

유한요소법과 해석해의 결합에 의한 선전류 문제의 해석

조진석 김영선 이기식
 단국대학교 전기공학과

Analysis of Magnetic Field with Line Source by Coupling FEM and Analytical Solution

Jin-Seok Cho Young-Sun Kim Ki-Sik Lee
 Dankook University

Abstract - 유한요소법을 이용하여 전자장을 해석할 경우 전류원이 전 영역에 비해 극히 작은 영역이면, 요소분할 과정에서 소스부분을 세분하여야 하므로 결국 미지수의 증가를 가져오게 된다. 또한, 선전류 문제의 경우 2차원 유한 요소 해석이 용이하지 않다. 이를 보완하기 위해 본 논문에서는 소스가 선전류이고 관심 영역이 선전류원으로부터 떨어져 있는 경우, 소스 영역은 해석해를 적용하여 유한요소법과 결합하는 방법을 제시하였다.

해석적인 해는 원통좌표계에서 반경에 대한 멱함수와 회전각도에 대한 삼각함수의 곱의 형태로 표현된다. 이때 두 종류의 적분 상수가 있는데, 이는 경계상의 포텐셜값과 유한요소법의 경계 적분항을 푸리에급수로 전개한 계수로 표현된다.

제안한 알고리즘의 검증은 위하여 해석해가 존재하는 모델을 설정하여 해석적인 방법, 기존의 유한요소법 및 결합 방법에 의한 해를 비교 검증하였다.

1. 서 론

유한요소법을 이용하여 전자장을 해석할 경우 해석 대상을 특별한 기하학적 형태의 요소로 분할하는 과정을 거쳐야 한다. 이때 자장의 변화가 심한 곳에는 요소의 크기를 다른 부분 보다 작게 하여야 한다. 그리고 주 관심영역은 유한요소법의 오차를 줄여서 좀더 정확한 결과를 나타내게 하기 위하여 더욱 많은 미소요소로 분할하게 한다. 그리고 분할된 요소내의 함수분포를 적당한 근사함수로 설정하여 지배방정식을 구하고, 이들을 결합하여 전체 영역에 대한 선형대수방정식을 구한다. 그리하여 구하여진 해석모델의 근사해는 어느 정도 정해(exact solution)에 근접할 수가 있게 된다[1].

전기철도의 가공 전차선이나 지상 전력선의 경우는 해석대상에 비해 자장분포의 원인이 되는 소스 부분이 매우 작은 영역에 불과하다. 이때 유한요소해석은 소스 부분이 매우 작은 영역이므로 미세하게 요소분할을 하여야 한다. 그러므로 요소의 수가 증가되어 미지수가 증가하고, 이로 인해 전자계산기의 기억용량과 계산시간이 늘어나는 단점을 가지고 있다. 또한 2차원 유한요소 해석 시 선전류 문제로 다룬다면 유한요소 해석이 용이하지 않다.

본 논문에서는 이 문제를 해결하기 위해 유한요소법의 활용 기법중의 하나인 해석해와 유한요소법을 결합하여 전자장을 해석하는 방법을 제시하였다. 선전류를 포함하는 영역에서는 해석해를 적용하고, 이외의 영역에서는 유한요소법을 이용하여 결합하였다.

해석적인 해는 원통좌표계에서 반경에 대한 멱함수와 회전각도에 대한 삼각함수의 곱의 형태로 표현된다. 이때 두 종류의 적분 상수가 있는데, 이는 경계상의 포텐셜값과 유한요소법의 경계 적분항을 푸리에급수로 전개한 계수로 표현된다[2].

제안한 알고리즘을 검증하기 위하여 해석해가 존재하는 모델을 설정하여 해석적인 방법, 유한요소법 및 결합에 의한 방법의 해를 비교하였다. 해석 영역에서 임의의 경로에 대하여 포텐셜을 비교한 결과 결합 방법에 의한 해와 해석적인 방법에 의한 해가 근사함을 보였다.

