

기전 시스템의 동역학 해석

김진식*(국민대학교 자동차공학 전문대학원), 박정훈(고등기술연구원 제품기술연구센터),
임홍재(국민대학교 자동차공학 전문대학원)

Dynamic analysis of electromechanical system

J. S. Kim(Automotive. Eng. Dept. KMU), J. H. Park(Institute for Advanced Eng.),
H. J. Yim(Automotive. Eng. Dept. KMU)

ABSTRACT

This paper presents the dynamic analysis method for an electromechanical system. The engineer has at his disposal a variety of software simulation tools. However, difficulties arise when the study of the behavior of complex electromechanical systems in combination with coupling element is required. Typical examples of such systems are machines for factory automation, home automation, and office automation. Dynamic systems analysis packages or electronic systems analysis packages offer the restrictive to simulate these mixed systems such electromechanical product. Electronic circuit analysis algorithm is easily incorporated into a multi-body dynamics analysis algorithm. The governing equation of electronic circuit is formulated as a differential algebraic equation form including both electrical and mechanical variables and is simultaneously solved in every time step. This analysis method clearly demonstrates the application potential for mixed electromechanical simulation.

Key Words : Electromechanical system(기전 시스템), Differential Algebraic Equation(미분대수 방정식), Dynamic analysis of multibody systems(다물체 동역학 해석), Analysis of electronic circuits(전기회로 해석)

1. 서론

기전 시스템은 기계 시스템과 전기 시스템이 결합된 형태의 시스템을 의미한다. 이러한 기전 시스템은 공장 자동화 시스템, 가정 자동화 시스템, 그리고 사무 자동화 시스템 등 일상 생활에서 항상 접할 수 있다.

기전 시스템의 개발단계에서 개발 비용 및 시간을 단축하기 위해 공학 해석 프로그램을 이용한 컴퓨터 원용 설계기법이 사용되고 있다. 일반적으로 많이 사용되는 공학 해석프로그램은 기계시스템 또는 전기시스템과 같은 하나의 특정 시스템만을 해석할 수 있다. 기계 시스템을 해석할 수 있는 해석 프로그램의 예로 ADAMS⁽¹⁾와 RecurDyn⁽²⁾ 등이 있고, 전기 회로 시스템을 해석할 수 있는 프로그램으로는 PSpice⁽³⁾와 HSPICE⁽⁴⁾ 등이 있다. 기계 시스템을 효율적으로 해석하기 위해서, 다물체 동역학 해석

방법이 기존에 계속 연구되어 왔다.⁽⁵⁻¹⁰⁾ 다물체 동역학 해석 분야에는 미분대수 방정식을 풀기 위한 방법, 효율적인 수치해석 방법, 그리고 적절한 좌표계의 선정 방법 등에 대한 연구가 진행되어 왔다. 전기회로 해석에 있어서도 컴퓨터를 이용한 시뮬레이션 방법, 회로소자 모델링, 네트워크 알고리즘의 개발, 그리고 과도 해석 방법 등의 연구가 이루어져 왔다.⁽¹¹⁻¹³⁾ 기존의 연구는 연동된 시스템의 일반적인 해석 방법보다는 직류 모터와 같은 특정의 기전 시스템에 대한 연구가 이루어졌다.^(14,15) 기전 시스템을 해석하기 위한 체계적이고 일반적인 방법은 아직 논의되지 않았다.

본 논문에서는 기전시스템을 다물체 동역학 해석 방법과 연관시켜 일반적인 해석방법을 제시하였다. 전기회로 시스템을 해석하기 위해 회로소자 방정식, 키르호프 전류법칙(Kirchhoff's Current Law), 그리고 키르호프 전압법칙(Kirchhoff's Voltage Law)을

미분대수 방정식으로 공식화하였다. 그리고 기계 시스템의 동역학 해석을 위해 국소 매개변수법을 사용하였다.^(7,8) 기계 시스템, 전기 시스템, 그리고 연성되어 있는 부분을 좌표 및 속도, 전기회로 해석을 위한 변수를 이용하여 모델링 하였다. 본 연구를 통해 제안한 전기회로 해석 방법과 기전 시스템의 동역학 해석 방법의 수치적 정확성 및 유용성을 검증하기 위해, 전기회로와 직류모터로 구동되는 기전 시스템에 대한 수치해석을 수행하였다. 또한 다양한 주파수를 갖는 전기회로에 대한 과도해석을 통해 적분기 선정에 위한 기준을 제시하였다.

