에 약한 시스템에 적용되기 위해서는 항후 역진자의 진동 또한 최소화 할 수 있는 연구가 필요할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] Andrew K. Stimać, "Standup and Stabilization of the Inverted Pendulum", M.I.T. Partial Fulfillment of the Requirements, June 1999.
- [2] K. J. Astrom and K. Furuta, "Swing up a pendulum by energy control", proc. of 13th Congress of the IFAC, pages 683-688, 1996.
- [3] 서병설, "가중치를 이용한 LQ-Servo형 PI제어기 설계", 한국통신학회논문지, Vol.25 No.3B, pp.570-576, 03. 2000.
- [4] 윤성오, 서병설, "명령추종과 출력속 외란제거를 위한 LQ-Servo 설계", 제어·자동화·시스템 공학회 논문집 제 3권 5호, 1997.
- [5] 이용석, 서병설, "볼록형 최적화 기법을 이용한 LQ-서보 설계 방법(1) 주파수 영역에서의 접근", 한국통신학회, 2000.
- [6] M. Athans, Lecture Notes on Multivariable Control Systems, M.I.T. Ref. No. 860224/6234., 1986.
- [7] H. Kwakernaak and R. Sivan, "The Maximally Achievable Accuracy of Linear Optimal Regulators and Linear Optimal Filters", IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-17, pp. 79-86, 1972.
- [8] Xu, Y., Iwase, M., Furuta, K., "Time Optimal Swing-Up Control of Single Pendulum", Journal of dynamic systems, measurement and control, v.123 no.3 pp.518-527, Sep. 2001