2. 본 론

2.1 해석모델 및 해석해

그림 1과 같이 선전류원 I와 재질이 서로 다른 두 영역 I과 II를 갖는 해석모델을 설정하고 유한요소법과 해석해의 결합을 통하여 원통좌표계에서 2차원 자장 해석을 실시하였다.

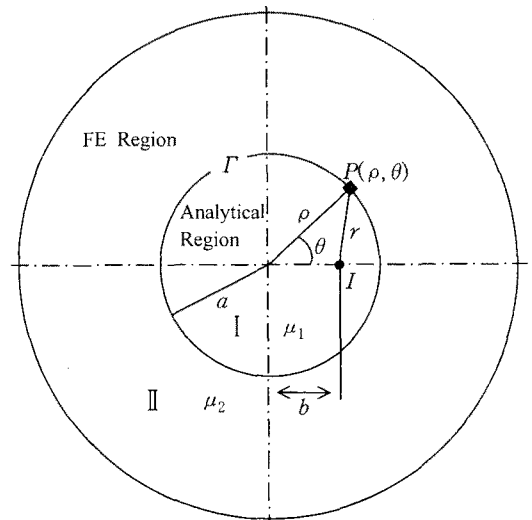


그림 1. 해석모델

ρ 가 영역 I($\rho < a$)이나, II($\rho > a$)에 위치하는 것과 무관하게 전류 I에 의해 발생하는 자장의 포텐셜은 식 (1)처럼 표현 될 수 있다.

$$A = A^1 + A^2 \tag{1}$$

식 (1)에서 A^1 과 A^2 는 각각 푸아송 및 라플라스 방정식의 해이며, A^1 은 전류 I에 의해서만 A^2 는 경계 또는 재질에 의해서만 결정되어지는 항으로 본다[3]. 그리

고 이들의 해는 발산정리와 변수분리법을 사용하여 각각 식 (2)와 (3)으로 표현된다. 본 논문에서 제시된 해석모델은 상하가 대칭인 우함수이므로 푸리에급수로 표현된 식 (3)에서 sine항은 제거될 수 있다. 하지만 일반적인 문제에도 적용하기 위하여 sine항을 그대로 두었다.

$$A^1 = \frac{\mu I}{2\pi} \ln r \quad (2)$$

$$A^2 = \mu \sum_{n=0}^{\infty} [(C_{1n}\rho^n + S_{1n}\rho^{-n}) \cos n\theta + (C_{2n}\rho^n + S_{2n}\rho^{-n}) \sin n\theta] \quad (3)$$

여기서,

$$r = \sqrt{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \theta}$$

$$C_{1n}, C_{2n}, S_{1n}, S_{2n} : \text{적분계수}$$

영역 I과 II에서 포텐셜을 구하기 위해서는 식 (1)에 식 (2), (3)을 적용하면 된다. 여기서 주의할 점은 유한한 포텐셜 값이 존재하기 위해서 영역 I에서는 ρ^{-n} 항의 계수가 0이 되고, 영역 II에서는 ρ^n 항의 계수가 0이 되어야 한다. 그러므로 영역 I에서는 식 (4), 영역 II에서는 식 (5)와 같은 해석해가 존재하게 된다.

$$A_I = \frac{\mu_1 I}{2\pi} \ln r + \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} [C_{1n}\rho^n \cos n\theta + C_{2n}\rho^n \sin n\theta] \quad (4)$$

$$A_{II} = \frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln r + \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} [S_{1n}\rho^{-n} \cos n\theta + S_{2n}\rho^{-n} \sin n\theta] \quad (5)$$

2.2 수학적 모델링

변위 전류를 무시한 암페어 주회 법칙으로부터 유한요소법을 적용하여, 가장간차법 중의 하나인 갤러킨법을 사용하면 다음과 같다[4][5].

$$\int_s \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right] dx dy - \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu} N \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma = \int_s N dx dy \quad (6)$$

이산화된 식 (6)을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다[6].

$$\begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

여기서,

- A_1 : 경계의 포텐셜을 제외한 포텐셜
- A_2 : 경계 Γ 에서의 포텐셜
- B : 경계 적분항

식 (6)의 좌변의 두 번째 항은 경계적분항으로서 식 (8)과 같다.