2. 다물체 시스템의 동역학 해석

구속조건을 갖는 기계 시스템은 다음과 같은 확장 라그랑지 운동방정식과 구속방정식으로 표현된다.⁽⁶⁾

$$M\dot{Y} + \Phi_z^T \lambda = Q \quad (1)$$

$$\Phi = 0 \quad (2)$$

$$\dot{\Phi} = \Phi_z \dot{Y} + \Phi_t = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{\Phi} = \Phi_z \ddot{Y} - \gamma = 0 \quad (4)$$

위 식에서 M , Z , Y , Φ , λ , 그리고 Q 는 각각 질량행렬, 일반좌표, 속도, 구속방정식, 라그랑지 승수, 그리고 외력에 의한 일반력을 의미한다. 기호의 하첨자는 하첨자에 대한 기호의 편미분을 기호 위의 dot는 시간에 대한 미분을 의미한다. 수치 적분을 통해 구한 일반좌표 및 속도는 일반적으로 구속조건을 만족시키지 않는다. 국소 매개변수법은 구속조건을 만족시키기 위해 적분된 일반 좌표 및 속도를 구속 평면에 투영시킨다. 위치 해석 시 풀어야 하는 방정식의 형태를 운동방정식의 형태와 일치시키기 위해 질량행렬을 가중치로 사용하여 최적화문제로 공식화 한다. 최적화 문제에 Kuhn-Tucker 필요조건을 적용하면 다음과 같은 차분 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_z^T \\ \Phi_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Z \\ \Delta \mu_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M(Z - Z^*) + \Phi_z^T \mu_p \\ \Phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$Z = Z + \Delta Z \quad (6)$$

$$\mu_p = \mu_p + \Delta \mu_p \quad (7)$$

위 식에서 Z^* 는 적분된 일반좌표를 의미하고 μ_p 는 위치해석을 위한 라그랑지 승수를 의미한다.

속도 해석 시 풀어야 하는 방정식의 형태를 운동방정식의 형태와 일치시키기 위해 질량행렬을 가

중치로 사용하여 최적화 문제로 공식화 한다. 최적화 문제에 Kuhn-Tucker 필요조건을 적용하면 다음과 같은 속도 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_z^T \\ \Phi_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \mu_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MY^* \\ -\Phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

위 식에서 Y^* 는 적분된 속도를 의미하고 μ_v 는 속도해석을 위한 라그랑지 승수를 의미한다.

위치해석과 속도해석을 통해 구한 일반좌표 및 속도를 식 (1)과 식 (4)에 대입하여 가속도를 계산할 수 있다. 식 (1)과 식(4)를 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_z^T \\ \Phi_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (5), (8), 그리고 (9)로부터 위치해석, 속도해석, 그리고 가속도해석을 위한 행렬식의 계수행렬이 모두 동일함을 알 수 있다. 국소 매개변수법을 사용하는 경우, 각 해석 단계에서 동일한 계수행렬을 사용함으로 인하여 계산상의 효율성을 높일 수 있는 것으로 알려져 있다.⁽⁸⁾

3. 전기 시스템 해석

Figure 1은 전기회로의 예를 보여 준다. 그림에서처럼 전기회로는 다양한 소자의 연결로 구성되어 있고, 1개 이상의 루프로 구성되어 있다.