$$B_j = - \oint_{\Gamma} N_j H_{\theta} d\Gamma \quad (8)$$

여기서,

N_j : 절점 j 에 대한 형상함수

식 (8)에서 H_{θ} 는 경계 Γ 에서 자계의 접선 성분이 연속이므로 식 (9)로 표현된다.

$$H_{\theta} = - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_1}{\partial \rho} \quad (9)$$

영역 I에서는 해석해를 이용하므로 식 (9)에서는 식 (4)의 A_1 이 선택되고, 적분계수 C_{1n}, C_{2n} 를 정리하여 H_{θ} 를 구하면 식 (10)과 같다.

$$H_{\theta} = - \frac{I}{2\pi} \frac{\rho - b \cos \theta}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[n \frac{1}{\rho} (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta) \right] \quad (10)$$

유한요소법으로 해석하려는 영역과 해석적 해를 구하려는 경계 Γ 에서 푸리에급수 형태를 취한뒤 각 계수 C_n, S_n 은 푸리에급수 전개 일반 공식으로부터 식 (11)와 (12)처럼 표현된다.

$$C_n = \frac{1}{\pi \mu_1} \int_0^{2\pi} \left[A(\theta) - \frac{I}{2\pi} \ln r \right] \cos n\theta d\theta \quad (11)$$

$$S_n = \frac{1}{\pi \mu_1} \int_0^{2\pi} \left[A(\theta) - \frac{I}{2\pi} \ln r \right] \sin n\theta d\theta \quad (12)$$

유한요소법에서 보간함수를 1차함수로 가정하면 그림 2와 같이 경계상의 포텐셜 A 가 θ 에 대해 그려질 것이고 식 (11)과 (12)는 각각 식 (13), (14) 그리고 식 (15)와 같이 쓸 수 있다.

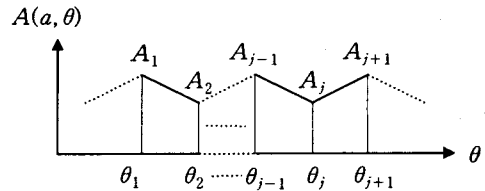


그림 2. 경계상의 포텐셜

$$C_0 = \frac{1}{2\pi \mu_1} \sum_{j=0}^{N_s-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} A(\theta) d\theta \quad (13)$$

$$C_n = \frac{1}{\pi \mu_1} \sum_{j=0}^{N_s-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} A(\theta) \cos n\theta d\theta - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N_s-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{I}{2\pi} \ln r \cos n\theta d\theta \quad (14)$$

$$S_n = \frac{1}{\mu_1 \pi} \sum_{j=0}^{N_s-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} A(\theta) \sin n\theta d\theta - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N_s-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{I}{2\pi} \ln r \sin n\theta d\theta \quad (15)$$

여기서,

$$N_b : \text{경계 } \Gamma \text{에서의 절점수} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

θ 의 각구간 $\theta_j \leq \theta \leq \theta_{j+1}$ 에서는 $A(a, \theta)$ 가 보간법에 의해 식 (16)처럼 표현이 가능하다.

$$A(a, \theta) = \frac{\theta_{j+1} - \theta}{\theta_{j+1} - \theta_j} A_j + \frac{\theta - \theta_j}{\theta_{j+1} - \theta_j} A_{j+1} \quad (16)$$

식 (16)을 식 (14)에 적용하고, 삼각함수의 적분공식을 이용하여 구하여 보면 식 (17)처럼 표현되며, 식 (15)의 sine항에 대한 계수도 같은 방법에 의해 식 (18)과 같은 급수의 형태로 나타낼 수 있게 된다[7].

$$C_n = \frac{1}{\mu_1 \pi} \sum_{j=1}^{N_b} \left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{\theta - \theta_{j-1}}{\theta_j - \theta_{j-1}} \cos n\theta \, d\theta + \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\theta_{j+1} - \theta}{\theta_{j+1} - \theta_j} \cos n\theta \, d\theta \right] A_j \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N_b-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{I}{2\pi} \ln r \cos n\theta \, d\theta \quad (17)$$

$$S_n = \frac{1}{\mu_1 \pi} \sum_{j=1}^{N_b} \left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{\theta - \theta_{j-1}}{\theta_j - \theta_{j-1}} \sin n\theta \, d\theta + \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{\theta_{j+1} - \theta}{\theta_{j+1} - \theta_j} \sin n\theta \, d\theta \right] A_j \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N_b-1} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \frac{I}{2\pi} \ln r \sin n\theta \, d\theta \quad (18)$$

식 (17), (18)를 적분한 다음, 각 계수를 식 (21), (22)와 같이 놓으면 식 (19), (20)으로 다시 쓸 수 있다.

$$C_n = \frac{1}{\mu_1 \pi} \sum_{j=1}^{N_b} \frac{1}{n} U_{nj} A_j - (M_c)_n \quad (19)$$

$$S_n = \frac{1}{\mu_1 \pi} \sum_{j=1}^{N_b} \frac{1}{n} V_{nj} A_j - (M_s)_n \quad (20)$$

여기서,

$$U_{nj} = \frac{1}{n} \left[\frac{\cos n\theta_j - \cos n\theta_{j-1}}{\Delta\theta_{j-1}} - \frac{\cos n\theta_{j+1} - \cos n\theta_j}{\Delta\theta_j} \right] \quad (21)$$

$$V_{nj} = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin n\theta_j - \sin n\theta_{j-1}}{\Delta\theta_{j-1}} - \frac{\sin n\theta_{j+1} - \sin n\theta_j}{\Delta\theta_j} \right] \quad (22)$$

여기서,

$$\Delta\theta_{j-1} = \theta_j - \theta_{j-1}, \quad \Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$$

식 (19)와 (20)처럼 푸리에급수 전개된 계수 C_n, S_n 은 경계상의 절점의 포텐셜 값과 상수항으로 표현된다. 푸리에급수 전개된 계수 C_n, S_n 을 $\{A_3\}$ 으로 정의하면 식 (23)처럼 표현할 수 있다.

$$\{A_3\} = \{C_1, S_1, C_2, S_2, \dots, C_{N_b}, S_{N_b}, C_0\}^T \quad (23)$$

여기서,

$$N_h : \text{푸리에급수 전개된 고조파 수}$$

이 경우 공간에 대한 고조파의 개수는 무한개가 되어야 하나 N_h 개로 잡았다. 그리고 식 (19), (20)에 의해 식 (23)은 식 (24)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{A_3\} = [T] \{A_2\} - \{M\} \quad (24)$$

$$\{M\} = \{(M_c)_1, (M_s)_1, \dots, (M_c)_{N_b}, (M_s)_{N_b}, M_c\} \quad (25)$$

여기서,

$$T_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\pi n \mu_1} U_{nj} & i = \text{홀수} \\ \frac{1}{\pi n \mu_1} V_{nj} & i = \text{짝수} \end{cases} \\ i : 1, 2, 3, \dots, 2N_h + 1 \\ j : 1, 2, 3, \dots, N_b \\ n : (i+1)/2 \text{의 정수}$$

2.3 경계 적분의 결합

식 (8)의 경계 적분항을 1차함수로 가정한 형상함수를 도입하여 정리하면 식 (26)이 된다.

$$B_j = - \oint_{\Gamma} N_j H_{\theta} d\Gamma \\ = - \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\frac{\theta - \theta_{j-1}}{\theta_j - \theta_{j-1}} \right) H_{\theta} \rho \, d\theta - \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \left(\frac{\theta_{j+1} - \theta}{\theta_{j+1} - \theta_j} \right) H_{\theta} \rho \, d\theta \quad (26)$$

여기서,

N_j : 형상 함수 (θ 에 대한 1차 함수로 간주)

$$N_j = \begin{cases} \frac{\theta - \theta_{j-1}}{\theta_j - \theta_{j-1}} & \theta_{j-1} < \theta < \theta_j \\ \frac{\theta_{j+1} - \theta}{\theta_{j+1} - \theta_j} & \theta_j < \theta < \theta_{j+1} \end{cases} \\ d\Gamma = \rho \, d\theta$$