전기회로는 많은 종류의 회로소자로 구성 되어 있다. 회로해석을 위한 변수로 회로소자의 전류(i)와 전압(v)을 선정하였다.

$$q = [i_1, v_1, \dots, i_n, v_n]^T \quad (10)$$

위 식에서 n 은 회로를 구성하는 회로소자의 개수를 의미한다.

Table 1은 다양한 회로 소자 중에서 일반적으로 많이 사용되는 전압원(voltage source), 전류원(current source), 저항(resistor), 콘덴서(condenser), 그리고 인덕턴서(inductor)의 회로소자 방정식을 보여준다. 식 (10)에 정의된 회로 변수는 회로소자 방정식 외에도 키르호프 전압법칙, 키르호프 전류법칙과 같은 구속 조건을 만족해야 한다. 즉 회로 변수 q 는 독립적이지 않음을 알 수 있다.

임의의 노드 k 에 키르호프 전류법칙을 적용하면, 노드 k 에서의 전류의 합은 0이 되어야 한다. 키르호프 전류법칙에 의한 구속조건은 다음과 같이

J_m 은 로터의 관성을, T 는 직류모터의 토크를 나타낸다.⁽¹⁷⁾ Figure 3 은 선형 포텐서미터의 회로를 보여준다. 그림에서 d 는 포텐서미터의 입력거리를, d_0 는 최대 입력 거리를, R 는 출력저항 값을, R_{total} 는 최대 출력저항 값을 나타낸다. Figure 4 는 회전 포텐서미터를 보여준다. 그림에서 θ 는 입력 각도를 나타낸다. Table 2 는 Figure 2~4 에 보여진 연성 소자에 대한 방정식을 보여준다. 표에서 K_t 는 토크상수(torque constant)를, e 는 연성소자의 전압을 의미한다.

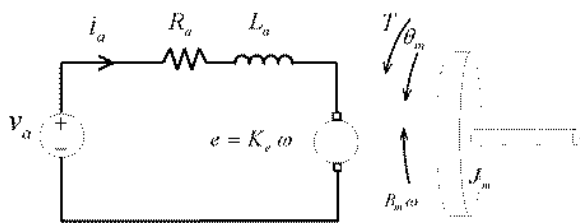


Fig. 2 Electric circuit of DC motor and free-body diagram of the rotor

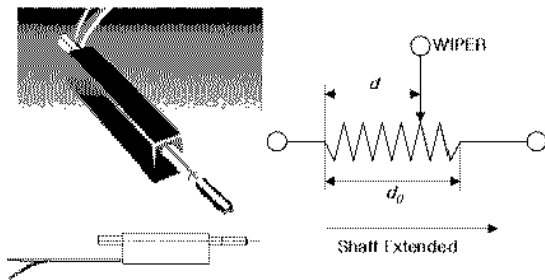


Fig. 3 Linear motion potentiometer

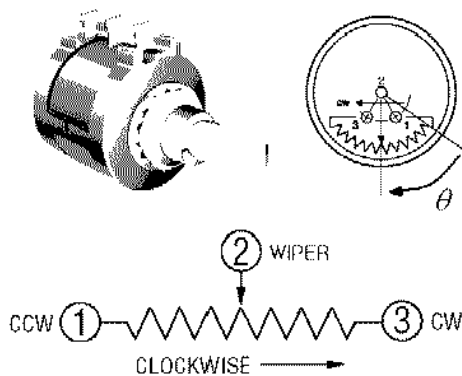


Fig. 4 Rotary motion potentiometer

Table 2 Coupling element equation

| Element | Equations |
|----------------------|------------------------------------|
| DC motor | $T = K_t i_a$ $e = K_e \omega$ |
| Linear potentiometer | $R = \frac{d}{d_0} R_{total}$ |
| Rotary potentiometer | $R = \frac{\theta}{\pi} R_{total}$ |

4 기전 시스템의 동역학 해석

Figure 5 는 기전 시스템의 동역학 해석과정을 보여준다. 적분된 일반좌표와 속도를 이용하여 위치해석과 속도해석을 수행한다. 위치 및 속도해석 수행 후 연성된 회로와 다물체 시스템 해석을 위한 미분 대수 방정식을 구성한다. 연성된 방정식을 풀어 회로 변수 q , 미분치 \dot{q} , 그리고 가속도 \ddot{Y} 을 계산한다.