식 (10)을 식 (26)에 대입하여 정리하면 식 (27)과 같다.

$$B_j = \frac{I}{2\pi} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\frac{\theta - \theta_{j-1}}{\Delta\theta_{j-1}} \right) \left(\frac{\rho^2 - \rho b \cos \theta}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \theta} \right) d\theta \\ + \frac{I}{2\pi} \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \left(\frac{\theta_{j+1} - \theta}{\Delta\theta_j} \right) \left(\frac{\rho^2 - \rho b \cos \theta}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos \theta} \right) d\theta \\ + \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \left(\frac{\theta - \theta_{j-1}}{\Delta\theta_{j-1}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} n (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta) d\theta \\ + \int_{\theta_j}^{\theta_{j+1}} \left(\frac{\theta_{j+1} - \theta}{\Delta\theta_j} \right) \sum_{n=1}^{\infty} n (C_n \cos n\theta + S_n \sin n\theta) d\theta \quad (27)$$

식 (27)은 앞서 정의된 U_{nj} 와 V_{nj} 의 식 (21), (22)를 이용하여 식 (28)처럼 다시 쓸 수 있다.

$$B_j = \sum_{n=1}^{N_j} (U_{nj}C_n + V_{nj}S_n) + J_j \quad (28)$$

식 (28)은 다시 식 (24)처럼 계수 C_n , S_n 의 $\{A_3\}$ 로 표현할 수 있다.

$$\{B\} = [K]\{A_3\} + \{J\} \quad (29)$$

여기서,

$$K_{ij} = \begin{cases} U_{nj} & : i = \text{홀수}, n = (j+1)/2 \\ V_{nj} & : i = \text{짝수}, n = j/2 \end{cases}$$

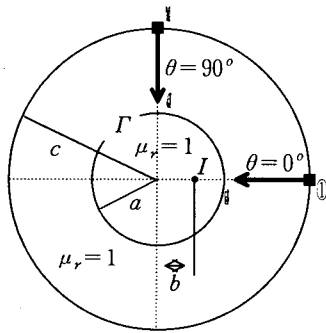
J : 경계 적분항의 소스 부분

최종적 식 (24)와 (29)를 식 (7)대입하여 정리하면 식 (30)의 행렬식 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - KT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M - J \end{bmatrix} \quad (30)$$

2.4 사례 연구

본 연구의 타당성을 검증하기 위하여 그림 3과 같은 모델을 설정하여 해석적인 방법, 유한요소법 및 제안한 방법으로 해를 구하였다. 해석영역의 크기는 외각 반지름 $c=1[m]$, 내부 반지름 $a=0.1[m]$ 이고, 소스는 중심으로부터의 거리 $b=0.05[m]$ 의 위치에 전류 $I=1[A]$ 를 흐르게 하였다. 또한 해석영역 및 내부영역의 재료는 비투자율 $\mu_r=1$ 이다.



* 0안의 숫자는 절점 번호임.

그림 3. 예제모델

그림 4는 결합된 방법에 의한 해석모델의 자속분포를 나타내고 있다. 기존의 유한요소법으로 계산할 경우, 선 전류 위치에 아주 작은 영역을 소스영역으로 설정하여 $1[A]$ 가 흐르게 전류밀도를 주었다. 기존의 방법은 미지수가 1,009개였으며, 같은 요소 형태를 가지고 결합 방법으로는 684개 미지수가 설정되었다.