5 수치예제

본 연구를 통해 제안한 회로해석 방법과 기전 시스템의 동역학 해석방법의 수치적 정확성 및 유용성을 검증하기 위해 수치해석을 수행하였다. 회로 해석은 Figure 1 에 보여진 전기회로를 이용하였다. Table 3 은 해석에 사용된 회로소자의 물성치를 나타낸다. Figure 6 은 회로요소 중 콘덴서에 부가되는 전압을 보여준다. 그림에서 proposed 와 commercial 은 각각 본 논문에서 제시한 방법과 기존 상용 프로그램에 의한 해석결과를 의미한다. 해석결과로부터 본 논문에서 제시한 해석방법과 기존의 상용 프로그램과의 결과가 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

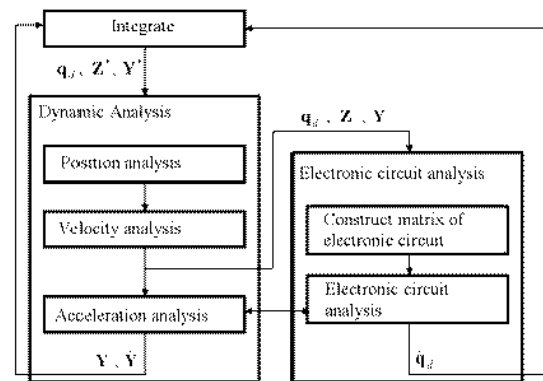


Fig. 5 Dynamic analysis flow of electromechanical systems

Figure 7 은 연성소자를 포함한 직류모터와 단진자로 구성된 기전 시스템을 보여 준다. Table 4 는 직류모터의 전기회로에 사용된 소자의 물성치를 보여준다.⁽¹⁸⁾ 해석을 위한 초기조건으로 단진자를 X 축에 대해 시계 방향으로 45 도 기울어진 위치 및 자세를 부여하였다. 단진자의 질량중심 X 위치가 0 이 되도록 제어하기 위해 비례제어 기법이 사용되었다. Figure 8 은 기전 시스템을 자세 제어를 위한 제어로직을 보여준다. Figure 9 는 직류모터를 포함한 기전 시스템의 해석결과와 직류모터를 포함하지 않은 경우 자유운동에 의한 해석결과를 보여준다. 해석 결과로부터 직류모터를 포함한 기전 시스템 단진자 X 좌표가 0 값에 빨리 수렴하는 것을 알 수 있다.

일반적으로 기계시스템의 관심 주파수는 전기 회로 시스템의 관심 주파수에 비하여 매우 낮다. 관심 주파수 영역이 서로 다른 두 시스템을 동시에 해석 하기 위해서는 적절한 적분기의 선택이 중요하다. 수치적분 시 적분 간격은 가장 높은 관심주파수에 따라 결정되어야 한다. 따라서 Figure 10 에 보여진 회로에 대해 명시적 및 암시적 적분기를 이용하여 수치적분을 수행하였다. 적분에 사용된 명시적인 적분기로는 Runge-Kutta 45 가⁽¹⁹⁾ 사용되었고 암시적인 적분기로는 BDF 계열의 Gere 알고리즘이⁽²⁰⁾ 사용되었다. 일반적으로 BDF 계열의 적분기는 강건한(stiff) 시스템을 적분하는 경우, 수치적분 안정성을 높이기 위해 수치감쇠가 작용된다. 관심 주파수를 갖는 적분치의 수치감쇠를 피하기 위해 최대 적분간격을 최소 주기의 반으로 제한하였다. Table 5 는 회로의 주파수에 따른 적분 여부를 보여 준다. 해석결과로부터 명시적 적분기는 높은 주파수를 갖는 시스템의 수치적분을 잘 수행하는 반면 암시적인 적분기는 100 KHz 이상의 주파수를 갖는 시스템의 해석에 부적절함을 알 수 있다. 따라서 100 KHz 이상의 주파수를 갖는 시스템의 해석에는 명시적인 적분기를 사용해야 함을 알 수 있다.

Table 3 Properties of circuit elements

| Element | Property |
|---------|------------------|
| R_1 | 0.1 Ω |
| R_2 | 10 k Ω |
| L_1 | 141 μH |
| L_2 | 121 μH |
| C_1 | 10 nF |
| V_1 | 100 cos(100 t) V |

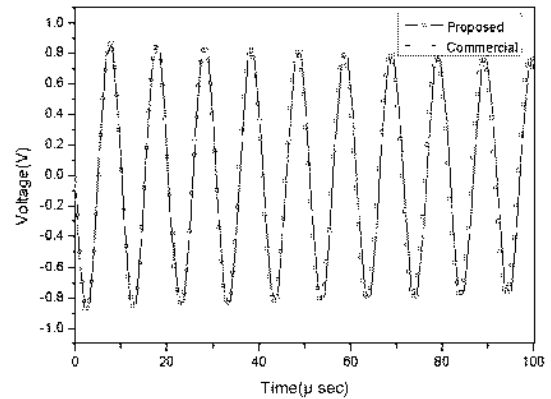


Fig. 6 Voltage of capacity

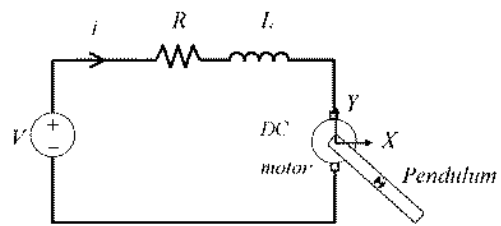


Fig. 7 Schematic diagram of electromechanical system

Table 4 Properties of DC motor circuit and simple pendulum

| | |
|----------------------------|---|
| Maximum bus voltage | 340 V |
| R_1 | 1.86 Ω |
| L_1 | 8.65mH |
| C_1 | 1.2 μF |
| Voltage Constant (K_e) | 0.145 Volts/rad/s |
| Torque Constant (K_t) | 0.124 Volts/rad/s |
| Static Friction (B_m) | 8.8×10^3 Nm |
| Inertia Moment (J_m) | 9.0×10^9 kg \cdot m ² |
| Length | 1m |
| Mass | 1kg |

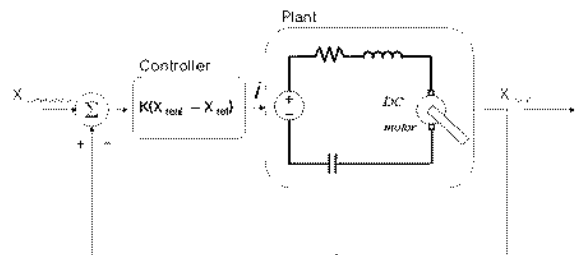


Fig. 8 Position control logic for the electromechanical system

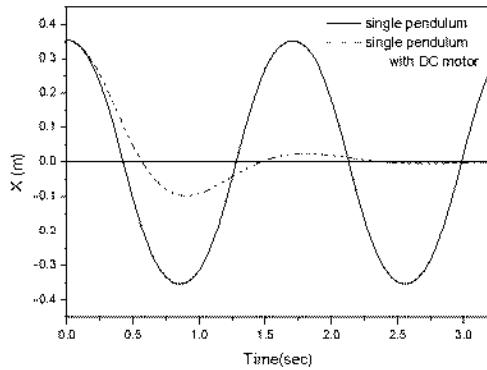


Fig. 9 X coordinate of single pendulum

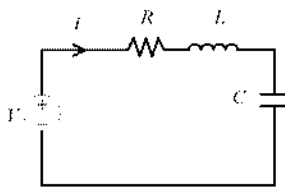


Fig. 10 Electronic circuit of RLC

Table 5 Differentiability of explicit and implicit integrator

| Frequency | 100.0 kHz | 400.0 kHz | 700.0MHz |
|----------------|-----------|-----------|----------|
| Implicit(GERE) | O | X | X |
| Explicit(RK45) | O | O | O |