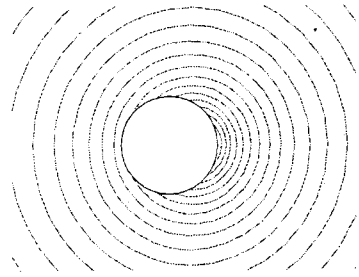


그림 4. 결합 방법에 의한 자기력선 분포

그림 5와 그림 6은 해석영역에서 $\theta=0^\circ$ (절점 번호가 1부터 501까지)와 $\theta=90^\circ$ (절점 번호가 1부터 501까지)인 곳의 직선상의 포텐셜을 오차와 함께 나타내었다. 세 가지 방법은 모두 동일한 요소분할을 통하여 계산되었으며, 오차의 계산은 다음과 같다.

$$\text{오차} = \frac{|A - A^*|}{A_{\max} - A_{\min}} \times 100(\%) \quad (31)$$

여기서,

A : 해석적인 방법에 의한 해

A^* : 결합방법에 의한 해

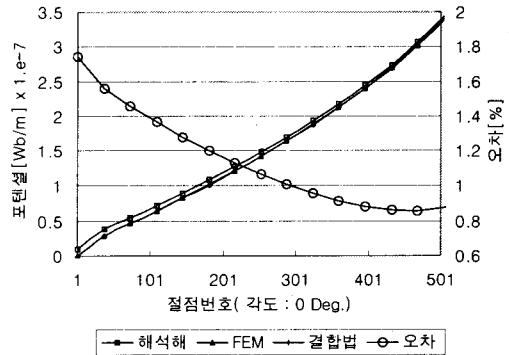


그림 5. 경로에 따른 포텐셜과 오차 ($\theta=0^\circ$)

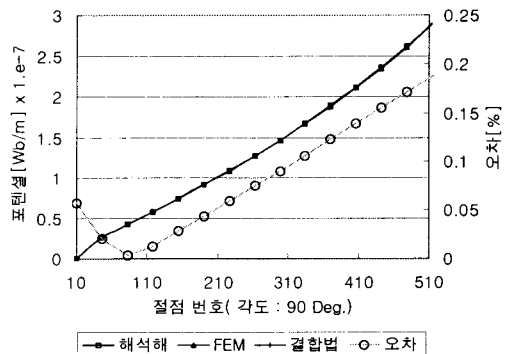


그림 6. 경로에 따른 포텐셜과 오차 ($\theta=90^\circ$)

3. 결 론

본 논문에서는 소스가 선전류이고 관심 영역이 선전류 원으로부터 떨어져 있는 경우, 소스 영역은 해석해를 적용하고 그 외는 유한요소법을 적용하여 이를 결합하는 방법을 제시하였다.

본 방법은 소스가 존재하는 내부 영역의 요소분할을 수행하지 않고, 푸리에급수로 전개하여 해석해와 결합하였다. 그러므로 기존의 유한요소법에 비해 내부영역의 요소수에 해당하는 만큼 계산 시간 및 기억 용량을 감축시켰다. 또한, 소스부분이 관심영역에 비해 작으면 포인트 소스로 처리하여 해석영역의 공간 활용도를 높이고, 유한요소법으로 해결하기 힘든 선전류 문제를 해결하였다.

제안한 알고리즘의 검증을 위하여 해석해가 존재하는 모델을 채택하여 해석적인 방법과 결합에 의한 방법에서 해석 영역에서 임의의 경로에 대하여 포텐셜을 비교한 결과 이 둘의 해가 근사함을 비교, 검토하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] 任達鎬, "電氣系の 有限要素法", 東明社, 1987.
- [2] 유동일, "유한요소법과 해석해의 결합에 의한 전자장 해석", 석사학위논문, 단국대학교, 1991.
- [3] Miloš Stafi, "Electrodynamics of Electrical Machines", ILIFFE Books, pp.84-94, 1967.
- [4] David K. Cheng, "Field and Wave Electromagnetics", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1992.
- [5] Joāo Pedro A. Bastos, Nelson Sadowski, "Electromagnetic Modeling by Finite Element Methods", Marcel Dekker, Inc., pp.123-146, 2003.
- [6] Young-Sun Kim, Ki-Sik Lee, Moon-Nam Lee, "Application of Infinite Boundary Condition to Finite Element Analysis", Proceeding of ICEE, VOL. 3, pp.1768-1772, July 2001.
- [7] Sheppard J. Salon, "Finite Element Analysis of Electrical machine", Kluwer Academic Publishers, pp.197-207, 1995.