6. 결 론

본 연구를 통하여 전기회로와 기전 시스템의 동역학 해석을 위한 방법을 제시하였다. 기계 시스템과 연성되어 있는 전기회로 시스템을 미분대수 방정식의 형태로 표현하였고, 연성소자에 대한 적절한 수치 모델을 제시하였다. 제안된 방법으로 해석하여 수치정확성과 유용성을 검증하였다. 또한 다양한 주파수를 갖는 회로의 과도해석을 통해 적분기의 선정기준을 제시하였다.

회로 시스템은 고주파 성분을 가지므로 수치적분의 효율성이 저하된다. 향후 효율적인 해석을 위해서 회로해석에 적합한 적분법과 기계 시스템에 적합한 적분법을 동시에 사용하는 멀티레이트 수치적분 방법(multirate integration method)에 대한 연구가 수행 되어야 한다.⁽²¹⁾

후 기

이 논문은 2004 년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었고 이에 관계자에게 감사 드립니다.

참고문헌

- ADAMS(Version 12.0) User's Guide, Mechanical Dynamics, Inc.
- RecurDyn(Version 5.0) User's Guide, FunctionBay, Inc.
- PSpice(Version 9.0) User's Guide, OrCAD.
- HSPICE manual, SYNOPSYS.
- Haug, E. J., Computer-Aided Kinematics and Dynamics of mechanical Systems Volume I : Basic Methods, Allyn and Bacon, 1989.
- Nikravesh, P. E., Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice-Hall, 1988.
- 이상호, 배대성, 한창수, 서문석, "구속된 다물체 시스템을 위한 동역학 해석론," 대한기계학회논문집, 제 18 권, 제 9 호, pp. 2239-2348, 1994.
- Park, J. H., "Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems using Hybrid Coordinates," ACMD2004 proceedings, pp. 361-367, 2004.
- Wehage, R. A., Haug, E. J., "Generalized Coordinates Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic System," J. of Mechanical Design, Vol. 104, pp. 247-255, 1982.
- Bae, D. S., Haug, E. J., "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II. Closed Loop Systems," Mech. Struct. & Mach., Vol. 15, No. 4, pp. 481-506, 1987.
- Chua, L. O., Lin, P. M., Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits : Algorithms and Computational Techniques, Prentice-Hall, 1975.
- Prigozy, S., "PSpice Computer Modeling of Hysteresis Effects," IEEE Transactions on, pp. 2-5, 1993.
- Ushida, A., Chua, L. O., "A relaxation method for getting the steady-state responses of nonlinear circuits," ISCAS, pp. 586-589, 1989.
- 김무진, 문원규, 배대성, 박일환, 최진환, "DC 모터 구동시스템의 동역학 해석 모델 개발," 한국정밀공학회 추계학술대회논문집, pp. 497-500, 2002.
- Kim, J. N., Choi, J. H., Moon, W. K., Park, I. H., "A Study on Dynamic Analysis of the Electrostatic Actuator," ACMD2004 proceedings, pp.506-511, 2004.
- Rizzoni, G., Principles and Applications of Electrical Engineering, second edition, IRWIN, 1996.
- Franklin, G., Powell, J., Abbas, E., Feedback Control of Dynamic Systems, fourth edition, Prentice-Hall, 2002.
- Parker Hannifin Co. Catalog 8000-3/USA, BE Series.
- <http://www.netlib.org/ode/rk45.f>.
- Gear, C. W., Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, 1971.
- 김성수, 김봉수, "멀티레이트 수치적분법을 이용한 유연다물체 동역학해석," 대한기계학회논문집 A 권, 제 24 권 제 11 호, pp. 2804-2811, 2000.